

矢量代数与分析

萧明文

目 录

目 录	ii
第一章 向量代数	2
§1.1 向量的几何表示	2
§1.2 向量的加法	2
§1.3 向量的数乘	4
§1.4 线性空间*	7
§1.5 向量组之共线与共面	9
§1.6 线性相关与线性无关*	13
§1.7 基底与坐标	14
§1.8 线性空间的维数与基底*	18
§1.9 仿射坐标系	20
§1.10 正交投影	21
§1.11 向量的内积	24
§1.12 内积空间*	28
1.12.1 欧几里得空间	28
1.12.2 酉空间	33
§1.13 向量的外积	35
§1.14 向量的混合积	43
§1.15 空间的定向	45
§1.16 外积与外代数*	49
第二章 向量函数	54
§2.1 向量函数	54
§2.2 向量函数的极限与连续性	54

§2.3 矢量函数的导数	57
§2.4 矢量函数的微分	60
§2.5 矢量函数的泰勒公式	61
§2.6 矢量函数的不定积分	62
§2.7 矢量函数的定积分	64
第三章 曲线坐标与运动标架	67
§3.1 曲线坐标系	67
3.1.1 柱坐标系	68
3.1.2 球坐标系	70
3.1.3 平面极坐标系与圆锥曲线	72
§3.2 角速度	77
3.2.1 柱标架的角速度	78
3.2.2 球标架的角速度	88
3.2.3 无限小角位移	90
3.2.4 赝矢量与赝标量	93
§3.3 相对运动	95
§3.4 科里奥利加速度与科里奥利力	98
§3.5 内禀坐标系*	101
第四章 实变复值函数	107
§4.1 复数	107
4.1.1 定义	107
4.1.2 复指数函数	110
4.1.3 欧拉公式	112
§4.2 实变复值函数	115
4.2.1 定义	115
4.2.2 极限	115
4.2.3 连续性	116
4.2.4 导数	117
4.2.5 微分	122

4.2.6 不定积分	124
4.2.7 定积分	127
§4.3 常系数线性常微分方程	129

第1章 矢量代数

简单地说，只有大小的量，通常谓之**标量**（scalar）。例如温度、时间、质量、能量等，都是标量。既有大小，又有方向的量，则谓之**矢量**（vector，也称为**向量**）。例如力、位移、速度、加速度、动量等，都是矢量。书写上，通常用黑体来表示矢量，例如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ，或用加带箭头帽子来表示，例如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 。这些都是标量和矢量的初步直观定义，更为严格的定义，可以参考《线性代数》方面的教程。对于《基础物理学》或《大学物理学》这一类课程，这些直观的定义就够用了。下面，我们就用它们来讲解矢量的代数与分析。

§1.1 矢量的几何表示

为了直观，人们经常用几何上的**有向线段**，例如用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示矢量 $\mathbf{a}$ ：用这条线段的长度表示 $\mathbf{a}$ 的大小；用起点 A 到终点 B 的指向表示 $\mathbf{a}$ 的方向，见图1.1.1。规定：长度相等并且方向相同的有向线段表示同一个矢量。例如，若 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\mathbf{a}$ ，则 $\overrightarrow{AB}$ 经过任意平移得到的有向线段仍表示 $\mathbf{a}$ ，见图1.1.2。

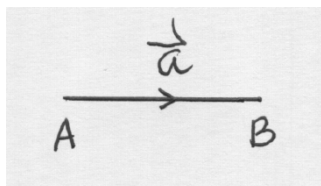


图 1.1.1. 用有向线段表示矢量

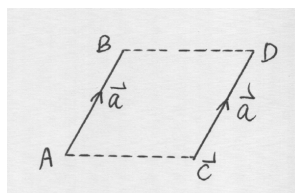


图 1.1.2. 矢量的平行移动

我们也经常把矢量的大小称为矢量的**长度**或**模**，矢量 $\mathbf{a}$ 的长度记作 $|\mathbf{a}|$ 。长度为零的矢量称为**零矢量**，记作 0 。在几何上，零矢量的起点与终点重合，即它退化为一。因此，零矢量，也只有零矢量，它的方向是不确定的。长度为1的矢量称为**单位矢量**。与矢量 $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq 0$) 同向的单位矢量，记作 $\hat{\mathbf{a}}$ ，经常用它来代表矢量的方向。

另外，与 $\mathbf{a}$ 长度相等、方向相反的矢量称为 $\mathbf{a}$ 的**反矢量**或**负矢量**，记作 $-\mathbf{a}$ 。譬如， $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 。

§1.2 矢量的加法

矢量加法的定义如下：

定义1.2.1. 对于矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ，先作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\mathbf{a}$ ，再作有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\mathbf{b}$ ，最后连接起点 A 与终点 C ，记有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所代表的矢量为 $\mathbf{c}$ ，则称矢量 $\mathbf{c}$ 为矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之和，记作 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。

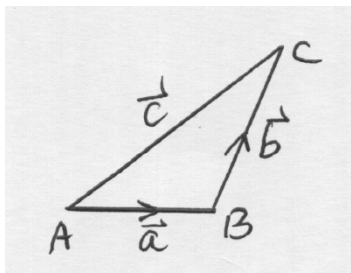


图 1.2.3. 三角形法则

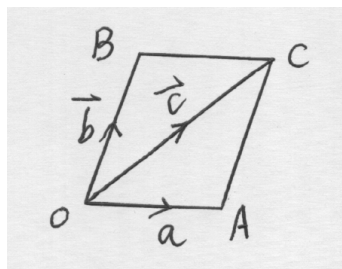


图 1.2.4. 平行四边形法则

上述定义也就是

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (1.2.1)$$

通常谓之曰**三角形法则**，见图1.2.3。显然，该定义与起点 A 之位置的选择无关。

几何上，矢量的加法也可以用**平行四边形法则**来表示，见图1.2.4：从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\mathbf{a}$ ，作 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\mathbf{b}$ ，再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$ ，则容易看出，对角线 $\overrightarrow{OC}$ 即矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之和 $\mathbf{c}$ 。

矢量的加法有如下性质：

定理1.2.1. 对任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，有

1. 结合律： $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ；
2. 交换律： $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ；
3. 零矢量： $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ；
4. 负矢量： $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 。

证明.

1. 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\mathbf{a}$ ，作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\mathbf{c}$ ，见图1.2.5。于是，我们有

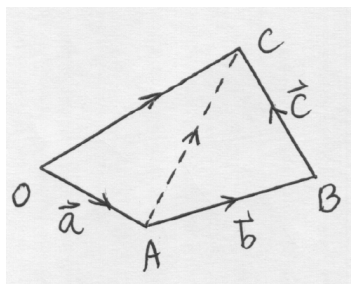


图 1.2.5. 加法的结合律

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}, \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}, \quad (1.2.3)$$

因此，

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (1.2.4)$$

2. 交换律, 即平行四边形法则。

3. 作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\mathbf{a}$, 作 $\overrightarrow{BB}$ 表示 0 , 于是,

$$\mathbf{a} + 0 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}. \quad (1.2.5)$$

4. 作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\mathbf{a}$, 则 $\overrightarrow{BA}$ 即 $-\mathbf{a}$ 。我们有

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0. \quad (1.2.6)$$

■

本书中, 我们将用符号 $:=$ 来表示数学量的定义, 譬如, $A := B$ 即表示“ A 定义为 B ”, 也就是说, 我们用右边的式子 B 来定义左边的量 A 。

定义1.2.2. $\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ 。

上式说明, 矢量的减法是通过负矢量的加法来定义的。

最后, 我们提一下一个常用的不等式: 对任意两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 都有

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \quad (1.2.7)$$

这个不等式称为**三角不等式**, 即三角形两边长度之和总是大于或等于第三边之长度。

§1.3 矢量的数乘

这里, 数量与矢量的乘法是指实数对矢量的作用, 定义如下:

定义1.3.1. 实数 λ 与矢量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个矢量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$ 。它的长度为 $|\lambda||\mathbf{a}|$, 即

$$|\lambda\mathbf{a}| := |\lambda||\mathbf{a}|.$$

当 $\lambda > 0$ 并且 $\mathbf{a} \neq 0$ 时, 它的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向一致; 当 $\lambda < 0$ 并且 $\mathbf{a} \neq 0$ 时, 它的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反。当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = 0$ 时, 乘积矢量 $\lambda\mathbf{a}$ 长度为零, 即它退化为零矢, 此时, 无所谓方向。

由是可知, 实数对非零矢量的数乘乃是一种伸缩作用, 当 $\lambda > 0$ 时, 同向伸缩; 当 $\lambda < 0$ 时, 反向伸缩; 当 $\lambda = 0$ 时, 矢量收缩为一点。又, 零矢量的数乘恒为零, 这是因为积矢量的长度总等于零。

上面, 我们将实数对矢量的作用记在矢量的左边, 即 $\lambda\mathbf{a}$, 这称为左作用。也可将实数对矢量的作用记在矢量的右边, 即 $\mathbf{a}\lambda$, 称为右作用。一般地, 人们不区分实数对矢量的左作用与右作用, 即

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda. \quad (1.3.1)$$

这给人们的书写带来了方便。

如果 $\lambda \neq 0$, 有时为了方便, 也将 $\lambda^{-1}\mathbf{a}$ 记作 $\mathbf{a}/\lambda$, 即

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda} := \lambda^{-1}\mathbf{a}. \quad (1.3.2)$$

设 $\mathbf{a} \neq 0$, 显然, $|\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向, 又,

$$||\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a}| = 1, \quad (1.3.3)$$

由此可知, 矢量 $\mathbf{a}$ 的单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$ 为

$$\hat{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \quad (1.3.4)$$

从一个非零矢量求它单位矢量的这个过程, 称为矢量的归一化 (normalization)。

矢量的数乘有如下性质:

定理1.3.1. 对任意实数 λ, μ 以及任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 有

1. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$;
2. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;
3. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
4. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

证明.

1. 显然。
2. 分三种情形: (a) λ 与 μ 至少有一等于零, 或 $\mathbf{a} = 0$; (b) λ 与 μ 同号, 并且 $\mathbf{a} \neq 0$; (c) λ 与 μ 异号, 并且 $\mathbf{a} \neq 0$ 。分别验证即可。
3. 若 λ 与 μ 至少有一等于零, 或 $\mathbf{a} = 0$, 则结论显然。以下设 $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, 且 $\mathbf{a} \neq 0$ 。我们分两种情形讨论: (a) λ 与 μ 同号; (b) λ 与 μ 异号。

(a) 首先, 当 λ 与 μ 同号时, 两矢量 $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ 与 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 显然同向。其次, 当 λ 与 μ 同号时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mu\mathbf{a}$ 方向相同, 因之, 我们有

$$|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}| + |\mu\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| + |\mu||\mathbf{a}| = (|\lambda| + |\mu|)|\mathbf{a}|. \quad (1.3.5)$$

又

$$|(\lambda + \mu)\mathbf{a}| = |\lambda + \mu||\mathbf{a}| = (|\lambda| + |\mu|)|\mathbf{a}|. \quad (1.3.6)$$

是故

$$|(\lambda + \mu)\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}|. \quad (1.3.7)$$

总之, 当 λ 与 μ 同号时, 斯二矢量, $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ 和 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, 方向既同, 长度又等, 因而

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}. \quad (1.3.8)$$

(b) 当 λ 与 μ 异号时, 由于俩实数 λ 与 μ 之地位平等对称, 不妨设 $\lambda > 0$, $\mu < 0$ 。我们可以再分以下三种情形一一讨论之:

i. $\lambda + \mu = 0$ 。此时,

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = 0. \quad (1.3.9)$$

又,

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} - (\lambda\mathbf{a}) = 0. \quad (1.3.10)$$

故

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}. \quad (1.3.11)$$

等式成立。

ii. $\lambda + \mu > 0$ 。注意到 $-\mu > 0$, 因此, $\lambda + \mu$ 与 $-\mu$ 同号。于是, 利用已证之情形3a知

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\mu)\mathbf{a}, \quad (1.3.12)$$

此即

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\mu)\mathbf{a}. \quad (1.3.13)$$

上式两边加以 $\mu\mathbf{a}$, 即得

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}. \quad (1.3.14)$$

等式依然成立。

iii. $\lambda + \mu < 0$ 。此时, $\lambda + \mu$ 与 $-\lambda$ 同号。仿上可证结论成立。

4. 若 $\lambda = 0$, 或者两矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之中至少有一个等于零矢, 则定理显然成立。以下考虑 $\lambda \neq 0$, $\mathbf{a} \neq 0$ 和 $\mathbf{b} \neq 0$ 的情形。它可以继续分为两种情形: (a) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行; (b) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行。我们下面分别讨论之。

(a) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行。此时, 存在实数 ν 使得 $\mathbf{b} = \nu\mathbf{a}$ 。于是,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda(\mathbf{a} + \nu\mathbf{a}) = \lambda[(1 + \nu)\mathbf{a}] = [\lambda(1 + \nu)]\mathbf{a} \\ &= (\lambda + \lambda\nu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + (\lambda\nu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \lambda(\nu\mathbf{a}) \\ &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

等式成立。

(b) 矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行。我们先考虑 $\lambda > 0$ 的情形。如图1.3.6, 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 分别表示矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 那么, 有向线段 $\overrightarrow{OB}$ 即表示两矢量之和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。继续作有向线段 $\overrightarrow{OC}$ 表示 $\lambda\mathbf{a}$, 作 $\overrightarrow{CD}$ 表示 $\lambda\mathbf{b}$ 。于是, 三角形 OAB 与三角形 OCD 相似: $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ 。从而点 D 必在射线 OB 上, 并且 $\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OB}$ 。由此可知, $\overrightarrow{OD}$ 正好表示矢量 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 。又, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$, 从三角形法则知, 它表示矢量 $\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ 。总而言之, 我们有

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \quad (1.3.16)$$

等式成立。

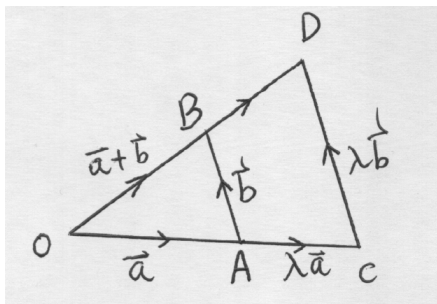


图 1.3.6. 向量数乘对加法的分配率

其次, 当 $\lambda < 0$ 时, $-\lambda > 0$, 由上证之结果可知,

$$(-\lambda)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\lambda)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{b}. \quad (1.3.17)$$

此外, 易证

$$(-1)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-1)\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}. \quad (1.3.18)$$

从而

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= [(-1)(-\lambda)](\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-1)[(-\lambda)(\mathbf{a} + \mathbf{b})] = (-1)[(-\lambda)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{b}] \\ &= (-1)[(-\lambda)\mathbf{a}] + (-1)[(-\lambda)\mathbf{b}] = [(-1)(-\lambda)]\mathbf{a} + [(-1)(-\lambda)]\mathbf{b} \\ &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

等式仍然成立, 得证。 ■

§1.4 线性空间*

从以上两节可知, 向量可以参与两种运算: 加法与数乘。这两种运算还满足八条法则, 即定理1.2.1和定理1.3.1。向量的本质是它具有两种运算并满足八条法则, 其具体表现形式, 例如有向线段, 是非本质, 并不重要的。一般地, 向量空间可定义如下:

定义1.4.1. 设 F 是一个数域, V 是一个非空集合。又设

1. 在集合 V 的内部定义了一个运算, 称为加法: 对 V 中任意两个元素 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 按某一法则对应于 V 内唯一确定的一个元素 $\mathbf{c}$, 称之为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之和, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。
2. 定义了数域 F 对集合 V 之作用, 称之为数乘: 对 F 中的任意一个数 λ 和 V 中任意一个元素 $\mathbf{a}$, 按某一法则对应于 V 内唯一确定的一个元素 $\mathbf{b}$, 称之为 λ 与 $\mathbf{a}$ 之积, 记为 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ 。

如果加法与数乘两种运算还进一步满足下面八条法则, 那么我们就称集合 V 是数域 F 上的一个线性空间或向量空间:

*加 * 的小节不影响后边正常要求的内容, 仅供参考, 可以不读。

1. 对任意三个元素 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$, 结合律成立: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 。

2. 对任意两个元素 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, 交换律成立: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。

3. 存在一个元素 $0 \in V$, 使得对一切元素 $\mathbf{a} \in V$, 都有

$$\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}.$$

此元素称为集合 V 的零元素。

4. 对任一元素 $\mathbf{a} \in V$, 都存在一个元素 $\mathbf{b} \in V$, 使得

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0.$$

此元素 $\mathbf{b}$ 称为元素 $\mathbf{a}$ 的负元素。

5. 对数域 F 中的数 1 , 以及集合 V 中的任意元素 $\mathbf{a}$, 有 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ 。

6. 对任意 $\lambda, \mu \in F$, 以及任意 $\mathbf{a} \in V$, 有 $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ 。

7. 对任意 $\lambda, \mu \in F$, 以及任意 $\mathbf{a} \in V$, 有 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 。

8. 对任意 $\lambda \in F$, 以及任意 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, 有 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ 。

线性空间中的元素称为**矢量**或**向量**, 零元素称为**零矢量**, 负元素称为**负矢量**。线性空间上的两种运算, 加法和数乘, 统称为**线性运算**。

取 F 为实数域, 即 $F = \mathbb{R}$, 取 V 为空间中全体有向线段所成之集合, 由上两节可知, 它们满足以上定义的各项要求, 因此, 空间中全体有向线段所成之集合即是实数域上的一个线性空间。同理易知, 平面上全体有向线段所成之集合也是实数域上的一个线性空间。当然, 直线上全体有向线段所成之集合也是实数域上的一个线性空间。

注意: 在力学里, 位移定义为从初始位置到终了位置所成之有向线段, 是故, 位移是一个矢量。至于速度乃至加速度缘何称之为矢量, 那要定义了矢量的微商之后才能明白, 当然, 那是矢量分析的内容了, 见第2章。

在物理学中, 一般只涉及实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$, 实数域上的线性空间简称**实空间**, 复数域上的线性空间简称**复空间**。在经典力学中, 线性空间为实空间, 例如, 位矢构成的空间。在量子力学中, 线性空间一般是复空间, 例如, Hilbert空间。

例1.4.1. 对于 n ($1 \leq n \in \mathbb{Z}$) 元有序数组,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n,$$

若定义加法与数乘如下:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

则其全体构成一个复空间, 习惯上记之为 $\mathbb{C}^n$ 。如果

$$\lambda \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n,$$

则其全体构成一个实空间, 记为 $\mathbb{R}^n$ 。

例1.4.2. 复数域 $\mathbb{C}$ 上的一元多项式, 对于加法和数乘, 构成一个复线性空间。同样, 实数域 $\mathbb{R}$ 上的一元多项式, 对于加法和数乘, 也构成一个线性空间, 并且是一个实线性空间。

例1.4.3. 考虑全体定义在区间 $[0, 1]$ 上的实连续函数。对于加法和数乘, 这些连续函数构成一个实线性空间。这是因为两个连续函数的和仍是连续函数, 连续函数乘以实数仍是连续函数。通常记此空间为 $C[0, 1]$ 。

由上可见, 线性空间是非常广泛, 非常之多的, 并不限于有向线段。线性空间这个概念是代数学中一个基本而重要的概念。

§1.5 矢量组之共线与共面

定义1.5.1. 矢量的加法和数乘运算, 统称为线性运算。

定义1.5.2. 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组矢量, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是一组实数, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n, \quad 0 < n \in \mathbb{Z},$$

仍是一个矢量, 称之为矢量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 的线性组合, 并称 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为这个组合的系数。

定义1.5.3. 将一个矢量组统一地用同一起点的有向线段表示, 如果它们在同一直线(平面)上, 则称这个矢量组是共线(共面)的。

在一直线上, 任取两点, 得一线段, 再任意规定一个方向, 即得一矢量, 这样产生的矢量, 谓之直线矢量。显然, 同一直线上的任意两个直线矢量必然共线, 其实, 任意有限个这样的直线矢量也一定是共线的。同样地, 在一平面上(空间中)任取两点, 并赋以一个方向, 也能产生一个矢量, 这样的矢量谓之平面矢量(空间矢量)。明显地, 同一平面上的任意有限个平面矢量一定共面。进一步, 容易看出, 从两条或多条相互平行的直线上所取的矢量组也是共线的, 从两个或多个相互平行的平面上所取的矢量组则是共面的。任意两个空间矢量不一定共线, 但一定共面。任意三个或多个空间矢量既不一定共线, 也不一定共面。又, 共线的空间矢量组一定共面。

如果矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 则称二者平行, 记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 。因此, 共线与平行是同义语。按定义, 零矢量显然与任意矢量平行。

首先, 易证:

引理1.5.1. 如果 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 或者 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 那么 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线或平行。

其次, 我们有

定理1.5.1. 如果矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 并且 $\mathbf{a} \neq 0$, 那么, 一定存在唯一的实数 λ , 使得

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}.$$

证明. 存在性。如果 $\mathbf{b} = 0$, 那么

$$\mathbf{b} = 0\mathbf{a}, \quad (1.5.1)$$

取 $\lambda = 0$, 即得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ 。如果 $\mathbf{b} \neq 0$, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同向, 那么 $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}}$ 。于是,

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\hat{\mathbf{b}} = |\mathbf{b}|\hat{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}|(|\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a}) = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}, \quad (1.5.2)$$

取 $\lambda = |\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$, 即得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ 。反之, 如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 反向, 那么 $\hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{b}}$, 取 $\lambda = -|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$, 即可也。

唯一性。反证。假如

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \mu \mathbf{a}, \quad (1.5.3)$$

其中,

$$\lambda \neq \mu, \quad (1.5.4)$$

那么

$$(\lambda - \mu)\mathbf{a} = 0. \quad (1.5.5)$$

因此,

$$|(\lambda - \mu)\mathbf{a}| = |\lambda - \mu||\mathbf{a}| = 0. \quad (1.5.6)$$

因为 $\mathbf{a} \neq 0$, 所以 $|\mathbf{a}| \neq 0$ 。从是可知, 必有

$$\lambda = \mu. \quad (1.5.7)$$

矛盾。 ■

定理1.5.2. 两矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充分必要条件是, 存在不全为零的实数 λ, μ , 使得线性组合

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = 0.$$

证明. 充分性。如果 λ, μ 不全为零, 譬如 $\lambda \neq 0$, 那么

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\mathbf{b}. \quad (1.5.8)$$

由前述之引理1.5.1, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线。充分性成立。

必要性。设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线。如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之中至少有一为零矢, 譬如 $\mathbf{a} = 0$, 则有

$$1\mathbf{a} + 0\mathbf{b} = 0. \quad (1.5.9)$$

必要性当然成立。如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都不是零矢量, 则由于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 且 $\mathbf{a} \neq 0$, 按前证之定理1.5.1, 存在唯一实数 λ , 使得

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}. \quad (1.5.10)$$

此即

$$\lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.5.11)$$

必要性亦成立。 ■

推论1.5.1. 设 λ, μ 为实数, 那么, 两矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线的充分必要条件是,

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0, \mu = 0.$$

也就是说, 线性组合 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ 等于零, 当且仅当两个系数 λ 和 μ 同时等于零。

引理1.5.2. 如果 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, 其中 λ, μ 为实数, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三矢量共面。

证明. 如果两矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之中有一为零矢, 譬如 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{c} = \mu \mathbf{b}$ 。按前述之引理1.5.1, 两矢量 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共线。由于零矢量 $\mathbf{a}$ 与任何矢量共线, 因此, 三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共线。因为共线矢量组必然共面, 所以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三矢量共面。引理成立。

如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均非零矢, 当 λ, μ 至少有一等于零时, 譬如 $\lambda = 0$, 则 $\mathbf{c} = \mu \mathbf{b}$, 因而 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共线, 于是三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 必然共面; 当 λ, μ 均不等于零, 并且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线时, 易知三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 必然共线, 因而共面; 当 λ, μ 均不等于零, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线时, 由平行四边形法则, 矢量 $\mathbf{c}$ 位于对角线上, 因而它必然位于由矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所决定的平面之上, 所以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三矢量必然共面。引理亦成立。 ■

定理1.5.3. 如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 并且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 则存在唯一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

证明. 首先, 要指出的是, 由于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 因此, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 必定均非零矢, 即 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 。

存在性。如果 $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$, 那么, 由于 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 据前证之定理1.5.1, 必存在唯一实数 ν , 使得

$$\mathbf{c} = \nu \mathbf{a}. \quad (1.5.12)$$

取 $\lambda = \nu, \mu = 0$, 即有

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \quad (1.5.13)$$

存在性成立。 $\mathbf{c} \parallel \mathbf{b}$ 的情形可以同样地讨论。

如果 $\mathbf{c}$ 既不平行于 $\mathbf{a}$, 也不平行于 $\mathbf{b}$, 则作平行投影如下: 首先, 如图1.5.7 所示, 从同一起

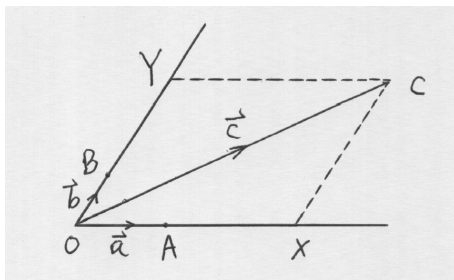


图 1.5.7. 平面矢量的分解

点 O 出发三作有向线段, 分别使得

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}. \quad (1.5.14)$$

然后, 从点 C 出发, 作直线平行于 OB , 设其交直线 OA 于 X , 则矢量 $\overrightarrow{OX}$ 与 $\mathbf{a} \neq 0$ 共线, 因此, 必存在唯一实数 η , 使得

$$\overrightarrow{OX} = \eta \mathbf{a}. \quad (1.5.15)$$

同样地, 从点 C 出发, 作直线平行于 OA , 设其交直线 OB 于 Y , 则矢量 $\overrightarrow{OY}$ 与 $\mathbf{b} \neq 0$ 共线, 因此, 必存在唯一实数 ξ , 使得

$$\overrightarrow{OY} = \xi \mathbf{b}. \quad (1.5.16)$$

现在, $OXC Y$ 构成一个平行四边形, 由平行四边形法则, 我们显然有

$$\mathbf{c} = \eta \mathbf{a} + \xi \mathbf{b}. \quad (1.5.17)$$

最后, 取 $\lambda = \eta$, $\mu = \xi$, 即得

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \quad (1.5.18)$$

存在性亦成立。

唯一性。假如

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \eta \mathbf{a} + \xi \mathbf{b}, \quad (1.5.19)$$

其中, λ, μ, η, ξ 均为实数, 那么,

$$(\lambda - \eta) \mathbf{a} + (\mu - \xi) \mathbf{b} = 0. \quad (1.5.20)$$

由于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 由前证之推论1.5.1, 必有

$$\lambda - \eta = 0, \quad \mu - \xi = 0. \quad (1.5.21)$$

亦即

$$\lambda = \eta, \quad \mu = \xi. \quad (1.5.22)$$

唯一性宣告成立。 ■

定理1.5.4. 三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是, 存在不全为零的实数 λ, μ, ν , 使得

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = 0.$$

证明. 充分性。如果 λ, μ, ν 不全为零, 譬如 $\lambda \neq 0$, 那么

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \mathbf{b} - \frac{\nu}{\lambda} \mathbf{c}. \quad (1.5.23)$$

由前述之引理1.5.2, 三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面。充分性成立。

必要性。设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面。如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之中至少有一为零矢, 譬如 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 则有

$$1\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (1.5.24)$$

必要性自然成立。

下面, 考虑 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 均不是零矢的情形。

首先, 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 那么, 由 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 按前证之定理1.5.1, 存在唯一实数 λ , 使得

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}. \quad (1.5.25)$$

于是,

$$\lambda\mathbf{a} - 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (1.5.26)$$

必要性成立。其次, 如果两矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不平行, 即不共线, 那么, 按前证之定理1.5.3, 存在唯一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \quad (1.5.27)$$

斯即,

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - 1\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (1.5.28)$$

必要性亦告成立。 ■

推论1.5.2. 设 λ, μ, ν 为实数, 那么, 三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面的充分必要条件是,

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0.$$

也即, 线性组合 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ 等于零, 当且仅当它的所有组合系数都等于零。

§1.6 线性相关与线性无关*

定义1.6.1. 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ 是一组矢量 ($0 < n \in \mathbf{Z}$)。如果存在一组不全为零数, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, 使得线性组合满足以下条件,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

则称矢量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 是线性相关的。

明显地, 单个矢量 $\mathbf{v}$ 线性相关的充分必要条件是 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 。另外, 若矢量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性相关, 则其中至少有一个矢量可以表为其它矢量的线性组合, 譬如, $\lambda_1 \neq 0$, 则

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \mathbf{a}_n. \quad (1.6.1)$$

定义1.6.2. 一个矢量组, 如果它不是线性相关的, 就称之为线性无关。

显然, 单个矢量 $\mathbf{v}$ 线性无关的充分必要条件是 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 。此外, 从二定义, 易知,

定理1.6.1. 矢量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ ($0 < n \in \mathbf{Z}$) 线性无关的充分必要条件是,

$$\sum_i^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

其中, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ 。也即, 一个矢量组线性无关, 当且仅当它们的线性组合等于零时, 其所有的组合系数都等于零。

读者不难推知: 对线性相关的矢量组添加一些矢量, 添加后的矢量组必定线性相关; 对线性无关的矢量组抽减部分而非全部矢量, 抽减后的矢量组必定线性无关。

回眸反观, 两矢量共线即是两矢量线性相关, 同样地, 三矢量共面即是三矢量线性相关。反之, 两矢量不共线即是两矢量线性无关, 三矢量不共面即是三矢量线性无关。因此, 共线和共面都是线性相关的特例, 不共线、不共面都是线性无关的特例。这些就是上节的主要内容。另外, 容易看出: 在一直线上, 任意两个或两个以上的矢量必定是线性相关的; 在一平面上, 任意三个或三个以上的矢量必定是线性相关的; 在空间中, 任意四个或四个以上的矢量必定是线性相关的。

§1.7 基底与坐标

矢量用有向线段表示时比较直观, 但有向线段的运算不如数的运算简单。给矢量引进坐标, 使用起来将更为方便。

定理1.7.1. 在直线上任意取定一个非零矢量 $\mathbf{e}$, 则该直线上的任意一个矢量 $\mathbf{v}$ 均可唯一地表示为 $\mathbf{e}$ 之数乘,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e},$$

其中, x 为一实数。

习惯上, 称上述矢量 $\mathbf{e}$ 为直线上的一个**基底**, 并称上式中的系数 x 为矢量 $\mathbf{v}$ 关于基底 $\mathbf{e}$ 的**坐标**。

证明. 一根直线上的任意两个矢量都是共线的, 于是, $\mathbf{v}, \mathbf{e}$ 共线, 并且 $\mathbf{e} \neq 0$, 根据定理1.5.1, 存在唯一的实数 x , 使得

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}. \quad (1.7.1)$$

得证。 ■

定理1.7.2. 在平面上任意取定两个不共线的矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 则该平面上的任意一个矢量 $\mathbf{v}$ 均可唯一地表示为矢量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的线性组合,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,$$

其中, x, y 为一对实数。

人们称有序矢量组 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 为平面上的一个**基底**, 并称有序二元数组 (x, y) 为矢量 $\mathbf{v}$ 关于基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的**坐标**。

证明. 一个平面上的任意三个矢量都是共面的, 因此, $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 三矢量共面, 并且 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线, 根据定理1.5.3, 存在唯一的一对实数 x, y , 使得

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (1.7.2)$$

得证。 ■

定理1.7.3. 在空间中任意取定三个不共面的矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 则该空间中的任意一个矢量 $\mathbf{v}$ 均可唯一地表示为矢量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的线性组合,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

其中, x, y, z 均为实数。

这里, 有序矢量组 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 称为空间上的一个**基底**, 相应地, 有序三元数组 (x, y, z) 称为矢量 $\mathbf{v}$ 关于基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 的**坐标**。以后, 不管是直线、平面, 还是空间, 我们总将基底之成员, 例如 $\mathbf{e}_2$, 称为**基矢**。注意: 在谈论基底时必须约定次序, 不同的次序代表不同的基底, 例如,

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}, \quad \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}, \quad (1.7.3)$$

是三个不同的基底, 虽然作为集合, 三者是一致的。坐标是由基底决定的, 当然也有次序。

证明. 存在性。如果矢量 $\mathbf{v}$ 与基底中的某一基矢共线, 譬如 $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_1$, 那么, 由于 $\mathbf{e}_1 \neq 0$, 据前证之定理1.5.1, 必存在唯一的实数 λ , 使得

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{e}_1. \quad (1.7.4)$$

取 $x = \lambda, y = 0, z = 0$, 即有

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (1.7.5)$$

存在性成立。

如果矢量 $\mathbf{v}$ 不平行于基底中的任何基矢, 但与基底中的某两个基矢共面, 譬如, $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 共面, 那么, 由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线, 按照定理1.5.3, 必存在唯一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2. \quad (1.7.6)$$

取 $x = \lambda, y = \mu, z = 0$, 即有

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (1.7.7)$$

存在性亦成立。

如果矢量 $\mathbf{v}$ 既不平行于基底中的任何基矢, 也不与基底中的任何两个基矢共面, 则如图1.7.8所示, 作平行投影如下: 首先, 从同一起点 O 出发作有向线段 OA_1, OA_2, OA_3, OV , 使得分别满足

$$\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OA_2} = \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OA_3} = \mathbf{e}_3, \quad \overrightarrow{OV} = \mathbf{v}. \quad (1.7.8)$$

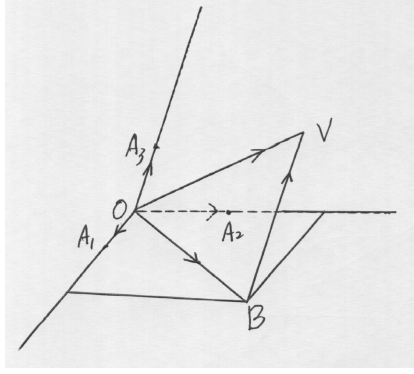


图 1.7.8. 空间矢量的分解

然后, 从点 V 出发, 作直线平行于 OA_3 , 设其交 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 所生成的平面于点 B , 则矢量 $\overrightarrow{BV}$ 与 $\mathbf{e}_3$ 平行, 因此, 必存在唯一实数 ν , 使得

$$\overrightarrow{BV} = \nu \mathbf{e}_3. \quad (1.7.9)$$

因为

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{OB} + \nu \mathbf{e}_3, \quad (1.7.10)$$

所以

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OB} + \nu \mathbf{e}_3. \quad (1.7.11)$$

现在, 三矢量 $\overrightarrow{OB}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 共面, 并且 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线, 根据定理 1.5.3, 存在唯一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\overrightarrow{OB} = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2. \quad (1.7.12)$$

将之代入式 (1.7.11), 得

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3. \quad (1.7.13)$$

最后, 取 $x = \lambda, y = \mu, z = \nu$, 即得

$$\mathbf{v} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3. \quad (1.7.14)$$

存在性依然成立。

唯一性。假如

$$\mathbf{v} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 = x' \mathbf{e}_1 + y' \mathbf{e}_2 + z' \mathbf{e}_3, \quad (1.7.15)$$

其中, x, y, z, x', y', z' 均为实数, 那么,

$$(x - x') \mathbf{e}_1 + (y - y') \mathbf{e}_2 + (z - z') \mathbf{e}_3 = 0. \quad (1.7.16)$$

由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 不共面, 由前证之推论 1.5.2, 必有

$$x - x' = 0, \quad y - y' = 0, \quad z - z' = 0. \quad (1.7.17)$$

也就是,

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1.7.18)$$

唯一性成立。 ■

值得指出的是, 如上证明所示, 空间矢量的完全分解是通过两步平行四边形分解来建立的: 第一步为式(1.7.10), 其中 $\overrightarrow{BV}$ 是直线矢量, $\overrightarrow{BV} = \nu \mathbf{e}_3$, 可得坐标 ν , 但 $\overrightarrow{OB}$ 仍为面矢, 尚需进一步分解, 因此, 第一步分解是不完全的。第二步为式(1.7.12), 它是完全分解, 得坐标 λ, μ 。平面矢量只需一次平行四边形分解, 空间矢量需要连续两次平行四边形分解, 这是空间矢量区别于平面矢量的地方之一。

在空间中选取一个基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。设空间矢量 $\mathbf{a}$ 的坐标是 (a_1, a_2, a_3) , 即,

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.7.19)$$

那么, 我们有

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{a} &= \lambda(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \lambda(a_1 \mathbf{e}_1) + \lambda(a_2 \mathbf{e}_2) + \lambda(a_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda a_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda a_2) \mathbf{e}_2 + (\lambda a_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

上式说明, 若 $\mathbf{a}$ 的坐标是 (a_1, a_2, a_3) , 则对三个分量分别乘以 λ , 即得矢量 $\lambda \mathbf{a}$ 的坐标 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ 。

又, 设空间矢量 $\mathbf{b}$ 的坐标是 (b_1, b_2, b_3) , 即

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.7.21)$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) + (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \\ &= (a_1 \mathbf{e}_1 + b_1 \mathbf{e}_1) + (a_2 \mathbf{e}_2 + b_2 \mathbf{e}_2) + (a_3 \mathbf{e}_3 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

因此, 若矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , 则二者之和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的坐标为 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, 也就是说, 两矢量和的分量等于两矢量相应分量之和。

由上可知, 给定一个矢量 $\mathbf{a}$, 我们有唯一的坐标 (a_1, a_2, a_3) 。反之, 任意给定三个实数 a_1, a_2, a_3 , 作线性组合,

$$\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.7.23)$$

它当然仍是一个矢量, 而且这个矢量的坐标为 (a_1, a_2, a_3) , 根据定理1.7.3, 它就是矢量 $\mathbf{a}$ 本身。因此, 在空间中, 矢量与有序三元实数组是一一对应的。

上面的讨论还说明, 这个对应还保持线性运算: 数乘和加法。习惯上, 人们称这种对应为矢量的坐标表示。相对而言, 矢量的运算较为抽象, 然而, 一旦将矢量表示为坐标, 则运算化为实数的加法与乘法, 这是人们非常熟悉的了, 因而是简单的。是故, 作矢量运算时, 人所乐用。

易知,上述有关空间矢量与坐标的讨论对直线和平面上的矢量与坐标也同样适用。

最后,有常用说法如下:

定义1.7.1. 如果

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1,$$

则称 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为**正交基底**。进一步,如果还有

$$|\mathbf{e}_1| = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = 1, \quad |\mathbf{e}_3| = 1,$$

则称 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为**正交归一基底**。

对直线和平面上的矢量,也有类似的说法。

§1.8 线性空间的维数与基底*

在一个线性空间中,最多能有几个线性无关的矢量?这是一个关于线性空间的基本而重要的问题。

定义1.8.1. 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的矢量,但没有更多数目的线性无关矢量,也就是说,任意数目 $m > n$ 的矢量组都是线性相关的,那么,我们就称 V 是 n 维的,记为 $\dim(V) = n$ 。反之,如果在线性空间 V 中可以找到任意多个线性无关的矢量,那么,我们就称 V 是无限维的。

在一个线性空间中,如果对一个线性无关矢量组添加任一矢量,添加后的矢量组都是线性相关的,那么,我们就称该矢量组为**极大线性无关矢量组**。在一个线性空间中,极大线性无关矢量组往往是非常之多的,然而,可以证明,对于一个确定的线性空间,所有极大线性无关矢量组所含成员的数目全是一样的。因此,上述定义是合理的。一个线性空间的维数,其实就是该空间中极大线性无关矢量组所含成员的数目。

在本书中,我们只讨论有限维空间。

定义1.8.2. 在 n 维线性空间 V 中,任意一个数目为 n 的线性无关的有序矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, 都称为空间 V 的一个**基底**,记为 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 。

因此,基底成员的数目总是空间的维数。

设线性空间 V 的维数为 n , 有序矢量组 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是它的一个基底。又设 $\mathbf{v}$ 是空间 V 的任一矢量。于是,添加 $\mathbf{v}$ 后,矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}$ 必定线性相关,即当

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i + \xi \mathbf{v} = 0 \quad (1.8.1)$$

时,其中系数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \xi$ 不全为零。必须指出的是,系数 ξ 必然不等于 0, $\xi \neq 0$ 。这是因为,如果 $\xi = 0$, 那么,上式化为

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i = 0. \quad (1.8.2)$$

由于矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是线性无关的, 因此,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \quad (1.8.3)$$

这将导致式 (1.8.1) 中所有系数都等于零, 于是, 矢量组 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}\}$ 线性无关, 空间的维数必大于 n , 矛盾. 现在, 因为 $\xi \neq 0$, 所以矢量 $\mathbf{v}$ 可以从式 (1.8.1) 中解出, 得

$$\mathbf{v} = \sum_i^n \left(-\frac{\lambda_i}{\xi} \right) \mathbf{e}_i. \quad (1.8.4)$$

上式表明, 空间 V 中任意矢量 $\mathbf{v}$ 均可用此基底的线性组合表出. 利用基底作为矢量组的线性无关性, 容易得知, 上述表示还是唯一的. 据此, 我们有如下之定义:

定义1.8.3. 设线性空间 V 有一个基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, 则空间 V 中任意矢量 $\mathbf{v}$ 均可用此基底唯一的线性组合表出,

$$\mathbf{v} = \sum_i^n x_i \mathbf{e}_i,$$

其中, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ 是表示系数. 由这些系数构成的有序 n 元数组称为矢量 $\mathbf{v}$ 的坐标, 记为 $(x_1, \dots, x_n)$ 。

从以上定义1.8.2看来, 欲给出线性空间的一个基底, 必须先确定空间的维数. 实际上, 这两个问题常常是同时确定的。

定理1.8.1. 如果线性空间 V 中有 n 个线性无关的矢量 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, 并且 V 中任一矢量 $\mathbf{v}$ 均可用此矢量组的线性组合表出, 那么, V 是 n 维的, 而且有序矢量组 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是 V 的一个基底。

证明. 既然矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是线性无关的, 那么 $\dim(V) \geq n$. 为证明 $\dim(V) = n$, 只须证明任意 $m > n$ 个矢量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 必是线性相关的. 由于它们都可以用矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 表出, 即

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \mathbf{e}_j, \quad (1.8.5)$$

其中, $\mu_{ji} \in \mathbb{F}$ 是表示系数 ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), 因此, 它们的线性组合可以写为以下形式,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \mu_{ji} \lambda_i \right) \mathbf{e}_j, \quad (1.8.6)$$

其中, $\lambda_i \in \mathbb{F}$ 是组合系数 ($i = 1, \dots, m$). 于是, 当此线性组合等于零时,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \mu_{ji} \lambda_i \right) \mathbf{e}_j = 0, \quad (1.8.7)$$

利用矢量组 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 的线性无关性, 我们得

$$\sum_{i=1}^m \mu_{ji} \lambda_i = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.8.8)$$

上式是关于变量 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的线性齐次方程组, 因为 $n < m$, 方程的数目少于变量的个数, 所以必有非零解, 即 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 不全为零. 这就证明了矢量组 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 必是线性相关的. ■

最后,我们以本节的观点来回看上节的内容.定理1.7.1表明,直线上全体矢量所生成的线性空间是一个一维实空间;定理1.7.2表明,平面上全体矢量所生成的线性空间是一个二维实空间;定理1.7.3则表明,空间上全体矢量所生成的线性空间是一个三维实空间.因此,我们经常说,直线是一维的,平面是二维的,而空间则是三维的.另外,显见, $\mathbb{C}^n$ 是 n 维复线性空间, $\mathbb{R}^n$ 是 n 维实线性空间.

§1.9 仿射坐标系

在矢量有了坐标之后,人们可以对直线、平面、空间上的点引进坐标.办法是将点矢量化,即在点与矢量之间建立一个一一对应关系,这样就可以将矢量的坐标移植过来定义点的坐标.我们只讨论空间的情形,平面和直线是类似的.

要建立点与矢量之间的对应,是很容易办到的,因为,如所周知,两点可以产生两个方向相反的有向线段,其中任一皆为矢量,这样,通过添加点,一个给定点可以同无限多个矢量建立对应,因为可添加的点有无限多.容易看出,为了使得对应是一一的,只须选择一个点作为公共的添加点,并且约定空间中所有点与公共点的定向就行了.这个被选择出来的公共点,人们称之为**坐标原点**.点与坐标原点之间,通常约定从后者指向前者的方向为正向.这样,空间中每一点都与唯一的一个有向线段对应:它的起点是坐标原点,终点为空间点本身.这个有向线段,通常称之为**位矢**(position vector).

定义1.9.1. 空间中一点 O 连同基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,称为空间的一个**仿射标架**,或**仿射坐标系**,记为 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,其中,点 O 称为**坐标原点**,矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 称为**坐标矢量**.对于空间中任一点 P ,将与之对应的位矢 $\overrightarrow{OP}$ 在基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的坐标称为点 P 在仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的**仿射坐标**,简称**坐标**.

由斯定义,空间点 P 在仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的坐标为 (x, y, z) 当且仅当

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (1.9.1)$$

设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为空间的一个仿射标架.过原点 O ,分别以 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为方向的有向直线称为 x 轴、 y 轴和 z 轴,统称为**坐标轴**.每两根坐标轴决定一个平面,称为**坐标平面**.总共有三个坐标平面,分别是 xOy 平面、 yOz 平面、 zOx 平面.三个坐标平面将空间分为八个部分,称为八个**卦限**.

将右手四指,拇指除外,从 x 轴正方向弯向 y 轴正方向,保持转角小于 π ,如果此时拇指所指的方向与 z 轴的正方向都在 xOy 平面的同一侧,则称此坐标系为**右手系**,否则,称为**左手系**,见图1.9.9和图1.9.10.左手系也可以用左手来定义:将左手四指,拇指除外,从 x 轴正方向弯向 y 轴正方向,保持转角小于 π ,如果此时拇指所指的方向与 z 轴的正方向都在 xOy 平面的同一侧,则称此坐标系为左手系.容易看出,一个空间坐标系要么是右手系,要么是左手系,不会是其它.这个性质称为**空间坐标系的手性**.在几何学与物理学中,通常取右手系为标准坐标系.

坐标系的手性也可以由基底来约定:将右手四指,拇指除外,从基矢 $\mathbf{e}_1$ 的正向弯向基矢 $\mathbf{e}_2$ 的正向,同时保持转角小于 π ,如果此时拇指所指的方向与基矢 $\mathbf{e}_3$ 的正向都在 xOy 平面的同一侧,则称此坐标系为**右手系**,否则,称为**左手系**.显然,这两个约定是完全一致的.由于基底有次序,因此,坐

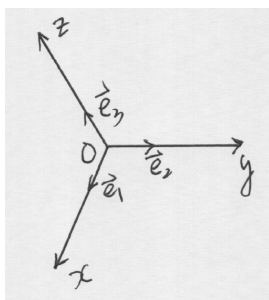


图 1.9.9. 右手系

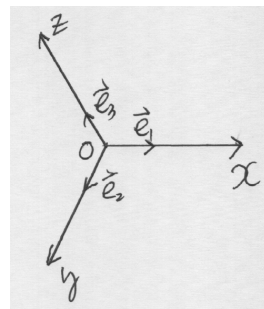


图 1.9.10. 左手系

标系也是有次序的，例如，

$$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \{O; \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}, \quad (1.9.2)$$

是两个不同的坐标系。如果前者是右手系，则后者是左手系。即使手性相同，例如，

$$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \{O; \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}, \quad (1.9.3)$$

由于基底次序不同，二者仍是不同的坐标系。

定义1.9.2. 如果

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1,$$

则称 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为正交标架或正交坐标系。如果还有

$$|\mathbf{e}_1| = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = 1, \quad |\mathbf{e}_3| = 1,$$

则称 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为直角标架或直角坐标系。进一步，如果 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 还是右手系，则称它为右手直角标架，或笛卡尔标架，或右手直角坐标系，或笛卡尔坐标系。

直角坐标系和笛卡尔坐标系都是特殊的仿射坐标系，其中，笛卡尔坐标系尤为特殊，尤为简单，故是一种常用坐标系。但也要注意，对有些物理问题，例如晶体，为了描写晶向，笛卡尔坐标系是不方便的，人们需要一般的仿射坐标系。

值得指出，由于仿射标架本身带有基底，因之，它既可以给出空间点的坐标，也可以给出空间矢量的坐标，可以一身二用。实际工作中，人们经常这么作。

平面和直线的情形也是类似的，不啰嗦了。这里只指出一点：平面坐标系有顺时针的，也有逆时针的，通常取顺时针坐标系为标准坐标系。直线坐标系则显然有左右这种手性，一般也约定右手系为标准坐标系。

§1.10 正交投影

本节讨论矢量的正交投影，为下面两节讨论矢量的点乘与叉乘作准备。

几何上，给定一个单位矢量 $\mathbf{e}$ ，也就等价于给定了一个方向。那么，任一矢量 $\mathbf{a}$ 就可以作关于方向 $\mathbf{e}$ 的正交投影：如图1.10.11所示，将 $\mathbf{e}, \mathbf{a}$ 的始点移至一个共同点 O ，然后，从矢量 $\mathbf{a}$ 的终点，记

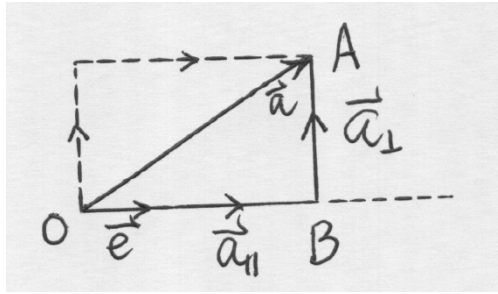


图 1.10.11. 矢量的内射影与外射影

为 A ，向矢量 $\mathbf{e}$ 所在的直线作垂线，得交点，记为 B ，则矢量 $\overrightarrow{OB}$ 称为矢量 $\mathbf{a}$ 关于方向 $\mathbf{e}$ 的**内射影**（或**内投影**），记为 $\mathbf{a}_{\parallel}$ ，矢量 $\overrightarrow{BA}$ 称为矢量 $\mathbf{a}$ 关于方向 $\mathbf{e}$ 的**外射影**（或**外投影**），记为 $\mathbf{a}_{\perp}$ 。于是，

$$\mathbf{a}_{\parallel} \parallel \mathbf{e}, \quad \mathbf{a}_{\perp} \perp \mathbf{e}, \quad (1.10.1)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}. \quad (1.10.2)$$

由上所述可见，所谓正交投影，实际上就是由方向 $\mathbf{e}$ 诱生的正交分解，满足直角三角形法则、或矩形法则，矢量 $\mathbf{a}$ 在斜边或对角线上。这种正交分解不但是存在的，而且是惟一的，也就是说，

定理1.10.1. 设矢量 $\mathbf{a}$ 有分解，

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

其中，

$$\mathbf{b} \parallel \mathbf{e}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{e},$$

则必有

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_{\parallel}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}_{\perp}.$$

证明. 因为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}, \quad (1.10.3)$$

又

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad (1.10.4)$$

所以

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}. \quad (1.10.5)$$

移项，得

$$\mathbf{b} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a}_{\perp} - \mathbf{c}. \quad (1.10.6)$$

显然，

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}_{\parallel}) \parallel \mathbf{e}, \quad (\mathbf{a}_{\perp} - \mathbf{c}) \perp \mathbf{e}. \quad (1.10.7)$$

如果

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{a}_{\parallel}, \quad \mathbf{c} \neq \mathbf{a}_{\perp}, \quad (1.10.8)$$

则式(1.10.6)等号两边矢量的方向不同, 矛盾。因此, 必有

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_{\parallel}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}_{\perp}. \quad (1.10.9)$$

■

现在, 选一直角坐标系 $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, 使得 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}$ 。作矢量分解, 我们有

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z. \quad (1.10.10)$$

注意到

$$(a_z \mathbf{e}_z) \parallel \mathbf{e}, \quad (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y) \perp \mathbf{e}, \quad (1.10.11)$$

由上定理, 我们得

$$\mathbf{a}_{\parallel} = a_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a}_{\perp} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y. \quad (1.10.12)$$

可见, 利用上述这样的方式, 我们可以直接得到内、外射影的坐标表示。利用这种坐标表示, 我们有

定理1.10.2. 正交投影保持矢量的线性运算——数乘与加法。也就是说, 对任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 以及任意实数 λ , 我们有

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a})_{\parallel} &= \lambda \mathbf{a}_{\parallel}, & (\mathbf{a} + \mathbf{b})_{\parallel} &= \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\parallel}; \\ (\lambda \mathbf{a})_{\perp} &= \lambda \mathbf{a}_{\perp}, & (\mathbf{a} + \mathbf{b})_{\perp} &= \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{b}_{\perp}. \end{aligned}$$

证明. 由

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad (1.10.13)$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z, \quad (1.10.14)$$

我们有

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \mathbf{e}_x + \lambda a_y \mathbf{e}_y + \lambda a_z \mathbf{e}_z, \quad (1.10.15)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{e}_x + (a_y + b_y) \mathbf{e}_y + (a_z + b_z) \mathbf{e}_z. \quad (1.10.16)$$

于是,

$$(\lambda \mathbf{a})_{\parallel} = \lambda a_z \mathbf{e}_z = \lambda (a_z \mathbf{e}_z) = \lambda \mathbf{a}_{\parallel}, \quad (1.10.17)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{\parallel} = (a_z + b_z) \mathbf{e}_z = a_z \mathbf{e}_z + b_z \mathbf{e}_z = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\parallel}; \quad (1.10.18)$$

$$(\lambda \mathbf{a})_{\perp} = \lambda a_x \mathbf{e}_x + \lambda a_y \mathbf{e}_y = \lambda (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y) = \lambda \mathbf{a}_{\perp}, \quad (1.10.19)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{\perp} = (a_x + b_x) \mathbf{e}_x + (a_y + b_y) \mathbf{e}_y = (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y) + (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y) = \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{b}_{\perp}. \quad (1.10.20)$$

■

§1.11 矢量的内积

矢量的内积也称标量积,或数量积,或点积,或点乘,定义如下,

定义1.11.1. 两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的内积,记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 定义为一个实数,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之间有两个夹角, 其中 θ 是指不大于 π 的那个, 即 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之中至少有一个为零矢, 或, 虽均非零矢, 但二者相互垂直, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 。在其它情况下, 内积不为零: 当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$; 当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 。

利用内积, 我们可以计算矢量的长度,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad (1.11.1)$$

以及两个非零矢量的夹角,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}. \quad (1.11.2)$$

也就是说, 我们可以用内积来解决矢量的长度与夹角问题。显然, 当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均非零矢时,

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.11.3)$$

有时, 为了方便, 人们将 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 简记作 $\mathbf{a}^2$, 因此,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \quad (1.11.4)$$

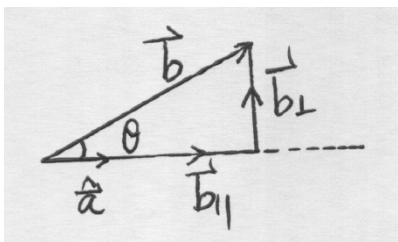


图 1.11.12. 矢量 $\mathbf{b}$ 关于 $\hat{\mathbf{a}}$ 的内射影 $\mathbf{b}_{\parallel}$

若 $\mathbf{a}$ 为非零矢量, 则有单位矢量,

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}}. \quad (1.11.5)$$

利用正交投影的直角三角形法则, 见图1.11.12, 易知

$$\mathbf{b}_{\parallel} = |\mathbf{b}| \cos \theta \hat{\mathbf{a}}, \quad (1.11.6)$$

其中, $\mathbf{b}_{\parallel}$ 为矢量 $\mathbf{b}$ 关于方向 $\hat{\mathbf{a}}$ 的内投影。由此, 我们有

引理1.11.1. 若 $\mathbf{a} \neq 0$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel}).$$

证明. 首先, 若 $\mathbf{b} = 0$, 则引理显然成立。以下考虑 $\mathbf{b} \neq 0$ 的情形。

若 $0 \leq \theta < \pi/2$, 则 $\cos \theta > 0$, 故 $\mathbf{b}_{\parallel}$ 与 $\hat{\mathbf{a}}$ 同向。由是, 根据内积之定义, 我们有

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| \cos 0 = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| = |\mathbf{b}_{\parallel}| = ||\mathbf{b}| \cos \theta \hat{\mathbf{a}}| = ||\mathbf{b}| \cos \theta| |\hat{\mathbf{a}}| = |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (1.11.7)$$

于是,

$$|\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.11.8)$$

引理成立。

若 $\theta = \pi/2$, 则引理显然成立。

若 $\pi/2 < \theta \leq \pi$, 则 $\cos \theta < 0$, 故 $\mathbf{b}_{\parallel}$ 与 $\hat{\mathbf{a}}$ 反向。同前, 我们有

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| \cos \pi = -|\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| = -|\mathbf{b}_{\parallel}| = -||\mathbf{b}| \cos \theta \hat{\mathbf{a}}| = -||\mathbf{b}| \cos \theta| |\hat{\mathbf{a}}| = |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (1.11.9)$$

这样, 便得

$$|\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.11.10)$$

引理仍然成立。 ■

依照上节, 我们取一直角坐标系 $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, 使得 $\mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{a}}$ 。则有

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z. \quad (1.11.11)$$

于是,

$$\mathbf{b}_{\parallel} = b_z \mathbf{e}_z. \quad (1.11.12)$$

利用这个结果, 我们有

引理1.11.2. 若 $\mathbf{a} \neq 0$, 则

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} = b_z,$$

证明. 若 $b_z = 0$, 引理显然成立。

若 $b_z > 0$, 则 $\mathbf{b}_{\parallel}, \hat{\mathbf{a}}$ 同向。于是, 由内积定义, 我们有

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| \cos 0 = |\mathbf{b}_{\parallel}| = |b_z \mathbf{e}_z| = |b_z| |\mathbf{e}_z| = |b_z| = b_z. \quad (1.11.13)$$

引理成立。

若 $b_z < 0$, 则 $\mathbf{b}_{\parallel}, \hat{\mathbf{a}}$ 反向。同样地, 由内积之定义, 得

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_{\parallel}| \cos \pi = -|\mathbf{b}_{\parallel}| = -|b_z \mathbf{e}_z| = -|b_z| |\mathbf{e}_z| = -|b_z| = b_z. \quad (1.11.14)$$

引理依然成立。 ■

从以上二引理, 我们得

引理1.11.3. 若 $\mathbf{a} \neq 0$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| b_z.$$

矢量的内积有如下四条重要的性质:

定理1.11.1. 对任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 以及任意实数 λ , 有

1. 非负性: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, 并且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$;
2. 对称性: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
3. 右线性之一: $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
4. 右线性之二: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

证明.

1. 由定义, 显然。
2. 由定义, 显然。
3. 若 $\mathbf{a} = 0$, 命题显然成立。若 $\mathbf{a} \neq 0$, 注意到

$$(\lambda \mathbf{b})_{\parallel} = (\lambda b_z) \mathbf{e}_z \quad (1.11.15)$$

我们有

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \lambda b_z = \lambda (|\mathbf{a}| b_z) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.11.16)$$

命题依然成立。

4. 若 $\mathbf{a} = 0$, 命题显然成立。若 $\mathbf{a} \neq 0$, 令

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y + c_z \mathbf{e}_z, \quad (1.11.17)$$

我们有

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})_{\parallel} = (b_z + c_z) \mathbf{e}_z. \quad (1.11.18)$$

于是,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| (b_z + c_z) = |\mathbf{a}| b_z + |\mathbf{a}| c_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (1.11.19)$$

命题依然成立。

■

由上述定理的后三点, 容易看出

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.11.20)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (1.11.21)$$

即内积也是左线性的。总之，内积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 关于它的两个变量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是线性的。

由是可知，我们有

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \cdot (\mu \mathbf{c} + \nu \mathbf{d}) = \alpha \mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \alpha \nu \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \beta \mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \beta \nu \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}. \quad (1.11.22)$$

物理上，关于内积的著名例子就是力所作的功。设某质点在力 $\mathbf{f}$ 作用下发生了直线位移 $\mathbf{s}$ ，则力 $\mathbf{f}$ 对该质点所作的功 w 为

$$w = \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}. \quad (1.11.23)$$

另一个常见的例子是质点的动能，

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.11.24)$$

其中， m 为质点的质量， $\mathbf{v}$ 为质点的速度。

在空间选取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。设矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) ，即，

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.11.25)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.11.26)$$

于是，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.11.27)$$

因此，只要知道基矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 之间的内积，

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.11.28)$$

就可以计算任何两个矢量的内积。通常称 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 为仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 的度量系数。因为 $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ ，所以 g_{ij} 关于两个下标是对称的，

$$g_{ji} = g_{ij}. \quad (1.11.29)$$

这表明，九个度量系数中只有六个是独立的。引用度量系数，两矢量的内积可表为如下形式，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} a_i b_j. \quad (1.11.30)$$

如果条件允许，系统可以取到直角坐标系，则度量系数可以化简。容易知道，在直角坐标系下

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.11.31)$$

其中, δ 是所谓的Kronecker符号,

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.11.32)$$

在直角坐标系下, 两矢量内积的形式最为简单,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.11.33)$$

于是, 矢量 $\mathbf{a}$ 的长度为,

$$|\mathbf{a}| = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (1.11.34)$$

两点 A, B 之间的距离为,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (1.11.35)$$

其中, (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 分别为点 A 和点 B 的直角坐标。

§1.12 内积空间*

上述内积概念可以推广至实线性空间和复线性空间, 形成所谓的内积空间。

§1.12.1 欧几里得空间

让我们先看实线性空间的情形。

定义1.12.1. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上一线性空间。如果在 V 上存在一个二元函数 f , 它对于 V 中任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以及任意实数 λ , 满足以下四条规则,

1. $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, 并且 $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{a} = 0$,
2. $f(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
3. $f(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + f(\mathbf{a}, \mathbf{c})$,
4. $f(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

则称 V 为关于 f 的实内积空间, 或欧几里得空间 (简称欧氏空间)。另外, 称函数 f 为 V 的内积, 通常将 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 简单地记作 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 。

例1.12.1. 在线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于矢量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

规定

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n,$$

则不难验证 $\mathbb{R}^n$ 是一欧氏空间。一般地, 人们仍用 $\mathbb{R}^n$ 来记此欧氏空间。

例1.12.2. 闭区间 $[0, 1]$ 上的全体实值连续函数形成实空间 $C[0, 1]$ 。对 $C[0, 1]$ 中的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，规定

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

则由积分的性质不难验证 $C[0, 1]$ 是一个欧氏空间。

由定义中的条件2、3、4，我们有

$$(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \lambda \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (1.12.1)$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = f(\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + f(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + f(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (1.12.2)$$

因此，内积关于两个变量都是线性的。

定义1.12.2. 在欧氏空间中，任意矢量 $\mathbf{a}$ 都有长度，记为 $|\mathbf{a}|$ ，其定义是

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

定理1.12.1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为欧氏空间的任意两个矢量，则有

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

所谓柯西不等式是也。

证明. 若 $\mathbf{a} = 0$ ，则定理显然成立。以下设 $\mathbf{a} \neq 0$ 。令

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.12.3)$$

由内积定义，有

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq 0. \quad (1.12.4)$$

于是，

$$(x\mathbf{a} + \mathbf{b}, x\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq 0, \quad (1.12.5)$$

也即，

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a})x^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})x + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \geq 0. \quad (1.12.6)$$

上式对任意的实数 x 均成立，特别地，取

$$x = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \quad (1.12.7)$$

得

$$(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0, \quad (1.12.8)$$

即

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}). \quad (1.12.9)$$

两边开方, 得

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \quad (1.12.10)$$

定理亦成立。 ■

由柯西不等式, 我们有

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1. \quad (1.12.11)$$

于是, 在欧氏空间里, 可以有夹角的概念:

定义1.12.3. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为欧氏空间中的两个非零矢量, 则其夹角 θ 规定为

$$\theta := \arccos \left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right).$$

上定义说明

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \quad (1.12.12)$$

它同上节的结果形式完全一样。夹角 θ 其实就是上式的解, 取主值罢了。

以上的讨论表明, 欧氏空间中矢量有长度和夹角的概念。长度和夹角通常称为度量性质, 这意味着欧氏空间是一种带度量的空间。

定义1.12.4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为欧氏空间中的任意两个矢量。如果

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

则称 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 正交或相互垂直, 记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 。

明显地, 零矢量与任意矢量垂直, 包括它自身, 而且零矢量还是唯一与自身相互垂直的矢量。两个非零矢量相互垂直的充分必要条件是它们的夹角为 $\pi/2$ 。

当 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 时, 我们有

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2. \quad (1.12.13)$$

即勾股定理在任意欧氏空间中都能成立。事实上,

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2. \quad (1.12.14)$$

定义1.12.5. 欧式空间中的一组非零矢量, 如果它们两两正交, 就称为一个正交矢量组。

通常约定, 由单个非零矢量构成的矢量组也是正交矢量组。

定理1.12.2. 正交矢量组都是线性无关的。

证明. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 是一正交矢量组。如果它们的线性组合等于零, 即,

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_m \mathbf{a}_m = 0, \quad (1.12.15)$$

则所有的组合系数皆为零。这是因为用 $\mathbf{a}_i$ 同上式两边作内积, 得

$$k_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.12.16)$$

由于 $\mathbf{a}_i \neq 0$, 因此, $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) > 0$ 。于是, 我们有

$$k_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.12.17)$$

■

在 n 维欧氏空间中, 如果一个正交矢量组成员总数为 m , 则必有 $m \leq n$ 。这是因为正交矢量组必为线性无关组, 如果 $m > n$, 那么在此空间中就存在一个成员数量大于维数的线性无关矢量组, 矛盾。在有限维线性空间中, 线性无关矢量组成员总数应该小于或等于空间的维数。又, 显然, $m = n$ 当且仅当正交矢量组是空间的一个基底。

于是, 我们有下面的定义:

定义1.12.6. 在 n 维欧氏空间中, 由 n 个矢量组成的正交矢量组称为**正交基**。进一步, 如果正交基的每个矢量都是归一的, 就称为**正交归一基**。

对正交基每一个成员进行归一化, 正交基就成为正交归一基。

设 V 是一个 n 维欧氏空间, 并且 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一个基底。又设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为 V 中的任意两个矢量。我们有

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n, \quad (1.12.18)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n \mathbf{e}_n. \quad (1.12.19)$$

于是,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} a_i b_j, \quad (1.12.20)$$

其中,

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (1.12.21)$$

量 g_{ij} 称为基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 的**度量系数**, 它是对称的,

$$g_{ji} = g_{ij}. \quad (1.12.22)$$

上面的讨论表明, 知道了一个基底的度量系数之后, 欧氏空间中任意两矢量的内积就清楚了, 因而度量系数完全决定了欧氏空间的内积。

如果基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 为正交归一基, 则

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.12.23)$$

于是,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (1.12.24)$$

因此, 正交归一基最利于内积的计算, 这是正交归一基的好处之一。

正交归一基的另一个好处是, 矢量的坐标可以很简单地用内积求出。设

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n. \quad (1.12.25)$$

用 $\mathbf{e}_i$ 对上式两边作内积, 得

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}) = v_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) + v_2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2) + \cdots + v_n(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) = v_i. \quad (1.12.26)$$

这就是说,

$$v_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{v}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.12.27)$$

正交归一基有如许的好处, 那么, 任意欧氏空间都存在正交归一基么? 回答是肯定的。

定理1.12.3. 从 n 维欧氏空间的任意一个基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ 出发, 我们都能找到一个正交归一基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 。

前已指出, 任何正交矢量组都能化为正交归一矢量组, 因此, 我们只须证明, 从 n 维欧氏空间的任意一个基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ 出发, 人们都能找到一个正交基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 即可。

证明. 首先, 取

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1. \quad (1.12.28)$$

其次, 取

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} \mathbf{a}_1. \quad (1.12.29)$$

于是,

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0. \quad (1.12.30)$$

即 $\mathbf{a}_2$ 与 $\mathbf{a}_1$ 正交。

再次, 取

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} \mathbf{a}_1 - \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3)}{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)} \mathbf{a}_2. \quad (1.12.31)$$

利用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 的正交性, 我们有

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = 0, \quad (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 0. \quad (1.12.32)$$

即 $\mathbf{a}_3$ 与 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 都正交。由是还知, 矢量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 两两正交。这样, 我们就从线性无关矢量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 找出了正交矢量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 。

从上述过程可以看出, 当 $n = 1, 2, 3$ 时, 定理成立。下面设 $n > 3$ 。

设我们已经从线性无关矢量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ 找出了正交矢量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$, 其中 $1 < i < n$ 。令

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{i+1})}{(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)} \mathbf{a}_k. \quad (1.12.33)$$

容易知道,

$$(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i+1}) = 0, \quad 1 \leq k \leq i. \quad (1.12.34)$$

这蕴含着 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}$ 是正交矢量组。于是, 我们从线性无关矢量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ 找出了正交矢量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}$ 。

由数学归纳法, 定理对 $n > 3$ 的情形亦成立。于是, 定理对任意 n 都成立。■

定理证明中所用的方法, 在文献中称为施密特 (Schmidt) 正交化过程。

以上是欧氏空间的一些基本性质, 除此之外, 欧氏空间还有很多很好的性质, 读者可以自行参考相关教程。

§1.12.2 酉空间

现在, 我们来看复线性空间的情形。

定义1.12.7. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上一线性空间。如果在 V 上存在一个二元函数 f , 它对于 V 中任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以及任意复数 λ , 满足以下四条规则,

1. $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, 并且 $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{a} = 0$,
2. $f(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overline{f(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$,
3. $f(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + f(\mathbf{a}, \mathbf{c})$,
4. $f(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

则称 V 为关于 f 的复内积空间, 或酉空间 (unitary space)。另外, 称函数 f 为 V 的内积, 通常将 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 简单地记作 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 。

例1.12.3. 在线性空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 对于矢量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

规定

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2 + \dots + \bar{a}_n b_n,$$

则不难验证 $\mathbb{C}^n$ 是一酉空间。

例1.12.4. 闭区间 $[0, 1]$ 上的全体连续复值函数¹形成一个复线性空间。对该空间中的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 如果规定

$$(f, g) = \int_0^1 \bar{f}(x) g(x) dx,$$

¹关于实变复值函数, 见第4章。

则它成为一个酉空间。

由定义中的条件2、3、4, 我们有

$$(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}, \lambda \mathbf{a})} = \overline{\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a})} = \bar{\lambda} \overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})} = \bar{\lambda} (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (1.12.35)$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \overline{f(\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b})} = \overline{f(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + f(\mathbf{c}, \mathbf{b})} = \overline{f(\mathbf{c}, \mathbf{a})} + \overline{f(\mathbf{c}, \mathbf{b})} = f(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + f(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (1.12.36)$$

因此, 内积关于两个变量不是双线性的 (bilinear), 而是一个半线性的 (sesquilinear): 关于第二个变量为线性, 关于第一个变量为复共轭, 或半线性。

在酉空间中, 因为 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, 所以仍可定义矢量的长度。

定义1.12.8. 在酉空间中, 任意矢量 $\mathbf{a}$ 都有长度, 记为 $|\mathbf{a}|$, 其定义是

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

定理1.12.4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为酉空间的任意两个矢量, 则有

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

这就是说柯西不等式在酉空间中仍成立。

证明. 若 $\mathbf{a} = 0$, 则定理显然成立。以下设 $\mathbf{a} \neq 0$ 。令

$$\mathbf{c} = z\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.12.37)$$

由内积定义, 有

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq 0. \quad (1.12.38)$$

于是,

$$(z\mathbf{a} + \mathbf{b}, z\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq 0, \quad (1.12.39)$$

也即,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a})\bar{z}z + (\mathbf{a}, \mathbf{b})z + \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}z + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \geq 0. \quad (1.12.40)$$

上式对任意的复数 z 均成立, 特别地, 取

$$z = -\frac{\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \quad (1.12.41)$$

得

$$(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - \frac{\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0, \quad (1.12.42)$$

即

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}). \quad (1.12.43)$$

两边开方, 得

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \quad (1.12.44)$$

定理亦成立。 ■

值得指出的是，酉空间的内积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 一般取复值，是故，矢量之间没有夹角概念，但仍可有正交性：

定义1.12.9. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为酉空间中的任意两个矢量。如果

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

则称 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 正交或相互垂直，记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 。

定义1.12.10. 酉空间中的一组非零矢量，如果它们两两正交，就称为一个正交矢量组。

容易证明，

定理1.12.5. 在酉空间中，正交矢量组都是线性无关的。

定义1.12.11. 在 n 维酉空间中，由 n 个矢量组成的正交矢量组称为正交基。进一步，如果正交基中的每个矢量都是归一的，就称为正交归一基。

最后，施密特 (Schmidt) 正交化过程对酉空间仍适用。

定理1.12.6. 从 n 维酉空间的任意一个基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ 出发，我们都能找到一个正交归一基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 。

从物理学观点看，酉空间比欧氏空间更为重要，特别是在《电动力学》以及《量子力学》之中。

§1.13 矢量的外积

定义1.13.1. 两个矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的外积，写作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ，仍是一个矢量，记为 $\mathbf{c}$ ，

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

其大小 (即模) 规定为

$$|\mathbf{c}| := |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta,$$

同内积一样，这里的 θ 是指 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间不大于 π 那个夹角。当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线时，外积的大小等于零，故外积为零矢，此时，外积无所谓方向。当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线时，外积的大小不等于零，故外积为非零矢量，外积的方向当然有意义。此时，人们约定：与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 同时垂直，并且使 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三者成右手系的空间方向为外积 $\mathbf{c}$ 的方向。换句话说，当右手四指从 $\mathbf{a}$ 弯向 $\mathbf{b}$ ，并且转角大于 0 而小于 π 时，拇指所指的方向就是外积 $\mathbf{c}$ 的方向，见图 1.13.13。外积也叫叉乘。

由于零矢量与任何矢量共线，因此，若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 有一为零矢时， $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ 。

如图 1.13.14 所示，几何上，外积的大小 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 恰好就是由矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所生成的平行四边形的面积。因之，利用矢量积，人们可以计算空间中任意平行四边形的面积，当然，也可以计算任意三角形的面积，它是相应平行四边形面积的一半。

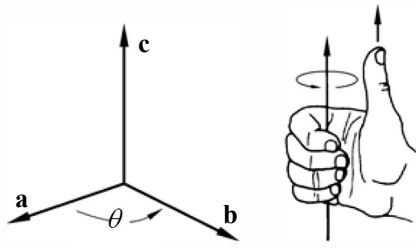


图 1.13.13. 右手螺旋定则

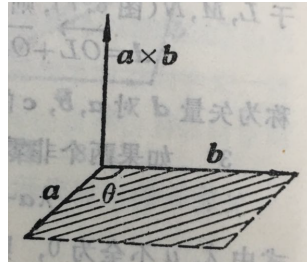


图 1.13.14. 右手螺旋定则

物理上，外积的简单实例就是质点所受的力矩 $\mathbf{M}$ 以及质点的角动量 $\mathbf{L}$ ，

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1.13.1)$$

其中， $\mathbf{r}$ 是质点的位矢， $\mathbf{f}$ 是质点所受的力， $\mathbf{p}$ 为质点的动量。

作为一个计算的例子，让我们来考察笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。由外积和笛卡尔坐标系的定义，不难得知，我们有

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad (1.13.2)$$

如图1.13.15所示。斯乃笛氏系殊胜之处，人常用焉。

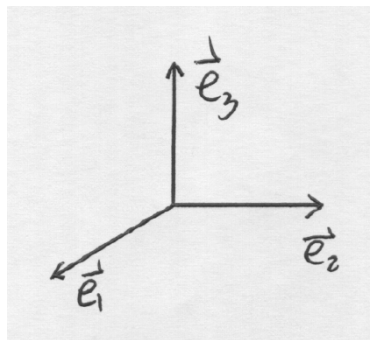


图 1.13.15. 笛卡尔基矢的外积

当 $\mathbf{a} \neq 0$ 时，如图1.11.12所示，作正交投影，容易看出

$$|\mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{b}| \sin \theta, \quad (1.13.3)$$

其中， $\mathbf{b}_\perp$ 为矢量 $\mathbf{b}$ 关于方向 $\hat{\mathbf{a}}$ 的外投影。

引理1.13.1. 若 $\mathbf{a} \neq 0$, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp)$.

证明. 若 $\mathbf{b} = 0$, 则引理显然成立。若 $\mathbf{b} \neq 0$, 则

$$|\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp| = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_\perp| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\mathbf{b}_\perp|. \quad (1.13.4)$$

因而,

$$||\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp)| = |\mathbf{a}| |\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}_\perp|. \quad (1.13.5)$$

又,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}_\perp|, \quad (1.13.6)$$

所以

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp)|. \quad (1.13.7)$$

即, 在引理中, 等式两边矢量大小相等。

至于方向, 由外积定义, 易知 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp$ 与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 一致, 见图1.13.16。因为乘以正实数不改变矢量方向, 所以矢量 $|\mathbf{a}| (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp)$ 必与矢量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 方向相同。

现在, 等号两边, 矢量大小相等, 方向相同, 因而等式成立。引理得证。 ■

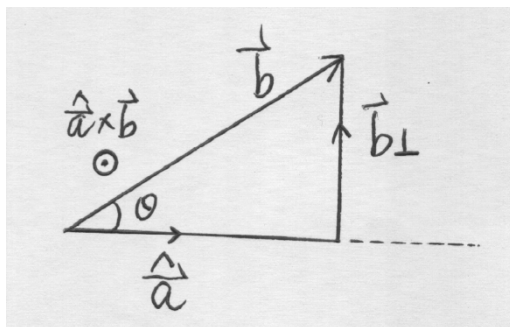


图 1.13.16. 外积 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}$

依照§1.10, 我们选一笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, 使得 $\mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{a}}$, 作分解

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z, \quad (1.13.8)$$

则

$$\mathbf{b}_\perp = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y. \quad (1.13.9)$$

这就是说, 当我们将矢量 $\mathbf{a}$ 的方向选为 z 轴之正向时, 矢量关于方向 $\hat{\mathbf{a}}$ 的外射影就变成了一个面矢 (xy 平面上的矢量)。现在, 让我们来考察 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp$ 。首先, 因为 $\hat{\mathbf{a}} \perp \mathbf{b}_\perp$, 所以

$$|\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp| = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{b}_\perp| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\mathbf{b}_\perp|. \quad (1.13.10)$$

这表明, 矢量 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp$ 与矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 大小相等, 或者说, 矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 经过 $\hat{\mathbf{a}}$ 的叉乘之后, 大小保持不变。下面讨论 $\mathbf{b}_\perp$ 经叉乘之后的方向: 按定义, 矢量 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp$ 既垂直于 $\hat{\mathbf{a}}$, 也垂直于 $\mathbf{b}_\perp$ 。因为垂直于 $\hat{\mathbf{a}}$, 所以它

一定位于 xy 平面之上, 即同矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 一样, 亦是一个面矢。又因为它垂直于 $\mathbf{b}_\perp$, 所以它在 xy 平面上与矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 成直角。如所周知, 平面上的夹角有两个方向: 逆时针方向与顺时针方向。按照叉乘的定义, 可以进一步判断, 此处直角必为逆时针方向, 也即, 矢量 $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp$ 在 xy 平面上与矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 逆时针成 90° 角。例如, 若取 $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{e}_x$, 或 $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{e}_y$, 则有

$$\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y, \quad \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x, \quad (1.13.11)$$

叉乘之后, 二者均与原矢量成逆时针 90° 角。总而言之, 矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 经过 $\hat{\mathbf{a}}$ 的叉乘之后, 大小保持不变, 方向则在 xy 平面上绕坐标原点沿逆时针方向旋转了 90° , 如图1.13.17所示。

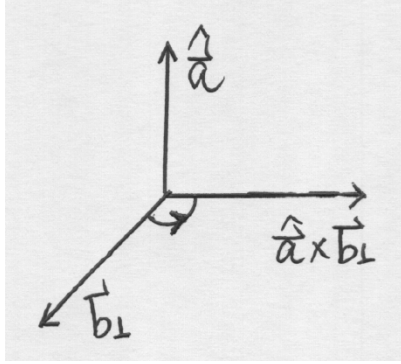


图 1.13.17. 矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 绕 $\hat{\mathbf{a}}$ 逆时针 90° 旋转

现在, 我们来计算矢量 $\mathbf{b}_\perp$ 在 xy 平面上绕坐标原点沿逆时针方向旋转了 $\pi/2$ 后的坐标。先考虑 $\mathbf{b}_\perp \neq 0$ 的情形。令

$$\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp = \xi \mathbf{e}_x + \zeta \mathbf{e}_y, \quad (1.13.12)$$

则显然有

$$\xi \mathbf{e}_x + \zeta \mathbf{e}_y \neq 0, \quad (1.13.13)$$

即二坐标, ξ, ζ , 不同时为零。因为

$$(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp) \perp \mathbf{b}_\perp, \quad (1.13.14)$$

所以

$$(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp) \cdot \mathbf{b}_\perp = 0. \quad (1.13.15)$$

这意味着

$$\xi b_x + \zeta b_y = 0, \quad (1.13.16)$$

或

$$\frac{\xi}{b_y} = -\frac{\zeta}{b_x}. \quad (1.13.17)$$

令此公比为 t , 则有

$$\xi = t b_y, \quad \zeta = -t b_x. \quad (1.13.18)$$

由于叉乘之后，矢量的长度保持不变，

$$|\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{b}_\perp|, \quad (1.13.19)$$

因此，

$$\xi^2 + \zeta^2 = b_x^2 + b_y^2. \quad (1.13.20)$$

由是易知，

$$t^2 = 1, \quad (1.13.21)$$

或

$$t = \pm 1. \quad (1.13.22)$$

注意到 xy 平面有四象限，分象限讨论易知： $t = 1$ 代表顺时针旋转； $t = -1$ 代表逆时针旋转。于是，若 $\mathbf{b}_\perp \neq 0$ ，我们便有

$$\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp = \hat{\mathbf{a}} \times (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y) = -b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y. \quad (1.13.23)$$

这个结果，对于 $\mathbf{b}_\perp = 0$ 的情形，自然成立。这样，我们得

引理1.13.2. 如果 $\mathbf{a} \neq 0$ ，则

$$\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_\perp = \hat{\mathbf{a}} \times (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y) = -b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y.$$

利用复数方面的知识，我们还可以更简捷地得到上述结论。为此，我们将 xy 平面看作复 z 平面，并将平面矢量与复数一一对应起来，即

$$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \rightleftharpoons x + yi. \quad (1.13.24)$$

利用复数的指数表示，

$$z = re^{i\theta}, \quad (1.13.25)$$

其中， r 和 θ 分别为模与辐角，容易知道，

$$e^{i\varphi} z = re^{i(\theta+\varphi)}. \quad (1.13.26)$$

可见，一个复数经过与 $e^{i\varphi}$ 的乘法以后，模保持不变，而辐角却增加了 φ 。换成平面矢量的语言，这就是说，一个平面矢量经过如是 $e^{i\varphi}$ 的乘法之后，大小保持不变，但方向却在 xy 平面上绕坐标原点沿逆时针方向旋转了角度 φ 。现在，取 $\varphi = \pi/2$ ，则有

$$e^{i\pi/2} = i. \quad (1.13.27)$$

因此，如果用虚单位 i 乘以平面矢量，就能让后者作保长逆时针 $\pi/2$ 之旋转。由于

$$iz = i(x + yi) = -y + ix, \quad (1.13.28)$$

因此, 经过保长逆时针 $\pi/2$ 旋转之后,

$$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \rightarrow -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y. \quad (1.13.29)$$

这样, 我们便有

$$b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y \rightarrow -b_y\mathbf{e}_x + b_x\mathbf{e}_y. \quad (1.13.30)$$

引理1.13.2得证。

由上述二引理, 我们得

引理1.13.3. 如果 $\mathbf{a} \neq 0$, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|(-b_y\mathbf{e}_x + b_x\mathbf{e}_y).$$

矢量外积有三条重要的性质:

定理1.13.1. 对任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 以及任意实数 λ , 有

1. 反交换律: $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。
2. 右线性之一: $\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 。
3. 右线性之二: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ 。

证明.

1. 由矢量外积之定义, 命题显然成立。
2. 若 $\mathbf{a} = 0$, 命题显然成立。下面考虑 $\mathbf{a} \neq 0$ 的情形。由定理1.10.2, 有

$$(\lambda\mathbf{b})_{\perp} = \lambda(\mathbf{b})_{\perp} = (\lambda b_x)\mathbf{e}_x + (\lambda b_y)\mathbf{e}_y. \quad (1.13.31)$$

于是,

$$\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|[-(\lambda b_y)\mathbf{e}_x + (\lambda b_x)\mathbf{e}_y] = \lambda|\mathbf{a}|(-b_y\mathbf{e}_x + b_x\mathbf{e}_y) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.13.32)$$

命题依然成立。

3. 若 $\mathbf{a} = 0$, 命题显然成立。现在考虑 $\mathbf{a} \neq 0$ 的情形。由定理1.10.2, 有

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})_{\perp} = \mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{c}_{\perp} = (b_x + c_x)\mathbf{e}_x + (b_y + c_y)\mathbf{e}_y. \quad (1.13.33)$$

因之,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= |\mathbf{a}|[-(b_y + c_y)\mathbf{e}_x + (b_x + c_x)\mathbf{e}_y] \\ &= |\mathbf{a}|(-b_y\mathbf{e}_x + b_x\mathbf{e}_y) + |\mathbf{a}|(-c_y\mathbf{e}_x + c_x\mathbf{e}_y) \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.13.34)$$

命题依然成立。



上述定理的第一条通常称之为**反交换律**。第二、第三两条表明，两矢量的外积对第二个变量是线性的（右线性）。利用反交换律，可以证明，两矢量的外积对第一个变量也是线性的（左线性）：

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times (\lambda \mathbf{a}) = -\lambda(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.13.35)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -(\mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{c} \times \mathbf{a} - \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.13.36)$$

由此可知，我们有

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times (\mu \mathbf{c} + \nu \mathbf{d}) = \alpha \mu \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \alpha \nu \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \beta \mu \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \beta \nu \mathbf{b} \times \mathbf{d}. \quad (1.13.37)$$

下面讨论如何利用坐标来计算矢量的外积。先取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。设矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 有表示，

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.13.38)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.13.39)$$

于是，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (1.13.40)$$

由此可见，欲求两矢量的外积，须先知晓基矢之间的外积。

前已指出，笛卡尔坐标系的基矢之间有最简单的外积，因此，利用笛卡尔坐标系求外积最为简单。人们习惯上将笛卡尔坐标系的三个坐标矢量记为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ，这样，我们有

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad (\text{正交性}) \quad (1.13.41)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad (\text{归一性}) \quad (1.13.42)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \quad (\text{右手性}) \quad (1.13.43)$$

于是，在笛卡尔坐标系下，便有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \quad (1.13.44)$$

通常，还利用行列式按行或按列展开的性质，将上式简记为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.13.45)$$

矢量的外积仍是矢量，因此，它还可以继续与矢量外积，也就是说，矢量可连续叉乘。这是外积与内积不同的地方，内积的结果为实数，因而没有连续运算。下面，我们就会发现，不同于普通数（实

数或复数), 矢量的外积没有结合律, 它是一种**非结合代数**。这是我们接触到的第一个非结合代数, 它是矢量叉乘的最重要特征。

定理1.13.2. 对于任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 有

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

定理中的公式称为**二重外积公式**, 很常用。

在给出证明之前, 我们愿意指出, 在取定坐标系之后, 矢量与坐标是一一对应的, 因此, 两个矢量相等, 它们的坐标必相等, 反之亦然, 两矢量的坐标相等, 则它们本身必相等。这样, 为证明两矢量相等, 人们只要取一个方便的坐标系, 并证两者的坐标相等就可以了。这是一种矢量代数中常用的办法。注意: 矢量本身与坐标无关, 但利用坐标却可以证明矢量等式。这是坐标法的妙用之一。

证明. 取一个笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \}$, 设

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad (1.13.46)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad (1.13.47)$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}. \quad (1.13.48)$$

又设

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}, \quad (1.13.49)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad (1.13.50)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}, \quad (1.13.51)$$

利用行列式表示, 易得

$$d_1 = b_2c_3 - b_3c_2, \quad (1.13.52)$$

$$d_2 = b_3c_1 - b_1c_3, \quad (1.13.53)$$

$$d_3 = b_1c_2 - b_2c_1, \quad (1.13.54)$$

以及

$$x_1 = a_2d_3 - a_3d_2, \quad (1.13.55)$$

$$x_2 = a_3d_1 - a_1d_3, \quad (1.13.56)$$

$$x_3 = a_1d_2 - a_2d_1, \quad (1.13.57)$$

于是,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= b_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - a_1c_1) - c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_1b_1) \\ &= b_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (1.13.58)$$

又, 显然,

$$y_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1. \quad (1.13.59)$$

因此,

$$x_1 = y_1. \quad (1.13.60)$$

同理可证

$$x_2 = y_2, \quad (1.13.61)$$

$$x_3 = y_3. \quad (1.13.62)$$

等式成立。 ■

利用外积的反交换律, 有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (1.13.63)$$

于是,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \neq 0, \quad (1.13.64)$$

也即, 在一般情况下,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (1.13.65)$$

换句话说, 对矢量的外积而言, 结合律不成立。总之, 同普通的数相比, 外积既不满足交换律, 也不满足结合律。

最后, 利用二重外积公式, 不难证明所谓的Jacobi恒等式,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0. \quad (1.13.66)$$

§1.14 矢量的混合积

定义1.14.1. 所谓矢量的混合积, 是指先作两个矢量的外积, 然后再与第三个矢量作内积, 所以混合积是一个数量 (或标量)。一般将三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积记为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

由于它是外积与内积的混合运算, 所以叫做混合积。

很明显, 三矢量的混合积等于零当且仅当它们共面。当三矢量不共面时, 其混合积不等于零。此时, 以三矢量为棱可以生成一个平行六面体, 混合积的绝对值恰好就等于这个平行六面体的体积。这是容易理解的: 如图1.14.18所示, 将三矢量记为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 令

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.14.1)$$

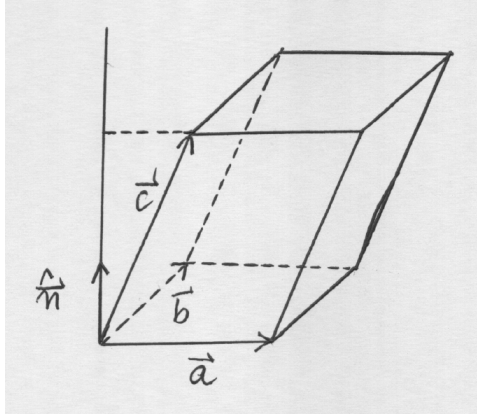


图 1.14.18. 平行六面体的体积

其中 $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所生成的平行四边形的面积, 这个平行四边形也是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 所生成的平行六面体的底面, 因此, S 也就是平行六面体的底面积; 其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为单位矢量, 是矢量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的归一化, 它垂直于平行六面体的底面。由是可知, $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}|$ 恰好是平行六面体的高 h 。于是,

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |(S\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{c}| = S|\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}| = Sh, \quad (1.14.2)$$

正好是平行六面体的体积。因此, 混合积不但能够用于判断三个矢量是否共面, 而且也能够用于计算平行六面体的体积。

混合积的一个重要性质, 是可以判断三个不共面矢量的手性。利用几何直观, 易证

定理1.14.1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是三个不共面矢量。如果混合积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$, 那么, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 或 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$, 或 $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 按顺序都成右手系; 如果混合积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$, 那么, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 或 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$, 或 $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 按顺序都成左手系。

现在, 取一个笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, 设

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad (1.14.3)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad (1.14.4)$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}. \quad (1.14.5)$$

那么,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \quad (1.14.6)$$

于是,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3. \quad (1.14.7)$$

上式右边恰好是三矢量坐标行列式的值, 我们有

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1.14.8)$$

利用混合积的行列式表示, 易证:

1. 交换混合积的任意两个因子，混合积变号。特别地，若有两个因子相等，则混合积为零。
2. 三因子作循环代换，混合积不变。

也就是说，若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为任意三矢量，则

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$.
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

由此不难得知，如果三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 按顺序成右手系，那么，交换其中任意两者，右手系变左手系。反之亦然，左手系必变右手系。总之，交换三矢量中的任意两个矢量，三矢量的手性必随之改变。

最后，我们来证明所谓的Lagrange恒等式，

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}. \quad (1.14.9)$$

证明。 首先，利用混合积的循环性质，有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d}. \quad (1.14.10)$$

其次，引用二重外积的结果，有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (1.14.11)$$

于是，

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}] \cdot \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14.12)$$

■

§1.15 空间的定向

大家知道，直线有两个定向：向左和向右。可以任选其中一个作为**标准定向**，或**正定向**，另一个就是**反定向**。习惯上选向右为标准定向，于是，向左就成为反定向。定向将直线上仿射标架或仿射坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 分为两类：如果基矢 $\mathbf{e}$ 的方向与直线的标准定向一致，例如朝右，则称坐标系是正定向的；反之，若基矢 $\mathbf{e}$ 的方向与直线的标准定向相反，例如朝左，那么，就称坐标系是反定向的。由此可见，直线的定向与坐标系的定向是一一对应的。因此，人们也可以用坐标系的定向来定义直线的定向，而且，从几何测量与物理测量的观点看，坐标系就是参照系，这样的定义方式更为自然。以下，我们就采用这样的观点。假设坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 被选为标准定向。那么，任一坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'\}$ 的定向都可以用 $\mathbf{e}'$ 关于标准坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 的坐标来判定。设

$$\mathbf{e}' = \mu \mathbf{e}. \quad (1.15.1)$$

如果 $\mu > 0$, 则坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'\}$ 与标准坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 定向相同。反之, 如果 $\mu < 0$, 则坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'\}$ 与标准坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 定向相反。可见, μ 的符号决定了标架 $\{O'; \mathbf{e}'\}$ 的定向: 正号, 定向相同; 负号, 定向相反。

给定坐标系的定向之后, 直线上的有向线段也可以获得定向: 有向线段的方向与标准定向相同的, 称为正定向; 与标准定向相反的, 称为反定向。有向线段的定向也可以由它在标准坐标系下坐标的符号来判定: 正号, 定向相同; 负号, 定向相反。进一步, 如果作为定向标准之坐标系 $\{O; \mathbf{e}\}$ 的基矢 $\mathbf{e}$ 是单位矢量, 那么, 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标 λ ,

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{e}, \quad (1.15.2)$$

就称之为该有向线段的**定向长度**, 它可正可负。

对直线而言, 以上这些定义既直观又自然。下面将讨论的平面与空间, 则逐渐抽象。

对于平面, 它有两侧, 人们可以任选其一作为正面, 另外一侧就是反面。这就是平面的日常定向, 不过它过于直观了些。代替两侧, 我们可以用平面的法线来给平面定向。首先, 法线是直线, 它可以有两个定向。其次, 将指向正面的那个法线方向定义为法线的正定向。这样, 法线的两个方向就与平面的两个面建立了一一对应。利用这个一一对应, 我们可以反过来用法线来给平面定向: 先任取一个方向作为法线的正定向, 然后将法线的正定向规定为平面的正定向。因为平面的所有法线都是相互平行的, 因此, 这样的规定与所选法线无关。虽然利用法线定向比用侧面定向更好, 但还不是最好的。前面说过, 从几何测量与物理测量的观点看, 用坐标系来定义定向是最为合理的。在直线的情形, 坐标系只有一个基矢, 定向直接而自然。在平面情形下, 坐标系有两个基矢, 定向就没有那么直接了, 人们必须使用外积, 这样才能将两个基矢与法线的方向联系起来, 从而给出平面的定向。具体来说, 取一平面坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, 设

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}. \quad (1.15.3)$$

因为 $\mathbf{n}$ 既垂直于 $\mathbf{e}_1$, 也垂直于 $\mathbf{e}_2$, 所以 $\mathbf{n}$ 垂直平面, 即它与法线平行。基于这一点, 我们可以用法线的定向规定坐标系的定向: 如果 $\mathbf{n}$ 与法线的定向一致, 就规定坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 是正定向的, 反之, 就规定坐标系是反定向的。这是从法线的定向诱导坐标系的定向, 逆向诱导明显也是可行的。于是, 我们就用坐标系定义平面定向如下: 任选一个平面坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 作为标准, 规定 $\mathbf{n}$ 的方向就是平面的正方向。对任意的其它坐标系, 例如 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, 如果 $\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ 的方向与 $\mathbf{n}$ 相同, 那么, 它就是正定向的; 如果 $\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ 的方向与 $\mathbf{n}$ 相反, 那么, 它就是反定向的。又, 设

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 a_{11} + \mathbf{e}_2 a_{21}, \quad (1.15.4)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 a_{12} + \mathbf{e}_2 a_{22}, \quad (1.15.5)$$

于是,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 &= (\mathbf{e}_1 a_{11} + \mathbf{e}_2 a_{21}) \times (\mathbf{e}_1 a_{12} + \mathbf{e}_2 a_{22}) \\ &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 a_{11} a_{22} + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{1.15.6}$$

这就是说,

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2}{|\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2|} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \frac{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2|} \mathbf{n}. \tag{1.15.7}$$

由此可见, 坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ 的定向完全由基矢坐标的行列式决定, 若行列式大于零, 它为正向; 若行列式小于零, 则为反定向。总之, 平面上的坐标系分为两类, 一类是正定向的, 另一类是反定向的。实用上, 一般取逆时针坐标系为标准坐标系, 即取其为正定向的。

同线段可以赋予方向一样, 平行四边形也可赋予方向。延平行四边形行走, 有两种环绕方向: 顺时针与逆时针。可以任选一个作为平行四边形的正向, 通常选逆时针环绕方向。如果在平行四边形的相邻两边上各取一个非零矢量, 例如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 那么, 按外积的定义, 在作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 时, 右手四指的弯曲方向, 或与平行四边形的逆时针环绕方向一致, 或与平行四边形的顺时针环绕方向一致。因此, 如果将平行四边形视作由两个不共线矢量生成的, 例如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 那么, 人们就可以用这两个矢量的叉乘, 例如 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 来规定平行四边形的正向。在定向平面上, 还可以定义定向平行四边形的定向面积。设平面的定向由坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 给定。考虑由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 生成的有向平行四边形。设

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \tag{1.15.8}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2, \tag{1.15.9}$$

于是

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| \mathbf{n} = S\mathbf{n}, \tag{1.15.10}$$

其中, S 就称为有向平行四边形的定向面积, 可正可负。当平行四边形的定向为正时, 其定向面积为正; 当平行四边形的定向为负时, 其定向面积为负。

由上可见, 直线、平面的定向就是坐标系的定向。空间的定向也是一样的, 它就是坐标系的定向。空间有两种坐标系: 右手坐标系与左手坐标系, 通常取右手坐标系作为标准定向, 于是, 左手坐标系当然就是反定向的。

设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为空间的某一坐标系。容易看出, 若它是正定向的 (右手系), 则矢量 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_3$ 的夹角将小于 $\pi/2$, 于是,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0. \tag{1.15.11}$$

反之, 若该坐标系是反定向的 (左手系), 则矢量 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_3$ 的夹角将大于 $\pi/2$, 于是,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 < 0. \tag{1.15.12}$$

由是可知, 坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是正定向的, 当且仅当

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0. \tag{1.15.13}$$

坐标系 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是反定向的, 当且仅当

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) < 0. \quad (1.15.14)$$

这说明, 坐标系的定向完全由基矢的混合积的符号决定: 当混合积为正时, 坐标系为正定向; 当混合积为负时, 坐标系为反定向。

现在, 设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为标准定向系——右手坐标系。又设 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 为任一坐标系,

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 a_{11} + \mathbf{e}_2 a_{21} + \mathbf{e}_3 a_{31}, \quad (1.15.15)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 a_{12} + \mathbf{e}_2 a_{22} + \mathbf{e}_3 a_{32}, \quad (1.15.16)$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 a_{13} + \mathbf{e}_2 a_{23} + \mathbf{e}_3 a_{33}, \quad (1.15.17)$$

那么,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) &= (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 \\ &= [(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1] \cdot [a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3] \\ &= [(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})a_{33} + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})a_{13} \\ &\quad + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})a_{23}](\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.15.18)$$

注意到

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0, \quad (1.15.19)$$

由前面的讨论可知, 当坐标行列式大于零时, 坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 为正定向; 当坐标行列式小于零时, 坐标系 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 为反定向。这就是说, 任一坐标系的定向均可由基底的坐标行列式确定, 同平面情形一样。

由三个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 生成的平行六面体可以赋予方向, 若按次序 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是右手系, 则称平行六面体的方向为正, 反之, 若按次序 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是左手系, 则称平行六面体的方向为负。在定向空间中, 有向平行六面体有定向体积。设

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad (1.15.20)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3, \quad (1.15.21)$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3, \quad (1.15.22)$$

那么,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} |(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3| \\
 &= V.
 \end{aligned} \tag{1.15.23}$$

此即由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 生成的有向平行六面体的定向体积, 它可正可负。当平行六面体的定向为正时, 其定向体积为正; 当平行六面体的定向为负时, 其定向体积为负。

总而言之, 直线、平面、空间的仿射坐标系都有两种定向, 规定其中一种为正定向, 另外一种就是反定向。推广到更高维度的实空间, 它也是成立的。另外, 明显地, 上面所讲的有向线段的定向长度、有向平行四边形的定向面积、有向平行六面体的定向体积, 都可以推广到作为Riemann分割的微元之上, 从而使得积分带有定向。简言之, 定向与积分有关, Riemann积分本质上是一种定向积分, 改变定向, 积分将改变符号。² 在电磁学中, Gauss定理、Ampère环路定理都离不开定向积分, 因此, 定向在分析学、几何学和物理学中都是基本而重要的。

§1.16 外积与外代数*

大家知道, 由未定元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 在实数域上可以生成 n 元多项式如下,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \quad a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}, \tag{1.16.1}$$

其中, N 大于或等于所有未定元的最大幂次。如果某个未定元, 例如 x_1 , 的实际最大幂次 m 小于 N , 只须让 x_1 幂次大于 m 的项的系数为零即可。这样, 我们可以整齐求和上限, 以便于使用。在这些多项式之间可以定义两种运算——加法与乘法:

加法

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N b_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
 &= \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N (a_{i_1, i_2, \dots, i_n} + b_{i_1, i_2, \dots, i_n}) x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.
 \end{aligned} \tag{1.16.2}$$

乘法

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \right) \left(\sum_{j_1=0}^M \sum_{j_2=0}^M \cdots \sum_{j_n=0}^M b_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \right) \\
 &= \sum_{k_1=0}^{M+N} \sum_{k_2=0}^{M+N} \cdots \sum_{k_n=0}^{M+N} c_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},
 \end{aligned} \tag{1.16.3}$$

²也有积分, 譬如, Lebesgue积分, 与定向无关。当然, 它的分割方式与Riemann积分不同。

其中,

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \sum_{i_1+j_1=k_1} \sum_{i_2+j_2=k_2} \cdots \sum_{i_n+j_n=k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} b_{j_1, j_2, \dots, j_n}. \quad (1.16.4)$$

如所周知, 上述两种运算, 加法和乘法, 满足很多的运算律, 例如, 加法满足交换律与结合律, 乘法满足交换律与结合律, 乘法对加法满足分配率, 等等。其中, 值得特别指出的是, 未定元之间满足乘法的交换律,

$$x_i x_j = x_j x_i. \quad (1.16.5)$$

现在, 保持以上所述各种运算律不变, 但未定元之间乘法的交换律除外, 并将该交换律改为如下反交换律,

$$x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i, \quad (1.16.6)$$

我们就得到所谓的外代数或 **Grassmann 代数**。为区别起见, 这里特别地将这种反交换乘法, 也就是所谓的外积, 记为 $\wedge$ 。

于此可见, 矢量的叉乘几乎就是一个外代数, 只可惜它不满足结合律, 而外代数是满足结合律的, 是 **结合代数**。

Grassmann 代数与普通代数有很大的差别。首先, 由于

$$x_i \wedge x_i = -x_i \wedge x_i, \quad (1.16.7)$$

因此,

$$x_i \wedge x_i = 0. \quad (1.16.8)$$

进一步, 容易知道,

$$\overbrace{x_i \wedge \cdots \wedge x_i}^n = 0, \quad 1 < n \in \mathbb{Z}. \quad (1.16.9)$$

例如,

$$x_1 \wedge x_3 \wedge x_1 = -x_1 \wedge x_1 \wedge x_3 = 0, \quad (1.16.10)$$

$$x_1 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_5 = -x_1 \wedge x_3 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_5 = x_1 \wedge x_1 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_5 = 0, \quad (1.16.11)$$

$$x_1 \wedge x_5 \wedge x_1 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 = -x_1 \wedge x_1 \wedge x_5 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 = 0. \quad (1.16.12)$$

由是可知, 在每一个外单项式中, 任意一个未定元出现的次数如果大于一, 则该外单项式必等于零。这意味着, 外多项式的形式相当简单。一般地, 它可以写为如下形式,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}, \quad a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}. \quad (1.16.13)$$

这蕴含着, 由 n 个未定元生成的外多项式只含有 2^n 个单项式。例如, 由一个未定元 x 生成的外多项式只含有两个单项式,

$$f(x) = ax^0 + bx^1 = a + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.16.14)$$

由两个未定元 x, y 生成的外多项式只含有四个单项式,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^0 \wedge y^0 + bx^1 \wedge y^0 + cx^0 \wedge y^1 + dx^1 \wedge y^1 \\ &= a + bx + cy + dx \wedge y, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.16.15)$$

由三个未定元 x, y, z 生成的外多项式只含有八个单项式,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a + bx + cy + dz + ex \wedge y + fy \wedge z + gx \wedge z \\ &\quad + hx \wedge y \wedge z, \quad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.16.16)$$

现在, 我们来考察外多项式的加法与乘法。令

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 b_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}, \quad b_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}. \quad (1.16.17)$$

我们有

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 (a_{i_1, i_2, \dots, i_n} + b_{i_1, i_2, \dots, i_n}) x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}. \end{aligned} \quad (1.16.18)$$

也就是说, 两个外多项式相加, 只须对单项式逐项分别相加即可。例如,

$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z + e_1x \wedge y + f_1y \wedge z + g_1x \wedge z + h_1x \wedge y \wedge z) \\ &+ (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z + e_2x \wedge y + f_2y \wedge z + g_2x \wedge z + h_2x \wedge y \wedge z) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)y + (d_1 + d_2)z \\ &\quad + (e_1 + e_2)x \wedge y + (f_1 + f_2)y \wedge z + (g_1 + g_2)x \wedge z + (h_1 + h_2)x \wedge y \wedge z. \end{aligned} \quad (1.16.19)$$

外多项式的乘法较加法稍微复杂。首先, 由分配律, 我们得

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \left(\sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n} \right) \\ &\quad \wedge \left(\sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_n=0}^1 b_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} \wedge x_2^{j_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{j_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_n=0}^1 a_{i_1, i_2, \dots, i_n} b_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\ &\quad x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n} \wedge x_1^{j_1} \wedge x_2^{j_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{j_n}. \end{aligned} \quad (1.16.20)$$

其次, 使用反交换律, 对单项式进行整理,

$$\begin{aligned} &x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n} \wedge x_1^{j_1} \wedge x_2^{j_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{j_n} \\ &= \pm x_1^{i_1} \wedge x_1^{j_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge x_2^{j_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n} \wedge x_n^{j_n}. \end{aligned} \quad (1.16.21)$$

最后, 对一些同类项进行合并, 即可得到外多项式乘法的结果。例如,

$$(a + bx) \wedge (c + dx) = ac + adx + bcx + bdx \wedge x = ac + (ad + bc)x. \quad (1.16.22)$$

又如,

$$\begin{aligned} & (a + bx + cy + dx \wedge y) \wedge (e + fx + gy + hx \wedge y) \\ = & ae + afx + agy + ahx \wedge y + bex + bfx \wedge x + bgx \wedge y + bhx \wedge x \wedge y \\ & + cey + cfy \wedge x + cgy \wedge y + chy \wedge x \wedge y \\ & + dex \wedge y + dfx \wedge y \wedge x + dgx \wedge y \wedge y + dhx \wedge y \wedge x \wedge y \\ = & ae + afx + agy + ahx \wedge y + bex + bgx \wedge y \\ & + cey - cfx \wedge y + dex \wedge y \\ = & ae + (af + be)x + (ag + ce)y + (ah + bg - cf + de)x \wedge y. \end{aligned} \quad (1.16.23)$$

以上是外代数的基本理论, 外代数在数学和物理中有广泛的应用, 但目前我们只能讨论一个简单的结果。为此, 我们将未定元组取为实线性空间 V 中的一个基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 。这样, 我们可以有外多项式

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (1.16.24)$$

设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是空间 V 的另一个基底。将这些基矢对前一基底展开, 有

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.16.25)$$

现在, 让我们来考虑外多项式

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n. \quad (1.16.26)$$

将上述展开代入, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n t_{j_1 1} t_{j_2 2} \dots t_{j_n n} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_n} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) t_{j_1 1} t_{j_2 2} \dots t_{j_n n} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n, \end{aligned} \quad (1.16.27)$$

其中, σ 是一个置换,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \quad (1.16.28)$$

P_n 则是全部这样的置换, 共有 $n!$ 个。利用行列式的定义, 得

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \Delta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n, \quad (1.16.29)$$

其中,

$$\Delta = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) t_{j_1 1} t_{j_2 2} \dots t_{j_n n} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.16.30)$$

由是, 我们有定义:

定义1.16.1. 当 $\Delta > 0$ 时, 两个基底, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, 称为定向相同, 否则, 称为定向相反。定向相同的基底构成一类, 称为实矢量空间的一个定向 (*Orientation*)。于是, 一个实矢量空间有两个定向, 彼此相反。当指定了其中的一个作为空间的正定向之后, 我们便称此空间为已定向的 (*Orientated*)。

从定义可以看出, 一个基底的定向是与其中基矢的排列顺序有关的, 当改变顺序, 使得排列的奇偶性发生改变时, 基底的定向也就发生了改变, 特别是, 将两个基矢对换, 则定向一定改变。

在直线上, 两个定向, 一个对应于方向朝右, 一个对应于方向朝左, 通常取方向朝右对应的定向为直线的正定向。在平面上, 两个定向, 一个对应于逆时针方向, 一个对应于顺时针方向, 通常取逆时针方向对应的定向为平面的正定向。在空间, 两个定向, 一个对应于右手系, 一个对应于左手系, 通常取右手系对应的定向为空间的正定向。可见, 利用外代数, 可以用统一的方式给空间定向, 而不必象上节那样, 对不同维数的空间采用不同的方法。这种定向方法对研究有向曲线和有向曲面上的积分尤为重要, 见第??章。

最后, 我们指出, 上述外代数是定义在实数域上的, 将实数域改为复数域也是可以的, 复数域上的外代数在物理学中极为重要, 量子场论和量子统计都离不开它。

第2章 矢量函数

大体来说,物理中涉及的矢量分析主要有两种:一种是以时间为变量的矢量函数,例如,质点的位移;另一种是以时间和空间为变量的矢量函数,例如,电场强度。通常,前者简称**矢量函数**,后者则称为**矢量场**。另外,单个实变量的复值函数,本书称为**实变复值函数**,是一种平面矢量函数,但有它的特殊性,由于它在物理上有广泛的应用,因此,我们将于第4章作专门的讨论。本章是关于矢量函数的分析,有关矢量场的问题,我们将在本书的最后一章给以初步的介绍。

§2.1 矢量函数

定义2.1.1. 设 $[a, b]$ 为实数区间。如果对区间中的每一点 t , 有唯一的矢量 $\mathbf{f}$ 与之对应, 则称矢量 $\mathbf{f}$ 为变量 t 的**矢量函数**, 记作

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t).$$

在笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 下, 上述矢量函数也可表为

$$\mathbf{f} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad (2.1.1)$$

其中, 分量 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 是三个普通的一元实函数。

有关矢量函数, 最有名的例子莫过于运动质点的位矢 $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (2.1.2)$$

其中, 变量 t 为时间。随着时间的推移, 质点在空间中描出一条曲线, 称为轨迹。在笛卡尔坐标系下, 上式可以写为

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (2.1.3)$$

其中, x, y, z 是质点的笛卡尔坐标。这个例子将为矢量分析提供很多直观。

定义2.1.2. 一个矢量 $\mathbf{f}$, 如果它永远固定不变, 就称之为**常矢量**。

§2.2 矢量函数的极限与连续性

定义2.2.1. 设 $\mathbf{f}(t)$ 是已给矢量函数, 它在 $t = t_0$ 附近有值, 但在 t_0 点可能无值。又设 $\mathbf{a}$ 为一个常矢量。若对任意给定的正实数 $\varepsilon > 0$, 都存在一个正实数 $\delta > 0$, 使得当 $|t - t_0| < \delta$ 时,

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$$

成立, 则称 $\mathbf{a}$ 为矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 当 $t \rightarrow t_0$ 时的极限。记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}.$$

任取一笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 。设

$$\mathbf{f} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad (2.2.2)$$

则

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2}. \quad (2.2.3)$$

于是,

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2} < \varepsilon. \quad (2.2.4)$$

又, 按定义, 明显地有,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| = 0. \quad (2.2.5)$$

因此,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2} = 0. \quad (2.2.6)$$

然而,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow t_0} |f_1(t) - a_1| = 0, \lim_{t \rightarrow t_0} |f_2(t) - a_2| = 0, \lim_{t \rightarrow t_0} |f_3(t) - a_3| = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = a_3, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = a_3. \quad (2.2.8)$$

由此可见,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)\mathbf{k}, \quad (2.2.9)$$

也即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}] = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)\mathbf{k}. \quad (2.2.10)$$

上式表明, 在笛卡尔坐标系下, 对矢量函数求极限等于对各分量函数求极限。

定义2.2.2. 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0),$$

则称矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续。

定义表明, 矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续, 等价于它的三个分量函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 同时都在 $t = t_0$ 处连续,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = f_1(t_0), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = f_2(t_0), \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = f_3(t_0). \quad (2.2.11)$$

定理2.2.1. 若实函数 $\lambda(t)$ 以及矢量函数 $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ 都在 $t = t_0$ 处连续, 则

$$\lambda(t)\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t), \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t), \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)$$

也都在 $t = t_0$ 处连续。

证明. 取一笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, 设

$$\mathbf{f} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{g} = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}. \quad (2.2.13)$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t)\mathbf{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} [\lambda(t)f_1(t)\mathbf{i} + \lambda(t)f_2(t)\mathbf{j} + \lambda(t)f_3(t)\mathbf{k}] \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t)f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t)f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t)f_3(t)\mathbf{k} \\ &= \lambda(t_0)f_1(t_0)\mathbf{i} + \lambda(t_0)f_2(t_0)\mathbf{j} + \lambda(t_0)f_3(t_0)\mathbf{k} \\ &= \lambda(t_0)\mathbf{f}(t_0). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} [(f_1(t) + g_1(t))\mathbf{i} + (f_2(t) + g_2(t))\mathbf{j} + (f_3(t) + g_3(t))\mathbf{k}] \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (f_1(t) + g_1(t))\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} (f_2(t) + g_2(t))\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} (f_3(t) + g_3(t))\mathbf{k} \\ &= (f_1(t_0) + g_1(t_0))\mathbf{i} + (f_2(t_0) + g_2(t_0))\mathbf{j} + (f_3(t_0) + g_3(t_0))\mathbf{k} \\ &= \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{g}(t_0). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)] \\ &= f_1(t_0)g_1(t_0) + f_2(t_0)g_2(t_0) + f_3(t_0)g_3(t_0) \\ &= \mathbf{f}(t_0) \cdot \mathbf{g}(t_0) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} [(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t))\mathbf{i} + (f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t))\mathbf{j} \\ &\quad + (f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t))\mathbf{k}] \\ &= (f_2(t_0)g_3(t_0) - f_3(t_0)g_2(t_0))\mathbf{i} + (f_3(t_0)g_1(t_0) - f_1(t_0)g_3(t_0))\mathbf{j} \\ &\quad + (f_1(t_0)g_2(t_0) - f_2(t_0)g_1(t_0))\mathbf{k} \\ &= \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

■

推论2.2.1. 若矢量函数 $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)$ 都在 $t = t_0$ 处连续, 则

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)), \mathbf{f}(t) \times (\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t)))$$

也都在 $t = t_0$ 处连续。

§2.3 矢量函数的导数

定义2.3.1. 设矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在开区间 (a, b) 连续。如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t}$$

存在, 就称它为矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在 $t = t_0$ 可导。这个极限就称为 $\mathbf{f}(t)$ 在 $t = t_0$ 的导数, 记作

$$\mathbf{f}'(t_0) \text{ 或 } \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{t=t_0},$$

也即

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{t=t_0} = \mathbf{f}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t}.$$

由定义可知, 矢量函数在一点的导数仍是一个矢量。这就说明, 质点位矢 $\mathbf{r}(t)$ 在时刻 t_0 的导数, 即质点在时刻 t_0 的速度 $\mathbf{v}(t_0)$, 是一个矢量。数学上, $\mathbf{r}(t)$ 在空间描绘出一条曲线, 如果 $\mathbf{v}(t_0) \neq 0$, 则它就是曲线在 $t = t_0$ 处一个切矢。

定义2.3.2. 若矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在开区间 (a, b) 上每一点均可导, 则称它在开区间 (a, b) 上可导, 并将矢量函数

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

称为 $\mathbf{f}(t)$ 的导函数或微商。导函数的导函数, 称为二阶导函数或二阶微商, 记作

$$\mathbf{f}''(t) \text{ 或 } \frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}.$$

以此类推, $n - 1$ 阶导函数的导函数 ($n > 2$), 称为 n 阶导函数或 n 阶微商, 记作

$$\mathbf{f}^{(n)}(t) \text{ 或 } \frac{d^n\mathbf{f}}{dt^n}.$$

在经典力学里, 基本上只用到一阶微商和二阶微商, 例如, 速度 $\mathbf{v}$ 与加速度 $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.3.2)$$

物理上, 也用在字母顶上加点来表示对时间的导数, 譬如,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.3.3)$$

取一笛卡尔坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, 并设

$$\mathbf{f} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}. \quad (2.3.4)$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f_1(t + \Delta t) - f_1(t)]\mathbf{i} + [f_2(t + \Delta t) - f_2(t)]\mathbf{j} + [f_3(t + \Delta t) - f_3(t)]\mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \\ &= \frac{df_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{df_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{df_3}{dt} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

上式即是在笛卡尔坐标系下矢量函数的求导公式, 它将矢量函数的求导转化为对三个分量函数的求导。进一步, 我们还有

$$\frac{d^n \mathbf{f}}{dt^n} = \frac{d^n f_1}{dt^n} \mathbf{i} + \frac{d^n f_2}{dt^n} \mathbf{j} + \frac{d^n f_3}{dt^n} \mathbf{k}, \quad n \geq 2. \quad (2.3.6)$$

特别地,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}, \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k}. \quad (2.3.8)$$

直接利用定义, 或利用笛卡尔坐标系下的求导公式, 易证

定理2.3.1. 若 $\mathbf{c}$ 是常矢量, 则

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0.$$

关于矢量的线性运算, 我们有

定理2.3.2. 若 λ 为实常数, $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ 皆为矢量函数并且可导, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{f}) &= \lambda \frac{d\mathbf{f}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \frac{d\mathbf{g}}{dt}. \end{aligned}$$

证明. 只须在笛卡尔坐标系下证明即可,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{f}) &= \frac{d}{dt}(\lambda f_1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\lambda f_2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(\lambda f_3)\mathbf{k} \\ &= \lambda \frac{df_1}{dt} \mathbf{i} + \lambda \frac{df_2}{dt} \mathbf{j} + \lambda \frac{df_3}{dt} \mathbf{k} \\ &= \lambda \left(\frac{df_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{df_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{df_3}{dt} \mathbf{k} \right) \\ &= \lambda \frac{d\mathbf{f}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= \frac{d}{dt}(f_1 + g_1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(f_2 + g_2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(f_3 + g_3)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{df_1}{dt} + \frac{dg_1}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{df_2}{dt} + \frac{dg_2}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{df_3}{dt} + \frac{dg_3}{dt}\right)\mathbf{k} \\
&= \frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dg_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{df_3}{dt}\mathbf{k} + \frac{dg_3}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \frac{d\mathbf{g}}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

■

关于矢量的内积与外积, 我们有

定理2.3.3. 设 $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ 悉为矢量函数并且可导, 则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt}.
\end{aligned}$$

证明. 只须在右手笛卡尔坐标系下证明即可,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \frac{d}{dt}[f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)] \\
&= \frac{df_1}{dt}g_1 + f_1\frac{dg_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}g_2 + f_2\frac{dg_2}{dt} + \frac{df_3}{dt}g_3 + f_3\frac{dg_3}{dt} \\
&= \frac{df_1}{dt}g_1 + \frac{df_2}{dt}g_2 + \frac{df_3}{dt}g_3 + f_1\frac{dg_1}{dt} + f_2\frac{dg_2}{dt} + f_3\frac{dg_3}{dt} \\
&= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \frac{d}{dt}[(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t))\mathbf{i} + (f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t))\mathbf{j} \\
&\quad + (f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t))\mathbf{k}] \\
&= \left[\left(\frac{df_2}{dt}g_3 - \frac{df_3}{dt}g_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{df_3}{dt}g_1 - \frac{df_1}{dt}g_3\right)\mathbf{j} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{df_1}{dt}g_2 - \frac{df_2}{dt}g_1\right)\mathbf{k}\right] + \left[\left(f_2\frac{dg_3}{dt} - f_3\frac{dg_2}{dt}\right)\mathbf{i} \right. \\
&\quad \left. + \left(f_3\frac{dg_1}{dt} - f_1\frac{dg_3}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(f_1\frac{dg_2}{dt} - f_2\frac{dg_1}{dt}\right)\mathbf{k}\right] \\
&= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

■

关于点乘的导数, 一个常用的特款是

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}^2 = 2\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt}. \tag{2.3.13}$$

推论2.3.1. 设矢量函数 $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)$ 皆可导, 则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) &= \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\right) + \left(\mathbf{f}, \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \mathbf{h}\right) + \left(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right), \\
\frac{d}{dt}[\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h})] &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) + \mathbf{f} \times \left(\frac{d\mathbf{g}}{dt} \times \mathbf{h}\right) + \mathbf{f} \times \left(\mathbf{g} \times \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right).
\end{aligned}$$

最后, 我们还有

定理2.3.4. 设 $\lambda(t)$ 为实函数, $\mathbf{f}(t)$ 为矢量函数, 二者均可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{f}) &= \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{f} + \lambda\frac{d\mathbf{f}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\lambda(t)) &= \frac{d\mathbf{f}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}.\end{aligned}$$

证明. 在笛卡尔坐标系下,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{f}) &= \frac{d}{dt}[(\lambda(t)f_1(t))\mathbf{i} + (\lambda(t)f_2(t))\mathbf{j} + (\lambda(t)f_3(t))\mathbf{k}] \\ &= \frac{d}{dt}(\lambda f_1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\lambda f_2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(\lambda f_3)\mathbf{k} \\ &= \left[\lambda\frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \lambda\frac{df_2}{dt}\mathbf{j} + \lambda\frac{df_3}{dt}\mathbf{k}\right] + \left[\frac{d\lambda}{dt}f_1\mathbf{i} + \frac{d\lambda}{dt}f_2\mathbf{j} + \frac{d\lambda}{dt}f_3\mathbf{k}\right] \\ &= \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{f} + \lambda\frac{d\mathbf{f}}{dt}.\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\lambda(t)) &= \frac{d}{dt}[f_1(\lambda(t))\mathbf{i} + f_2(\lambda(t))\mathbf{j} + f_3(\lambda(t))\mathbf{k}] \\ &= \frac{df_1}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{j} + \frac{df_3}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{k} \\ &= \left[\frac{df_1}{d\lambda}\mathbf{i} + \frac{df_2}{d\lambda}\mathbf{j} + \frac{df_3}{d\lambda}\mathbf{k}\right]\frac{d\lambda}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{f}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}.\end{aligned}\tag{2.3.15}$$

■

§2.4 矢量函数的微分

定义2.4.1. 如果矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 连续可导, 则称

$$d\mathbf{f} := \mathbf{f}'(t) dt = \frac{d\mathbf{f}}{dt} dt$$

为矢量函数的微分, 其中, $dt = \Delta t$ 。

同普通函数一样, 矢量函数的微分是无穷小增量

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)\tag{2.4.1}$$

的主部。

易知, 在笛卡尔坐标系下,

$$d\mathbf{f} = df_1\mathbf{i} + df_2\mathbf{j} + df_3\mathbf{k}.\tag{2.4.2}$$

也就是说, 矢量函数的微分等于分量函数的微分所组成的矢量。特别地, 我们有

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.\tag{2.4.3}$$

最后, 利用定义, 人们不难推得以下关于矢量函数的微分公式:

1. $d\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{c}$ 为常矢量).
2. $d(\lambda\mathbf{f}) = \lambda d\mathbf{f}$ (λ 为实常数).
3. $d(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = d\mathbf{f} + d\mathbf{g}$.
4. $d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = d\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}$.
5. $d(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = d\mathbf{f} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times d\mathbf{g}$.
6. $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = (d\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, d\mathbf{g}, \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}, d\mathbf{h})$.
7. $d[\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h})] = d\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) + \mathbf{f} \times (d\mathbf{g} \times \mathbf{h}) + \mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times d\mathbf{h})$.
8. $d(\lambda\mathbf{f}) = d\lambda \mathbf{f} + \lambda d\mathbf{f}$ (λ 是 t 的函数).
9. $d\mathbf{f}(\lambda(t)) = \frac{d\mathbf{f}}{d\lambda} d\lambda$.

这些公式与上节的求导公式是一一对应的。它们非常有用，应牢记。

§2.5 矢量函数的泰勒公式

设矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 与 $t_0 + \Delta t$ 之间有连续的 n 阶导数，则其笛卡尔坐标系下的分量函数 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 也有连续的 n 阶导数。对这三个一元函数应用 Taylor 公式，得

$$\begin{aligned} f_i(t_0 + \Delta t) &= f_i(t_0) + f'_i(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}f''_i(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}f_i^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1} + \frac{1}{n!}f_i^{(n)}(t_i)(\Delta t)^n, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

其中， $t_i \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ 是 t_0 与 $t_0 + \Delta t$ 之间的某个值，一般地， t_1, t_2, t_3 不相等。于是，

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_0 + \Delta t) &= f_1(t_0 + \Delta t)\mathbf{i} + f_2(t_0 + \Delta t)\mathbf{j} + f_3(t_0 + \Delta t)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}\mathbf{f}''(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{f}^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1} + \frac{1}{n!}\mathbf{R}^{(n)}(\Delta t)^n, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

其中，

$$\mathbf{R}^{(n)} = f_1^{(n)}(t_1)\mathbf{i} + f_2^{(n)}(t_2)\mathbf{j} + f_3^{(n)}(t_3)\mathbf{k}. \quad (2.5.3)$$

此即矢量函数的 Taylor 公式。

因为 t_1, t_2, t_3 均在 t_0 与 $t_0 + \Delta t$ 之间，且 $f_1^n(t), f_2^n(t), f_3^n(t)$ 都连续，所以

$$\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)}(t_0) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.5.4)$$

其中， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是无穷小量，

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (2.5.5)$$

因之, Taylor公式还可以写为以下形式,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_0 + \Delta t) &= \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}\mathbf{f}''(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{f}^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1} + \frac{1}{n!}\mathbf{f}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n + o((\Delta t)^n), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

其中, $o((\Delta t)^n)$ 是余项, 它是高阶无穷小, 满足

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o((\Delta t)^n)}{(\Delta t)^n} = 0. \quad (2.5.7)$$

§2.6 矢量函数的不定积分

定义2.6.1. 已给矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 。如果矢量函数 $\mathbf{F}(t)$ 的导数是 $\mathbf{f}(t)$, 即,

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)$$

则称 $\mathbf{F}(t)$ 是 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数。

明显地, 若 $\mathbf{F}(t)$ 是 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数, 则 $\mathbf{F}(t) + \mathbf{C}$ 也是 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数, 其中 $\mathbf{C}$ 是任一常矢量。反之, 若 $\mathbf{G}(t)$ 也是 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数, 则

$$\mathbf{G}'(t) = \mathbf{f}(t). \quad (2.6.1)$$

于是,

$$\mathbf{G}'(t) - \mathbf{F}'(t) = 0. \quad (2.6.2)$$

引用笛卡尔坐标系, 上式也就是说,

$$G'_1(t) - F'_1(t) = 0, \quad G'_2(t) - F'_2(t) = 0, \quad G'_3(t) - F'_3(t) = 0, \quad (2.6.3)$$

因此,

$$G_1(t) = F_1(t) + C_1, \quad G_2(t) = F_2(t) + C_2, \quad G_3(t) = F_3(t) + C_3, \quad (2.6.4)$$

其中, C_1, C_2, C_3 悉为实常数。这表明

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{C}, \quad (2.6.5)$$

其中, $\mathbf{C}$ 是常矢量,

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{i} + C_2 \mathbf{j} + C_3 \mathbf{k}. \quad (2.6.6)$$

总之, 两个函数 $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ 均为同一矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 的原函数, 当且仅当它们相差一个常矢量。

于是, 我们有

定义2.6.2. 如果函数 $\mathbf{F}(t)$ 是矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数, 则函数族

$$\mathbf{F}(t) + \mathbf{C}$$

包含 $\mathbf{f}(t)$ 的一切原函数, 其中 $\mathbf{C}$ 是常矢量。我们将这个函数族叫做函数 $\mathbf{f}(t)$ 的不定积分, 记为

$$\int \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{F}(t) + \mathbf{C}.$$

这里, $\mathbf{f}(t)$ 称为被积函数, $\mathbf{f}(t)dt$ 称为被积表达式。

根据定义, 显然有

$$\int \mathbf{F}'(t) dt = \mathbf{F}(t) + \mathbf{C}, \quad (2.6.7)$$

$$\int d\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{C}. \quad (2.6.8)$$

在笛卡尔坐标系下, 设

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad (2.6.9)$$

则容易知道

$$\int \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{i} \int f_1(t) dt + \mathbf{j} \int f_2(t) dt + \mathbf{k} \int f_3(t) dt. \quad (2.6.10)$$

由此, 不难验证以下不定积分公式:

1. $\int \lambda \mathbf{f}(t) dt = \lambda \int \mathbf{f}(t) dt$ (λ 是常数)。
2. $\int (\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) dt = \int \mathbf{f}(t) dt + \int \mathbf{g}(t) dt$ 。
3. $\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{c} \cdot \int \mathbf{f}(t) dt$ ($\mathbf{c}$ 是常矢量)。
4. $\int \mathbf{c} \times \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{c} \times \int \mathbf{f}(t) dt$ ($\mathbf{c}$ 是常矢量)。
5. $\int \mathbf{f}(\mu(t)) \mu'(t) dt = \int \mathbf{f}(\mu(t)) d\mu(t)$ 。

最后, 我们指出, 矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 的不定积分正好是以下一阶常微分方程的通解,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.6.11)$$

其中, $\mathbf{y}(t)$ 是待求之矢量函数。关于不定积分的这种观点在物理上更实用。毕竟, 从某种意义上讲, 物理就是一个建方程、解方程的过程。这里, 方程不是常微分方程, 就是偏微分方程。例如, 在牛顿力学中, 质点的运动方程即是

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{f}(t), \quad (2.6.12)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (2.6.13)$$

其中, m 为质点的质量, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别是质点的位移和速度, $\mathbf{f}$ 为作用在质点上的力. 先求第一个方程的不定积分, 即得质点的速度; 将之代入第二个方程并求不定积分, 即得质点的位移. 作为一个这样的简单应用, 我们来考察自由落体, 此时,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -g\mathbf{k}, \quad (2.6.14)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (2.6.15)$$

其中, g 是自由落体的加速度, $\mathbf{k}$ 是单位矢量, 方向垂直地面朝上. 显然, 第一个方程的解为

$$\mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1, \quad (2.6.16)$$

其中, $\mathbf{c}_1$ 为常矢量. 将之代入上面的第二个方程, 得

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1. \quad (2.6.17)$$

解之, 得

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2, \quad (2.6.18)$$

其中, $\mathbf{c}_2$ 是一个新的常矢量. 这就是自由落体运动的一般解, 其中的两个常矢量可由初始条件决定, 易知

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{r}(0), \quad (2.6.19)$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}(0). \quad (2.6.20)$$

§2.7 矢量函数的定积分

定义2.7.1. 设矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义. 对于区间 $[a, b]$ 的任意一个分割,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

作Riemann和,

$$\sum_{\nu=1}^n \mathbf{f}(\xi_\nu) \Delta t_\nu,$$

其中, $\xi_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$, $\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$. 令

$$\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}.$$

如果下列极限,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{f}(\xi_\nu) \Delta t_\nu,$$

对于任意分割都存在, 并且与选点 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 无关, 那么, 我们就说函数 $\mathbf{f}(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 并把该极限称为函数 $\mathbf{f}(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{f}(\xi_\nu) \Delta t_\nu.$$

这里, $\int$ 称为积分号, $\mathbf{f}(t)$ 称为被积函数, b 和 a 分别称为积分的上限和下限.

在笛卡尔坐标系下, Riemann和可写为如下形式,

$$\sum_{\nu=1}^n \mathbf{f}(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} = \mathbf{i} \sum_{\nu=1}^n f_1(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} + \mathbf{j} \sum_{\nu=1}^n f_2(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} + \mathbf{k} \sum_{\nu=1}^n f_3(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu}. \quad (2.7.1)$$

利用极限的性质, 有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{f}(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} = \mathbf{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f_1(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f_2(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu} + \mathbf{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f_3(\xi_{\nu}) \Delta t_{\nu}. \quad (2.7.2)$$

这就是说,

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{i} \int_a^b f_1(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b f_2(t) dt + \mathbf{k} \int_a^b f_3(t) dt. \quad (2.7.3)$$

于是, 我们有下列定积分公式:

1. $\int_a^b \lambda \mathbf{f}(t) dt = \lambda \int_a^b \mathbf{f}(t) dt$ (λ 是常数)。
2. $\int_a^b (\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) dt = \int_a^b \mathbf{f}(t) dt + \int_a^b \mathbf{g}(t) dt$ 。
3. $\int_a^b \mathbf{c} \cdot \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{c} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t) dt$ ($\mathbf{c}$ 是常矢量)。
4. $\int_a^b \mathbf{c} \times \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{c} \times \int_a^b \mathbf{f}(t) dt$ ($\mathbf{c}$ 是常矢量)。
5. $\int_a^b \mathbf{f}(\mu(t)) \mu'(t) dt = \int_a^b \mathbf{f}(\mu(t)) d\mu(t)$ 。
6. $\int_a^c \mathbf{f}(t) dt = \int_a^b \mathbf{f}(t) dt + \int_b^c \mathbf{f}(t) dt$ ($a < b < c$)。
7. $\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$ (Newton-Leibnitz公式, $\mathbf{F}(t)$ 是 $\mathbf{f}(t)$ 的一个原函数)。

至此, 容易看出, 质点运动学其实就是矢量分析的应用, 例如, 求速度、加速度即矢量函数求导,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2.7.4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.7.5)$$

反之, 求位移、求速度即矢量函数之积分,

$$\Delta \mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}(t) dt, \quad (2.7.6)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(t) dt. \quad (2.7.7)$$

本节的最后, 我们讲矢量函数定积分的一个简单应用。设 $\mathbf{r}(t)$ 在区间 $[a, b]$ 有定义。又设 $\mathbf{r}(t)$ 是一个简单的平面曲线 (封闭或不封闭, 皆可), 如图2.7.1所示, 它对同平面线外一点 O 张成一曲边三角形 (两边为直线段, 一边为曲线段)。作三角分割, 见图2.7.2, 将小曲边三角形近似为三角形 (将曲边近似为直边)。根据平行四边形法则, 小三角形的有向面积为

$$ds = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t) + d\mathbf{r}(t)] = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t). \quad (2.7.8)$$

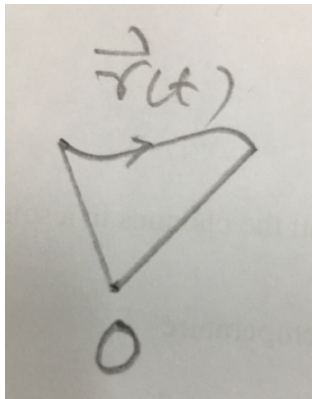


图 2.7.1. 曲边三角形

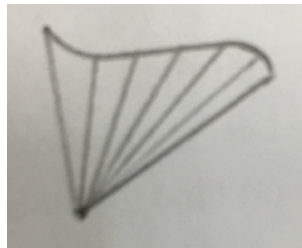


图 2.7.2. 三角分割

于是, 作积分, 即得曲边三角形的有向面积,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_a^b \mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt. \quad (2.7.9)$$

该公式在讨论Kepler问题时有用。

有时, 还引进面积速度 $\dot{\mathbf{s}}$ 如下,

$$\dot{\mathbf{s}} := \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t). \quad (2.7.10)$$

如果将 $\mathbf{r}(t)$ 视作质点的位置矢量, 那么, 面积速度 $\dot{\mathbf{s}}$ 的大小其实就是质点与点 O 之连线在单位时间内所扫过的面积。

作为上述公式的一个应用, 我们来计算椭圆的面积, 椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (2.7.11)$$

取参数方程如下,

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.7.12)$$

于是,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} a \cos t + \mathbf{j} b \sin t. \quad (2.7.13)$$

因此,

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{i} a \cos t + \mathbf{j} b \sin t) \times [\mathbf{i} (-a \sin t dt) + \mathbf{j} b \cos t dt] = \frac{1}{2} ab dt \mathbf{k}. \quad (2.7.14)$$

最后,

$$\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\mathbf{s} = \mathbf{k} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ab dt = \pi ab \mathbf{k}. \quad (2.7.15)$$

也可计算一段椭圆弧对椭圆中心所张扇形的面积, 譬如 $t \in [\varphi_1, \varphi_2]$,

$$\Delta \mathbf{S} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\mathbf{s} = \mathbf{k} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} ab dt = \frac{1}{2} ab (\varphi_2 - \varphi_1) \mathbf{k}. \quad (2.7.16)$$

第3章 曲纹坐标与运动标架

作为矢量函数微分学的应用,本章,我们来讨论质点运动学。运动是相对的,为了描写运动,人们必须选择参照系。值得指出的是,在运动学中,参照系的选择是很自由的,不必是惯性参照系,非惯性参照系也是可以的。在动力学中,按照牛顿力学的要求,出发参照系总必须是惯性参照系,因为牛顿第二定律只在惯性参照系下才成立。在那里,所谓的非惯性参照系只是惯性参照系的衍生物,求解问题的善巧方便而已。至于刚体运动学,较质点运动学复杂,我们将它放到以后的章节再行讨论。

在讨论质点运动学时,人们常用笛卡尔坐标系(右手直角坐标系),但有时为了方便也使用曲纹坐标系和内禀坐标系。笛卡尔坐标系,前面介绍过,大家也比较熟悉,故此略过。下面,我们先介绍曲纹坐标系,然后再介绍内禀坐标系,后者需要一些微分几何的知识,本书将它作为选择参考的内容。

§3.1 曲纹坐标系

一个多元函数,譬如。二元函数 $f(x, y)$ 或三元函数 $f(x, y, z)$, 总可以降为一元函数,这只要让其中一个变量变化,而其它变量保持不变即可,例如,保持二元函数 $f(x, y)$ 的变量 y 不变,而让 x 自由变化,或保持三元函数 $f(x, y, z)$ 的变量 x 和 y 不变,而让 z 自由变化。多元函数降为一元函数后,人们当然可以对它求导数。不同于一元函数,多元函数降后的一元函数随变量的变化只是反映了原函数复杂变化的一个侧面,因此,人们称之为偏导数,记为,例如,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f = f(x, y); \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, f = f(x, y, z). \quad (3.1.1)$$

所谓曲纹坐标就是广义坐标,曲纹坐标系就是广义坐标系。¹下面,我们以三维空间为例,介绍曲纹坐标系的初步理论,以目前够用为目的。

在笛卡尔坐标系下,我们将空间的点与三个有序独立实数变量 x, y, z 的值 (x, y, z) 建立了一一对应,也就是说,空间中每一点 p 都对应唯一的一个有序实数组 (x, y, z) ; 反之,任一有序实数组 (x, y, z) 都对应于空间中唯一的一点 p 。明显地,这种对应关系是可以拓广的,²也就是说,我们也可以将空间中的点与另外三个有序独立实数变量 ξ, ζ, η 的值 (ξ, ζ, η) 建立一一对应。这种拓广的有序实数组 (ξ, ζ, η) 就称为点 p 的曲纹坐标。因为空间中的点同时与这两种坐标建立了一一对应,所以这两种

¹在《分析力学》中,人们将系统地讨论广义坐标。《分析力学》也称《理论力学》。

²至少是可以局部拓广的,事实上,可以局部拓广就足够了,那就是所谓的拓扑流形,或性质更好的,微分流形。

坐标之间也必然是一一对应的。换句话说,这两组实变量之间存在可逆变换:正变换与逆变换,

$$\begin{cases} x = f(\xi, \zeta, \eta) \\ y = g(\xi, \zeta, \eta) \\ z = h(\xi, \zeta, \eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z) \\ \zeta = \chi(x, y, z) \\ \eta = \psi(x, y, z). \end{cases} \quad (3.1.2)$$

一般地,人们还要求这个可逆变换双向连续可微,也就是,正变换与逆变换都是连续可微的。为了方便,人们还经常将上述可逆变换简记为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \zeta, \eta) = f(\xi, \zeta, \eta) \mathbf{i} + g(\xi, \zeta, \eta) \mathbf{j} + h(\xi, \zeta, \eta) \mathbf{k}. \quad (3.1.3)$$

现在,结合前面所讲的偏导数,人们可以获得三个矢量函数,或矢量场,³

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}(\xi, \zeta, \eta), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}(\xi, \zeta, \eta), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}(\xi, \zeta, \eta), \quad (3.1.4)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \mathbf{k}, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \mathbf{k}, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \mathbf{k}. \quad (3.1.7)$$

因为 ξ, ζ, η 是三个独立变量,所以这三个矢量场在空间每一点都是不共面的(线性无关的)。换句话说,三个矢量场在空间每一点都能产生一个仿射标架,

$$\left\{ (\xi, \zeta, \eta); \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}(\xi, \zeta, \eta), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}(\xi, \zeta, \eta), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}(\xi, \zeta, \eta) \right\}. \quad (3.1.8)$$

这些标架,由于每点对应唯一一个,通常称之为**标架场**。回到笛卡尔坐标系,由于

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}, \quad (3.1.9)$$

因此,它的标架场为

$$\{(x, y, z); \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}. \quad (3.1.10)$$

显然,标架的三个基矢都不随地点而变化,因而具有整体性,可以说是最为简单的。至于一般的曲纹坐标系,它的三个基矢将随地点而变化,因而远较笛卡尔坐标系复杂。研究一般坐标系及其标架场的性质,那是微分几何的任务。这里,只讨论我们所需要的简单部分,具体来说,就是柱坐标系和球坐标系以及它们标架场的初步知识。

§3.1.1 柱坐标系

如图3.1.1所示,柱坐标系定义为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z, \end{cases} \quad 0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty \leq z < +\infty. \quad (3.1.11)$$

³所谓矢量场,就是空间每一点对应一个矢量,例如,电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$, 磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$, 这些都是静场。场还可以随时间 t 变化,例如,电磁波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ 。

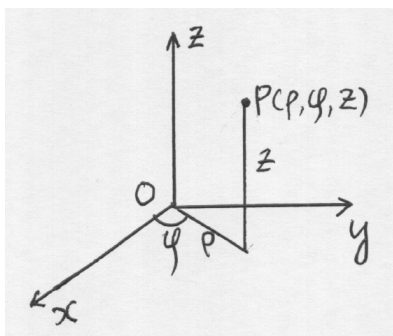


图 3.1.1. 柱坐标系

容易看出，柱坐标系就是对空间笛卡尔坐标系的 xy 平面取极坐标而已，或者说，它就是平面极坐标系加 z 轴罢了，其中， ρ 称矢径， φ 称极角， z 仍称竖坐标。

按前所述，我们有标架场，

$$\left\{ (\rho, \varphi, z); \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}(\rho, \varphi, z), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, z), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}(\rho, \varphi, z) \right\}, \quad (3.1.12)$$

其中，

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j}, \quad (3.1.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}. \quad (3.1.15)$$

容易验证，上述标架场是一个正交右手系，但第二个基矢尚未归一。将其归一得

$$\{(\rho, \varphi, z); \mathbf{e}_\rho(\rho, \varphi, z), \mathbf{e}_\varphi(\rho, \varphi, z), \mathbf{e}_z(\rho, \varphi, z)\}, \quad (3.1.16)$$

其中，

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}. \quad (3.1.19)$$

这是一个正交归一右手系：

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = 0; \quad (\text{正交性}) \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{e}_\rho^2 = \mathbf{e}_\varphi^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1; \quad (\text{归一性}) \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{右手性}) \quad (3.1.22)$$

为了直观，我们将上述结果画在图3.1.2中。

总之，柱坐标系的标架虽然丧失了整体性，但人们仍能为它寻找到一个正交归一右手系，因此，它离笛卡尔坐标系尚不是很远。

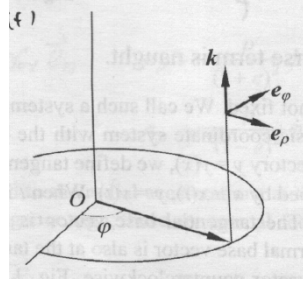


图 3.1.2. 柱坐标系上的标架场

§3.1.2 球坐标系

如图3.1.3所示, 球坐标系定义为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.1.23)$$

其中, r 称矢径, θ 称极角, φ 称方位角。

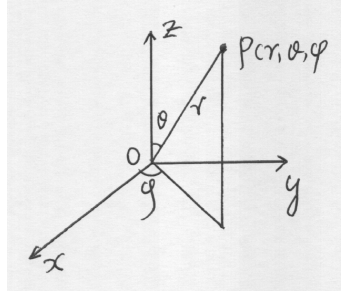


图 3.1.3. 球坐标系 (少了右括号)

按前所述, 我们得标架场,

$$\left\{ (r, \theta, \varphi); \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(r, \theta, \varphi), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) \right\}, \quad (3.1.24)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (3.1.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k}, \quad (3.1.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (3.1.27)$$

同柱坐标系一样, 容易验证, 上述标架场是一个正交右手系, 但第二、第三两个基矢尚未归一。将它们归一, 得

$$\{(r, \theta, \varphi); \mathbf{e}_r(r, \theta, \varphi), \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \varphi), \mathbf{e}_\varphi(r, \theta, \varphi)\}, \quad (3.1.28)$$

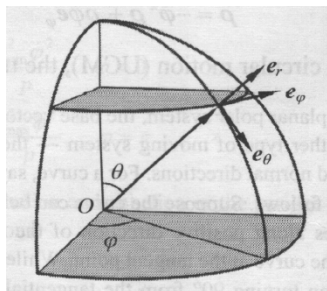


图 3.1.4. 球坐标系上的标架场

其中,

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (3.1.29)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \quad (3.1.30)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (3.1.31)$$

它是一个正交归一右手系:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_r = 0; \quad (\text{正交性}) \quad (3.1.32)$$

$$\mathbf{e}_r^2 = \mathbf{e}_\theta^2 = \mathbf{e}_\varphi^2 = 1; \quad (\text{归一性}) \quad (3.1.33)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{右手性}) \quad (3.1.34)$$

为直观起见,我们将上述结果显示在图3.1.4中。我们看到,同柱坐标系一样,人们仍能为球坐标系寻找到一个正交归一右手标架场。

总而言之,柱坐标系、球坐标系同笛卡尔坐标系的根本区别是:它们标架的基矢都是局域的,随地点而变化,点点不同。自然,这种局域性将会给理论与应用带来一定的复杂性。好在,如果限于质点运动,这种复杂性可以得到简化,那就是,人们可以通过引进角速度来描写局域基矢随时间的变化。至其具体内容,且待下节分解。

最后,顺便指出,沿曲线坐标 ρ, φ 作Riemann分割,所得成为曲边四边形。这些不规则的曲边四边形可以用规则图形——长方形来近似,这些长方形乃二矢量 $(\Delta \rho)\mathbf{e}_\rho, (\rho \Delta \varphi)\mathbf{e}_\varphi$ 所生成,因此,平面极坐标系下的有向面元可写为如下形式,

$$ds = (d\rho \mathbf{e}_\rho) \times (\rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi) = (\rho d\rho d\varphi) \mathbf{k}. \quad (3.1.35)$$

类似可知,柱坐标系和球坐标系下的有向体积元分别为

$$dv = (d\rho \mathbf{e}_\rho, \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi, dz \mathbf{e}_z) = \rho d\rho d\varphi dz, \quad (3.1.36)$$

$$dv = (dr \mathbf{e}_r, r d\theta \mathbf{e}_\theta, r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (3.1.37)$$

另外,柱坐标系和球坐标系下的有向面元分别为

$$ds_\rho = (\rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi) \times (dz \mathbf{e}_z) = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho, \quad (3.1.38)$$

$$ds_\varphi = (dz \mathbf{e}_z) \times (d\rho \mathbf{e}_\rho) = d\rho dz \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.1.39)$$

$$ds_z = (d\rho \mathbf{e}_\rho) \times (\rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \rho d\rho d\varphi \mathbf{e}_z \quad (3.1.40)$$

$$ds_r = (r d\theta \mathbf{e}_\theta) \times (r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r, \quad (3.1.41)$$

$$ds_\theta = (r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi) \times (dr \mathbf{e}_r) = r \sin \theta dr d\varphi \mathbf{e}_\theta, \quad (3.1.42)$$

$$ds_\varphi = (dr \mathbf{e}_r) \times (r d\theta \mathbf{e}_\theta) = r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.1.43)$$

以上这些结果在处理柱坐标系和球坐标系下的积分时都很有用。

§3.1.3 平面极坐标系与圆锥曲线

本小节讲一个平面极坐标系的重要应用——圆锥曲线的极坐标表示。Kepler问题是经典力学的皇冠,圆锥曲线的这种表示对学习Kepler问题是很要紧的,所以在这里顺便说一下。所谓圆锥曲线是指椭圆、双曲线和抛物线,因为此三都是平面对正圆锥的截线,只是平面关于锥轴的倾角不同而已。

这三种曲线有一个基本的共同性质:

定理3.1.1. 若将圆锥曲线视为动点的轨迹,那么,动点到焦点和到准线的距离之比是一个常数 e , 通常谓之**偏心率**。并且,当圆锥曲线是椭圆时, $e < 1$; 当圆锥曲线是抛物线时, $e = 1$; 当圆锥曲线是双曲线时, $e > 1$ 。对于椭圆和双曲线,有两个焦点、两根准线,这里要求焦点与准线同侧。

证明. 我们首先考虑抛物线,设它的方程是

$$y^2 = 2px, \quad (3.1.44)$$

其中, $p > 0$ 是一正常数。它的焦点 F 是

$$\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad (3.1.45)$$

准线 L 是

$$x = -\frac{p}{2}. \quad (3.1.46)$$

设动点 M 的坐标为 (x, y) 。于是,动点 M 到焦点 F 和到准线 L 距离 r, d 分别为

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (3.1.47)$$

由于动点 M 在抛物线上,因此,

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (3.1.48)$$

于是,

$$e = \frac{r}{d} = 1. \quad (3.1.49)$$

定理对抛物线成立。

其次, 考虑椭圆,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \quad (3.1.50)$$

我们取它同在右侧的焦点 F 和准线 L ,

$$F = (c, 0), \quad L: x = \frac{a^2}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (3.1.51)$$

动点 $M = (x, y)$ 到焦点 F 的距离 r 为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a}x - a \right| \\ &= \frac{c}{a} \left| x - \frac{a^2}{c} \right|. \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

动点 M 到准线 L 的距离 d 为

$$d = \left| x - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (3.1.53)$$

因此,

$$e = \frac{r}{d} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1. \quad (3.1.54)$$

定理对椭圆成立。

最后, 考虑双曲线,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (3.1.55)$$

同在右侧的焦点 F 和准线 L 为,

$$F = (c, 0), \quad L: x = \frac{a^2}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.1.56)$$

于是, 动点 M 到焦点 F 的距离 r 为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a}x - a \right| \\ &= \frac{c}{a} \left| x - \frac{a^2}{c} \right|. \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

动点 M 到准线 L 的距离 d 为

$$d = \left| x - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (3.1.58)$$

因此,

$$e = \frac{r}{d} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1. \quad (3.1.59)$$

定理对双曲线成立。 ■

这条性质之所以基本, 是因为它可以用作圆锥曲线的定义。我们有

定理3.1.2. 若一个动点 M 到一个定点 F 与到一条定直线 L 的距离之比为一个常数 e , 则动点 M 的轨迹一定是圆锥曲线。并且, 当 $e < 1$ 时, 曲线为椭圆; 当 $e = 1$ 时, 曲线为抛物线; 当 $e > 1$ 时, 曲线为双曲线。

人们称定理中的定点 F 为**焦点**, 定直线 L 为**准线**, 距离之比 e 为**偏心率**。

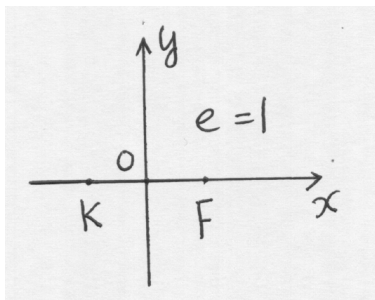


图 3.1.5. 设置 $e = 1$ 情形的坐标系.

证明. 首先, 考虑 $e = 1$ 情形。如图3.1.5所示, 取通过焦点 F 并与准线 L 垂直的直线作 x 轴。设 x 轴与准线 L 的交点为 K , 取线段 KF 的中点作 x 轴的原点 O , 取矢量 $\overrightarrow{OF}$ 的方向为 x 轴之正向。过原点 O 取 y 轴使成标准平面笛卡尔坐标系。令

$$p = |\overrightarrow{KF}|, \quad (3.1.60)$$

则

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad L: x = -\frac{p}{2}. \quad (3.1.61)$$

令动点 M 为 (x, y) 。记动点 M 到焦点 F 与准线 L 之距离分别为 r 和 d , 则

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (3.1.62)$$

因为

$$e = \frac{r}{d} = 1, \quad (3.1.63)$$

所以

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (3.1.64)$$

两边平方, 得

$$y^2 = 2px. \quad (3.1.65)$$

显然, 动点轨迹为抛物线。

其次, 考虑 $e \neq 1$ 情形。如图3.1.6和3.1.7所示, 同前, 取通过焦点 F 并与准线 L 垂直的直线作 x 轴。设 x 轴与准线 L 的交点为 K 。将 x 轴的原点 O 取在 F 与 K 的左边, 并使

$$\frac{|\overrightarrow{OF}|}{|\overrightarrow{OK}|} = e^2. \quad (3.1.66)$$

取矢量 $\overrightarrow{OF}$ 的方向为 x 轴之正向。过原点 O 取 y 轴使成标准平面笛卡尔坐标系。令 F 与 K 的坐标分别为

$$F = (\alpha, 0), \quad K = (\beta, 0), \quad (3.1.67)$$

则

$$\alpha = \beta e^2. \quad (3.1.68)$$

现在, 令动点 M 为 (x, y) 。记动点 M 到焦点 F 与准线 L 之距离分别为 r 和 d , 则

$$r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}, \quad d = |x - \beta|. \quad (3.1.69)$$

因为

$$e = \frac{r}{d}, \quad (3.1.70)$$

所以

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2} = e |x - \beta|. \quad (3.1.71)$$

两边平方, 得

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = \alpha\beta(1 - e^2). \quad (3.1.72)$$

于是,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1, \quad a = \sqrt{\alpha\beta}. \quad (3.1.73)$$

显然, 若 $e < 1$, 则动点轨迹为椭圆; 若 $e > 1$, 则动点轨迹为双曲线。 ■

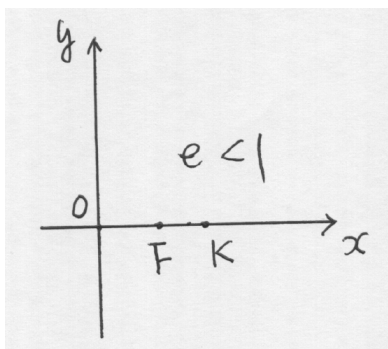


图 3.1.6. 在 $e < 1$ 的情形下, 坐标系的设置.

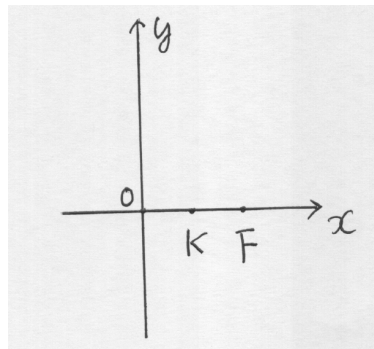


图 3.1.7. 在 $e > 1$ 的情形下, 坐标系的设置.

利用这个定理, 我们可以很方便地求出圆锥曲线在极坐标系下的方程。在这样作时, 为了方便, 人们通常将坐标原点沿 x 轴平移到焦点 F 上, 此时坐标原点又称**极点**, x 轴的正半轴又称**极轴**。令

$$\overrightarrow{FK} = \delta \mathbf{i}, \quad (3.1.74)$$

则

$$\delta = \begin{cases} -p, & \text{抛物线, 开口朝右, 极轴与对称轴重合} \\ \frac{b^2}{c}, & \text{椭圆, 极点在右焦点, 极轴与长轴重合} \\ -\frac{b^2}{c}, & \text{双曲线, 极点在右焦点, 极轴与实轴重合.} \end{cases} \quad (3.1.75)$$

于是,

$$\rho = r, \quad d = |x - \delta|. \quad (3.1.76)$$

由

$$\frac{r}{d} = e \quad (3.1.77)$$

得

$$\rho = e|x - \delta| = e|\rho \cos \varphi - \delta|. \quad (3.1.78)$$

两边平方, 得

$$(1 - e^2 \cos^2 \varphi) \rho^2 + (2e^2 \delta \cos \varphi) \rho - e^2 \delta^2 = 0. \quad (3.1.79)$$

它有两个根,

$$\rho = \frac{1}{2(1 - e^2 \cos^2 \varphi)} \left[-2e^2 \delta \cos \varphi \pm \sqrt{(2e^2 \delta \cos \varphi)^2 + 4(1 - e^2 \cos^2 \varphi) e^2 \delta^2} \right] \quad (3.1.80)$$

$$= \frac{1}{2(1 - e^2 \cos^2 \varphi)} (-2e^2 \delta \cos \varphi \pm 2e\delta) \quad (3.1.81)$$

$$= \frac{e\delta}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} (-e \cos \varphi \pm 1) \quad (3.1.82)$$

$$= \begin{cases} \frac{e\delta}{1 + e \cos \varphi}, \\ -\frac{e\delta}{1 - e \cos \varphi}. \end{cases} \quad (3.1.83)$$

对于抛物线, $e = 1$, $\delta = -p$, 有

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \quad (3.1.84)$$

另一根是负的, 没有几何意义, 丢掉, 因为 $\rho > 0$ 。对于椭圆, $e < 1$, $\delta = \frac{b^2}{c}$, 有

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad p = e\delta = \frac{b^2}{a}. \quad (3.1.85)$$

另一根为负, 没有几何意义。对于双曲线, $e > 1$, $\delta = -\frac{b^2}{c}$, 两根均有几何意义, 分别代表双曲线的两支, 有

$$\rho = \begin{cases} \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, & \text{右支} \\ -\frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & \text{左支}, \end{cases} \quad p = -e\delta = \frac{b^2}{a}. \quad (3.1.86)$$

总而言之, 我们有

$$\rho = \begin{cases} \frac{p}{1 - \cos \varphi}, & \text{抛物线, 极点在焦点, 开口朝右} \\ \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & \text{椭圆, 极点在右焦点, } e < 1 \\ \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, & \text{双曲线, 极点在右焦点, 右支, } e > 1 \\ -\frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & \text{双曲线, 极点在右焦点, 左支, } e > 1. \end{cases} \quad (3.1.87)$$

如果将平面绕坐标原点逆时针旋转 π , 则 $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, 容易看出,

$$\rho = \begin{cases} \frac{p}{1 + \cos \varphi}, & \text{抛物线, 极点在焦点, 开口朝左} \\ \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, & \text{椭圆, 极点在左焦点, } e < 1 \\ \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & \text{双曲线, 极点在左焦点, 左支, } e > 1 \\ -\frac{p}{1 - e \cos \varphi}, & \text{双曲线, 极点在左焦点, 右支, } e > 1. \end{cases} \quad (3.1.88)$$

注意到双曲线有两个分支, 它们之间有间隔, 是不连续的, 然而, 实际粒子, 即所谓的质点, 不是数学上的动点, 它的轨迹, 按照牛顿第二定律, 一定是连续可微的, 因之, 作为质点的许可轨道, 只能取双曲线的两个连续分支之一, 质点不可能从一个分支跃迁到另一个分支。不过, 除朝向外, 双曲线两个分支是一致的, 从物理上看, 完全是一回事。由是可知, 作为质点的许可轨道, 如果不管朝向, 则圆锥曲线可以统一地写为如下形式,

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad (3.1.89)$$

其中, p 为**焦点参数**, e 为**偏心率**, 初相 φ_0 决定曲线具体的朝向与方位, 以及极点到底是那个焦点, 当存在两个焦点的时候。如此整齐统一的形式, 确实是经典力学对Kepler问题的严格结果, 它在理论上完美地解释了Kepler发现的三条实验定律!

最后, 如果将极轴逆时针旋转 φ_0 , 则上述结果可以更简洁地写为

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.1.90)$$

由此可见,

$$e \begin{cases} = 1, & \text{曲线为抛物线, 开口朝左, 极点为焦点, 极轴位于对称轴上} \\ < 1, & \text{曲线为椭圆, 极点为右焦点, 极轴位于长轴上} \\ > 1, & \text{曲线为双曲线, 左支, 极点为左焦点, 极轴位于实轴上.} \end{cases} \quad (3.1.91)$$

§3.2 角速度

在笛卡尔坐标系下, 运动质点的位矢可写为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (3.2.1)$$

于是, 速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \quad (3.2.3)$$

这些都是大家熟悉的结果。这里，我们愿意指出的是，之所以有如此简单的结果，那是因为笛卡尔标架 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 是一个不动标架，它不随时间变化：

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0. \quad (3.2.4)$$

此特点，确乎优胜怡人。然月有阴晴圆缺，世事无常，笛卡尔坐标系并不总是最方便的坐标系。有时，人们需要曲纹坐标系。曲纹坐标系的标架是局部定义的，它必将随着质点的运动而运动，因而是运动标架。对于运动标架，事情将会有很大的不同。下面，让我们先来考察柱坐标系。

§3.2.1 柱标架的角速度

对于柱坐标系，质点的坐标为 (ρ, φ, z) 。明显地，随着质点的运动，质点的柱坐标将随时间而变化，即

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (3.2.5)$$

注意到

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z, \end{cases} \quad 0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty \leq z < +\infty, \quad (3.2.6)$$

质点的位矢可以改写如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \rho(t) \cos(\varphi(t))\mathbf{i} + \rho(t) \sin(\varphi(t))\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

这是一个混合表示，直角坐标已经变换为柱坐标，但是基矢还是原来笛卡尔坐标系的基矢。为了将改写进行到底，人们必须利用柱坐标系基底的定义，

$$\mathbf{e}_\rho(t) = \cos(\varphi(t))\mathbf{i} + \sin(\varphi(t))\mathbf{j}, \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{e}_\varphi(t) = -\sin(\varphi(t))\mathbf{i} + \cos(\varphi(t))\mathbf{j}, \quad (3.2.9)$$

$$\mathbf{e}_z(t) = \mathbf{k}. \quad (3.2.10)$$

该定义本质上就是柱坐标基底与直角坐标基底之间的变换，它是可逆的，逆变换为

$$\mathbf{i} = \cos(\varphi(t))\mathbf{e}_\rho(t) - \sin(\varphi(t))\mathbf{e}_\varphi(t), \quad (3.2.11)$$

$$\mathbf{j} = \sin(\varphi(t))\mathbf{e}_\rho(t) + \cos(\varphi(t))\mathbf{e}_\varphi(t), \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_z(t). \quad (3.2.13)$$

将之代入质点位矢的表达式，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \rho(t) \cos(\varphi(t)) [\cos(\varphi(t))\mathbf{e}_\rho(t) - \sin(\varphi(t))\mathbf{e}_\varphi(t)] \\ &\quad + \rho(t) \sin(\varphi(t)) [\sin(\varphi(t))\mathbf{e}_\rho(t) + \cos(\varphi(t))\mathbf{e}_\varphi(t)] + z(t)\mathbf{e}_z(t) \\ &= \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + z(t)\mathbf{e}_z(t). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

这就是质点位矢在柱坐标系下的完全表达式。我们看到，在柱坐标系下，标架随质点运动而运动，因而，不但质点的坐标随时间而变化，而且标架的基矢也随时间而变化。这就是曲纹坐标系的特点。因为标架是运动的，所以在曲纹坐标系下描写质点的运动时，人们不但要考虑坐标随时间的变化，而且还要考虑基矢随时间的变化。角速度这个量就是在考察基矢如何随时间演化的过程中引进的，见下。

§3.2.1.1 角速度的定义

考虑到基矢都是单位矢量，下面我们先来考察单位矢量随时间的演化。设 $\mathbf{e}(t)$ 为单位矢量，作为时间的函数，它连续可微。对恒等式

$$\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 1, \quad (3.2.15)$$

两边求导，得

$$\dot{\mathbf{e}}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 0. \quad (3.2.16)$$

这就是说， $\dot{\mathbf{e}}(t)$ 与 $\mathbf{e}(t)$ 垂直。 $\dot{\mathbf{e}}(t)$ 和 $\mathbf{e}(t)$ 两者决定一个平面，将该平面法线的正向 $\mathbf{n}$ 选为与 $\mathbf{e}(t) \times \dot{\mathbf{e}}(t)$ 的方向一致，即

$$\mathbf{n} = \mathbf{e} \times \frac{\dot{\mathbf{e}}}{|\dot{\mathbf{e}}|} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{e}}|} \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}. \quad (3.2.17)$$

于是，我们有

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{e}}|} (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \times \mathbf{e} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{e}}|} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\dot{\mathbf{e}} - (\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}})\mathbf{e}] = \frac{1}{|\dot{\mathbf{e}}|} \dot{\mathbf{e}}. \quad (3.2.18)$$

从右边解出 $\dot{\mathbf{e}}$ ，得

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = |\dot{\mathbf{e}}|(\mathbf{n} \times \mathbf{e}) = (|\dot{\mathbf{e}}|\mathbf{n}) \times \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t), \quad (3.2.19)$$

其中， $\boldsymbol{\omega}(t)$ 称为角速度，

$$\boldsymbol{\omega}(t) = |\dot{\mathbf{e}}(t)| \mathbf{n}. \quad (3.2.20)$$

可见，对单位矢量取微商等价于用角速度对该矢量作叉乘，即

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t). \quad (3.2.21)$$

我们再来看两个单位矢量 $\mathbf{e}_\rho(t)$, $\mathbf{e}_\varphi(t)$ 的情形，也即平面极坐标系的情形。柱坐标系限制在 xy 平面上就是平面极坐标系，

$$\mathbf{e}_\rho(t) = \cos(\varphi(t)) \mathbf{i} + \sin(\varphi(t)) \mathbf{j}, \quad (3.2.22)$$

$$\mathbf{e}_\varphi(t) = -\sin(\varphi(t)) \mathbf{i} + \cos(\varphi(t)) \mathbf{j}. \quad (3.2.23)$$

我们有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho(t) = -\sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \mathbf{i} + \cos(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \mathbf{j} = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_\varphi(t), \quad (3.2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t) = -\cos(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \mathbf{i} - \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \mathbf{j} = -\dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_\rho(t). \quad (3.2.25)$$

注意到四者 $\dot{\mathbf{e}}_\rho, \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ 共面, 皆在 xy 平面上, 根据单个单位矢量的结果, 不难得知二者 $\mathbf{e}_\rho(t), \mathbf{e}_\varphi(t)$ 的角速度相同, 悉为

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{k}. \quad (3.2.26)$$

也就是说,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\rho(t), \quad (3.2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\varphi(t). \quad (3.2.28)$$

因此, 平面极坐标系标架基矢的运动同样也可以用角速度来描写。

再, 考虑到

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_z(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{k} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_z(t), \quad (3.2.29)$$

于是乎, 空间柱坐标系标架基矢的运动也可以用角速度来描写,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\rho(t), \quad (3.2.30)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\varphi(t), \quad (3.2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_z(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_z(t), \quad (3.2.32)$$

其中,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z(t). \quad (3.2.33)$$

注意, 在导出上述结果时, 我们利用了基底 $\{\mathbf{e}_\rho(t), \mathbf{e}_\varphi(t), \mathbf{e}_z(t)\}$ 的右手性。

柱坐标系的上述结果具有一般性, 对任意的正交归一右手基底都是成立的。我们叙述如下:

引理3.2.1. 设 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 悉为时间 t 的连续可微函数, 并且在每一时刻 t 均构成一个仿射基底, 那么, 导数 $\dot{\mathbf{e}}_\alpha(t)$, 作为时刻 t 的一个矢量, 可以展开为 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 的一个线性组合,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{e}_\beta(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.34)$$

其中, $a_{\alpha\beta}(t)$ 是展开系数, 也即仿射坐标, 它们都是时间 t 的函数。假如 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 还是正交归一的,

$$\mathbf{e}_\alpha(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (3.2.35)$$

那么, 系数 $a_{\alpha\beta}(t)$ 必是反对称的, 即

$$a_{\beta\alpha}(t) = -a_{\alpha\beta}(t), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.2.36)$$

为了方便, 我们以后称式 (3.2.34) 为基矢运动方程。

证明. 按定义, 矢量函数的导数仍然是一个矢量函数, 即,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) = \mathbf{g}_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.37)$$

其中, $\mathbf{g}_\alpha(t)$ 是时刻 t 的一个矢量。将 $\mathbf{g}_\alpha(t)$ 按时刻 t 的基底展开, 得

$$\mathbf{g}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{e}_\beta(t), \quad (3.2.38)$$

其中, $a_{\alpha\beta}(t)$ 是展开系数, 它是时刻 t 的函数。将此式代回其上式, 得

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{e}_\beta(t), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.2.39)$$

这就证明了, 导矢 $\dot{\mathbf{e}}_\alpha(t)$ 可以展开为 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 的一个线性组合, 并且展开系数都是时刻 t 的函数。

如果 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 还是正交归一的, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\beta(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) &= \mathbf{e}_\beta(t) \cdot \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\gamma}(t) \mathbf{e}_\gamma(t) \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\gamma}(t) \mathbf{e}_\beta(t) \cdot \mathbf{e}_\gamma(t) \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\gamma}(t) \delta_{\beta\gamma} \\ &= a_{\alpha\beta}(t). \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

换句话说,

$$a_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{e}_\beta(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t). \quad (3.2.41)$$

现在, 对正交归一式,

$$\mathbf{e}_\alpha(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.2.42)$$

两边求导, 得

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) \right) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) + \mathbf{e}_\alpha(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\beta(t) \right) = 0. \quad (3.2.43)$$

这意味着

$$a_{\alpha\beta}(t) + a_{\beta\alpha}(t) = 0. \quad (3.2.44)$$

亦即

$$a_{\beta\alpha}(t) = -a_{\alpha\beta}(t). \quad (3.2.45)$$

■

本引理说明, 对于仿射基底, 基矢运动方程本有九个展开系数, 然而, 对于正交归一基底, 其中三个对角元恒为零,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad (3.2.46)$$

并且剩下的六个非对角元也只有三个是独立的, 这三个独立的系数可以选为

$$a_{12}, a_{23}, a_{31}. \quad (3.2.47)$$

定理3.2.1. 设 $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ 是时间 t 的连续可微函数, 并且构成一个正交归一右手基底,

$$\mathbf{e}_\alpha(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad (3.2.48)$$

$$\mathbf{e}_1(t) \times \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_3(t), \quad \mathbf{e}_2(t) \times \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{e}_1(t), \quad \mathbf{e}_3(t) \times \mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t). \quad (3.2.49)$$

那么, 基矢的运动方程,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta}(t) \mathbf{e}_\beta(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.50)$$

可以改为以下形式,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\alpha(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.51)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}(t)$ 称为角速度, 它定义为

$$\boldsymbol{\omega}(t) := a_{23}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{31}(t) \mathbf{e}_2(t) + a_{12}(t) \mathbf{e}_3(t). \quad (3.2.52)$$

证明. 由于 $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ 是正交归一的, 因此,

$$a_{11}(t) = a_{22}(t) = a_{33}(t) = 0, \quad (3.2.53)$$

$$a_{21}(t) = -a_{12}(t), \quad a_{32}(t) = -a_{23}(t), \quad a_{13}(t) = -a_{31}(t). \quad (3.2.54)$$

于是,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_1(t) = a_{12}(t) \mathbf{e}_2(t) - a_{31}(t) \mathbf{e}_3(t), \quad (3.2.55)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_2(t) = -a_{12}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{23}(t) \mathbf{e}_3(t), \quad (3.2.56)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_3(t) = a_{31}(t) \mathbf{e}_1(t) - a_{23}(t) \mathbf{e}_2(t). \quad (3.2.57)$$

现在, 利用角速度的定义以及基底的右手性, 我们来分别验证这三个运动方程。首先,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_1(t) &= [a_{23}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{31}(t) \mathbf{e}_2(t) + a_{12}(t) \mathbf{e}_3(t)] \times \mathbf{e}_1(t) \\ &= -a_{31}(t) \mathbf{e}_3(t) + a_{12}(t) \mathbf{e}_2(t) \\ &= a_{12}(t) \mathbf{e}_2(t) - a_{31}(t) \mathbf{e}_3(t) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{e}_1(t). \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

其次,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_2(t) &= [a_{23}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{31}(t) \mathbf{e}_2(t) + a_{12}(t) \mathbf{e}_3(t)] \times \mathbf{e}_2(t) \\ &= a_{23}(t) \mathbf{e}_3(t) - a_{12}(t) \mathbf{e}_1(t) \\ &= -a_{12}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{23}(t) \mathbf{e}_3(t) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{e}_2(t). \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

最后,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_3(t) &= [a_{23}(t) \mathbf{e}_1(t) + a_{31}(t) \mathbf{e}_2(t) + a_{12}(t) \mathbf{e}_3(t)] \times \mathbf{e}_3(t) \\
 &= -a_{23}(t) \mathbf{e}_2(t) + a_{31}(t) \mathbf{e}_1(t) \\
 &= a_{31}(t) \mathbf{e}_1(t) - a_{23}(t) \mathbf{e}_2(t) \\
 &= \frac{d}{dt} \mathbf{e}_3(t).
 \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

■

本定理实质上是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的定义。我们看到, 它通过精巧而恰当的组合而得。角速度乃合成物, 这样的定义, 相比线速度 $\mathbf{v}$ 的定义, 要复杂得多, 也抽象得多, 后者直接由矢量函数的导数给出。此外, 基矢作为矢量, 其长度是不变的, 因此, 当其运动时, 就只有方向上的变化了。作为整体, 基底在方向上的改变代表了它构成的标架在朝向 (orientation) 上的变化, 这种变化, 物理上谓之转动 (rotation)。是故, 作为对比, 我们可以说, 线速度描写的是质点的平移 (translation), 角速度描写的是正交归一右手基底的转动。我们还应看到, 凡是正交归一右手基底, 它随时间的演化皆可由角速度来描写, 同时, 也只有正交归一右手基底才可以引进角速度。角速度是与正交归一右手基底密切联系在一起的, 这是我们学习角速度理论时应该注意的地方。

以上就是角速度的定义, 它已本性具足, 并无别样好说, 按方抓药, 照图索骥, 如是定义, 如是计算也就可以了。然而, 物理上为了直观, 如图3.2.8所示, 有时人为地引进一个通过标架原点的数轴, 取其正向为角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向, 并按右手定则在其上赋以一个定向的圆圈, 标以 $\boldsymbol{\omega}$, 如此装点之后, 便谓此数轴为标架的瞬时转动轴, 并说标架正以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕此轴而旋转。这样的图像, 在不至造成误会的地方, 我们以后也会使用。

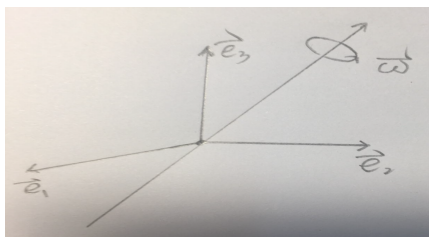


图 3.2.8. 瞬时转动轴

回眸还视, 对于柱坐标系, 取

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho(t), \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi(t), \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z(t), \tag{3.2.61}$$

则易知

$$a_{12} = \dot{\varphi}(t), a_{23} = 0, a_{31} = 0. \tag{3.2.62}$$

因此,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z. \tag{3.2.63}$$

它正是柱标架的角速度。

下面, 我们来考察柱坐标系下质点平移速度与柱标架角速度的关系。前面已经知道, 质点的位矢为

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \mathbf{e}_z(t). \quad (3.2.64)$$

于是,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \\ &= \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t) \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z(t) + z(t) \frac{d}{dt} \mathbf{e}_z(t) \\ &= \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z(t) + \rho(t) \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_z(t) \\ &= \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \mathbf{e}_z(t)] \\ &= [\dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z(t)] + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

由此可见, 质点的速度现在分为两项: 第一项来源于质点曲线坐标随时间的变化, 此时基矢保持不动; 对二项来源于基矢的运动, 此时质点的曲线坐标保持不变。从运动的相对性来看, 第一项其实就是质点相对于局部坐标系的运动速度, 此时, 观察者相对运动坐标系静止, 他看到的只有坐标的变化, 基矢是静止的。通常形式地将这部分记为

$$\frac{D\mathbf{r}}{dt} := \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z(t). \quad (3.2.66)$$

这样, 上式可写为如下形式,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.2.67)$$

有时, 还进一步, 将 $\mathbf{r}$ 缺省, 把它简记为符号等式,

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times. \quad (3.2.68)$$

这个虽然是从柱坐标系下质点速度导出的, 但它其实是个一般性的结果, 下面我们来证明它。

§3.2.1.2 矢量函数的运动方程

设 $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ 是一个正交归一右手基底, 其角速度为 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 。又设有一矢量函数 $\mathbf{f}(t)$ 。于是, 它有正交分解,

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 f_\alpha(t) \mathbf{e}_\alpha(t). \quad (3.2.69)$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^3 f_\alpha(t) \mathbf{e}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dt} [f_\alpha(t) \mathbf{e}_\alpha(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d}{dt} f_\alpha(t) \right) \mathbf{e}_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^3 f_\alpha(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\alpha(t) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d}{dt} f_\alpha(t) \right) \mathbf{e}_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^3 f_\alpha(t) (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\alpha(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d}{dt} f_{\alpha}(t) \right) \mathbf{e}_{\alpha}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^3 f_{\alpha}(t) \mathbf{e}_{\alpha}(t) \\
&= \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d}{dt} f_{\alpha}(t) \right) \mathbf{e}_{\alpha}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t).
\end{aligned} \tag{3.2.70}$$

斯即

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}, \tag{3.2.71}$$

其中,

$$\frac{D\mathbf{f}}{dt} := \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d}{dt} f_{\alpha}(t) \right) \mathbf{e}_{\alpha}(t), \tag{3.2.72}$$

它是矢量函数 $\mathbf{f}$ 相对于运动标架的变化率。⁴ 为了方便, 我们以后就称式(3.2.71) 为**矢量函数的运动方程**。这是一个常用的公式, 值得一记。

现在, 我们来用矢量函数的运动方程求 $\mathbf{f}(t)$ 的二阶导数。注意到, 式(3.2.71)右边三项

$$\frac{D\mathbf{f}}{dt}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{f}(t) \tag{3.2.73}$$

中的每一项皆可再用正交归一右手基底 $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ 展开, 于是,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathbf{f}}{dt} \right) + \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f} \right) \\
&= \frac{D^2\mathbf{f}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \left(\frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \right) \\
&= \frac{D^2\mathbf{f}}{dt^2} + \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{f} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}).
\end{aligned} \tag{3.2.74}$$

或者,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right) \\
&= \frac{D}{dt} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right) \\
&= \frac{D}{dt} \left(\frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \right) \\
&= \frac{D^2\mathbf{f}}{dt^2} + \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{f} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}),
\end{aligned} \tag{3.2.75}$$

结果相同。易知

$$\frac{D^2\mathbf{f}}{dt^2} = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{d^2}{dt^2} f_{\alpha}(t) \right) \mathbf{e}_{\alpha}(t). \tag{3.2.76}$$

⁴对运动标架下的观察者而言, 基矢 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 都是静止不动的, 故矢量 $\mathbf{f}$ 的变化全部来源于分量的变化, 而与基矢无关, 这正好就是 $\frac{D\mathbf{f}}{dt}$ 。另外, 有些文献, 将运算符号 $\frac{D}{dt}$ 记为 $\frac{d}{dt'}$ 。

又, 人们习惯称

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (3.2.77)$$

为角加速度。显然

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (3.2.78)$$

总之,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (3.2.79)$$

这是角加速度的一个特殊性质。利用这个特殊性质, 二阶导数可以写为

$$\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2} = \frac{D^2\mathbf{f}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}). \quad (3.2.80)$$

作为例子, 质点在柱坐标系下的加速度为

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (3.2.81)$$

具体来说, 我们有

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \mathbf{e}_z, \quad (3.2.82)$$

$$\frac{D\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z, \quad (3.2.83)$$

$$\frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z, \quad (3.2.84)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z, \quad (3.2.85)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z. \quad (3.2.86)$$

于是, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z + 2[\dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z] \times [\dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z] \\ &\quad + [\ddot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z] \times [\rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \mathbf{e}_z] + [\dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z] \times \left\{ [\dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_z] \times [\rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) + z(t) \mathbf{e}_z] \right\} \\ &= \ddot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\varphi}^2(t) \mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho(t)] \\ &= \ddot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho(t) + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] \mathbf{e}_\varphi(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t) \mathbf{e}_\rho(t) \\ &= [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)] \mathbf{e}_\rho(t) + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] \mathbf{e}_\varphi(t) + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3.2.87)$$

其特例即平面极坐标系, 此时,

$$z(t) = 0. \quad (3.2.88)$$

于是,

$$\mathbf{a} = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)] \mathbf{e}_\rho(t) + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] \mathbf{e}_\varphi(t). \quad (3.2.89)$$

兹即教科书上的标准结果。

§3.2.1.3 运动标架下牛顿第二定律的形式

至此,读者可能疑惑,运动标架较直角坐标系疯狂而复杂,简直是洪水猛兽,启用这样的洪水猛兽有何必有?答案是,这样做的理由有两点:

其一,经典力学的一般标架就是运动标架。这是由牛顿第二定律决定的,它的一般形式是

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.2.90)$$

其中, m 是质点的质量, $\mathbf{a}(t)$ 是质点在时刻 t 时的加速度, $\mathbf{f}(t)$ 是质点在时刻 t 时所受的作用力。因为加速度和作用力都是时间 t 的函数,所以一般地我们有展开,

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha}(t) \mathbf{e}_{\alpha}(t), \quad (3.2.91)$$

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 f_{\alpha}(t) \mathbf{e}_{\alpha}(t). \quad (3.2.92)$$

于是,我们得

$$\sum_{\alpha=1}^3 [ma_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(t)] \mathbf{e}_{\alpha}(t) = 0. \quad (3.2.93)$$

又因为 $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ 不共面(线性无关),所以我们得

$$ma_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2.94)$$

或者,

$$ma_{\alpha}(t) = f_{\alpha}(t), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.2.95)$$

这就是按分量的运动方程。以上所讲是质点动力学方程的一般坐标法,使用的只能是运动标架,直角坐标系属于特殊情形,

$$\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{k}, \quad (3.2.96)$$

它的三个基矢均不随时间变化。在此,作为运动标架的一个例子,在柱坐标系下,质点的动力学方程为

$$m[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)] = f_{\rho}(t), \quad (3.2.97)$$

$$m[2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] = f_{\varphi}(t), \quad (3.2.98)$$

$$m\ddot{z}(t) = f_z(t). \quad (3.2.99)$$

其二,运动标架便于人们使用广义坐标。例如柱坐标和球坐标,它们都含有角变量,直角坐标系是不便于描写角变量的。对于转动,角变量是必须的,因此,对于质点的圆周运动、刚体的转动等,我们只能使用运动标架。例如圆周运动,我们有

$$m\rho\dot{\varphi}^2(t) = -f_{\rho}(t), \quad (3.2.100)$$

$$m\rho\ddot{\varphi}(t) = f_{\varphi}(t). \quad (3.2.101)$$

若将圆心置于坐标原点，第一式即向心加速度的方程，第二式即切向加速度的方程。从以上两式可见，哪怕是象匀速圆周运动这样的简单运动，我们也离不开运动标架。运动标架的重要性可见一斑！

为了便于应用运动标架，我们可以将牛顿第二定律，

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (3.2.102)$$

改写为以下形式，⁵

$$\frac{D\mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (3.2.103)$$

其中的动量 $\mathbf{p}$ 可从质点速度求出，

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.2.104)$$

在以上两式中都只含有简单的分析运算，

$$\frac{D}{dt},$$

它只含对坐标的求导，和简单代数运算，

$$\boldsymbol{\omega} \times,$$

二者便于计算，不易出错。

§3.2.2 球标架的角速度

对于球坐标系，我们有

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (3.2.105)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \quad (3.2.106)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \quad (3.2.107)$$

其中，

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t), \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(t), \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(t), \quad (3.2.108)$$

$$\theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3.2.109)$$

⁵这种形式同刚体力学中的欧拉方程是一样的，后者是

$$\frac{D\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M},$$

其中， $\mathbf{L}$ 是刚体的角动量， $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体的角速度， $\mathbf{M}$ 是刚体所受的外力矩。

于是,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta}(\cos\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k}) \\ &\quad + \dot{\varphi}\sin\theta(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (3.2.110)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta}(\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}) \\ &\quad + \dot{\varphi}\cos\theta(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (3.2.111)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) \\ &= -\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta,\end{aligned}\quad (3.2.112)$$

这说明

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}\mathbf{e}_\varphi. \quad (3.2.113)$$

注意到粒子的位矢

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t), \quad (3.2.114)$$

我们得质点速度

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + (\dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}\mathbf{e}_\varphi) \times (r\mathbf{e}_r) \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (3.2.115)$$

进一步, 我们还可得质点加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (3.2.116)$$

其中,

$$\frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{r}\mathbf{e}_r, \quad (3.2.117)$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} &= 2(\dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}\mathbf{e}_\varphi) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r) \\ &= 2\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}\quad (3.2.118)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\mathbf{e}_r - (\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\theta + \ddot{\theta}\mathbf{e}_\varphi, \quad (3.2.119)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} &= [(\ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\mathbf{e}_r - (\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\theta + \ddot{\theta}\mathbf{e}_\varphi] \times (r\mathbf{e}_r) \\ &= r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}\quad (3.2.120)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
&= [(\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi) \cdot (r \mathbf{e}_r)](\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi) \\
&\quad - (\dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi)^2 (r \mathbf{e}_r) \\
&= r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \mathbf{e}_r - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r \\
&= \left(-r \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 \cos 2\theta \right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned} \tag{3.2.121}$$

各项相加, 得

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 \cos 2\theta \right) \mathbf{e}_r \\
&\quad + \left(2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \left(2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned} \tag{3.2.122}$$

在柱坐标系下, 角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z. \tag{3.2.123}$$

显然, 角速度与角变量的关系, 同笛卡尔坐标系下速度与线变量的关系完全一致, 也很直观,

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}. \tag{3.2.124}$$

然而, 在球坐标系下, 角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi. \tag{3.2.125}$$

我们看到, 此时角速度与角变量的关系已经变得相当复杂了, 也没有什么直观性可得。事实上, 柱坐标系是很特殊的坐标系, 在一般的曲紋坐标系下, 标架旋转的角速度同曲紋坐标的关系都很复杂, 并无直观性可言。由此可见, 同速度相比, 角速度是相当抽象的, 必须认真计算, 不能凭感觉臆造。

§3.2.3 无限小角位移

利用角速度, 我们还可以定义一个所谓的无限小角位移,

$$d\boldsymbol{\Omega} := \boldsymbol{\omega}(t)dt. \tag{3.2.126}$$

既然角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是矢量, 无限小角位移 $d\boldsymbol{\Omega}$ 当然也是矢量。⁶

对于柱坐标系和球坐标系, 我们分别有

$$d\boldsymbol{\Omega} = d\varphi \mathbf{e}_z, \tag{3.2.127}$$

$$d\boldsymbol{\Omega} = \cos \theta d\varphi \mathbf{e}_r - \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\theta + d\theta \mathbf{e}_\varphi. \tag{3.2.128}$$

⁶这里, $\boldsymbol{\omega}(t)dt$ 是一个所谓的一次微分式。数学上, 一次微分式一般来说并不是完整微分 (或曰, 全微分), 例如功微元, 但这里角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 在物理上总是时间 t 的连续函数, 其原函数是存在的, 故一次微分式 $\boldsymbol{\omega}(t)dt$ 总是某个关于时间 t 的连续可微函数的微分。这说明, 以这种方式定义的无限小角位移确实是一个完整微分, 记之为 $d\boldsymbol{\Omega}$ 是合适的, 毋庸虑也, 这里, $\boldsymbol{\Omega}$ 可以是 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 的任一原函数。

可见，无限小角位移同角变量的微分之间，一般不存在简单的关系，而是很复杂，要具体计算决定。

利用无限小角位移，矢量的微分可以写为

$$d\mathbf{f} = D\mathbf{f} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{f}, \quad (3.2.129)$$

其中，

$$D\mathbf{f} := \frac{D\mathbf{f}}{dt} dt = \sum_{\alpha=1}^3 df_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (3.2.130)$$

是相对运动标架的微分⁷。

事实上，我们也可以先定义无限小角位移，再定义角速度。这只要对前面所讲的引理和定理略加修改即可。容易得知，无限小角位移可定义如下，

$$d\boldsymbol{\Omega} := [\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_2] \mathbf{e}_1 + [\mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{e}_3] \mathbf{e}_2 + [\mathbf{e}_2 \cdot d\mathbf{e}_1] \mathbf{e}_3. \quad (3.2.131)$$

此时，基矢的微分可以写为

$$d\mathbf{e}_i = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.132)$$

至于角速度，则定义为无限小角位移对时间的微商，

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}. \quad (3.2.133)$$

明显地，这两种定义方式是等价的。到底是先求角速度，还是先求无限小角位移，可依爱好与方便而定。

除无限小角位移外，还有有限角位移的说法。所谓有限角位移，是指正交归一右手标架在朝向上的改变。在图3.2.9中，我们先将标架沿 $\mathbf{e}_2$ 轴逆时针旋转 $\pi/2$ ，再将标架沿 $\mathbf{e}_3$ 逆时针旋转 $\pi/2$ 。与此相反，在3.2.10中，我们先将标架沿 $\mathbf{e}_3$ 轴逆时针旋转 $\pi/2$ ，再将标架沿 $\mathbf{e}_2$ 逆时针旋转 $\pi/2$ 。两种情形下，在起始时刻，标架的朝向是相同的。但分别经过两次连续操作之后，最后标架在两种情形下朝向是不同的。这说明，有限角位移的结合法与结合的次序有关，不满足交换律，因而有限角位移并不是矢量（矢量的结合法，称之为加法，是满足交换律的）。从无限小角位移与有限角位移两者的定义可

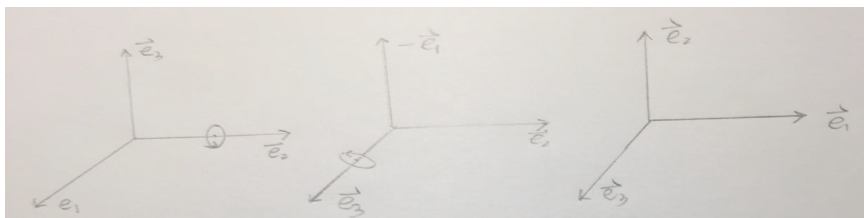


图 3.2.9. 有限角位移的加法：先绕 $\mathbf{e}_2$ 轴转 $\pi/2$ ，再绕 $\mathbf{e}_3$ 轴转 $\pi/2$ 。

以看出，它们相互之间并非微分与积分之间的关系，即，无限小角位移不是有限角位移的微分，有限角位移也不是无限小角位移的积分。否则的话，有限角位移必然同无限小角位移一样，是个矢量并满

⁷这里，微元 $D\mathbf{f}$ 仅是全微分 $d\mathbf{f}$ 的一部分，运动标架空间所能测量的那部分。此性质类似于微分几何中的协变微分，它也仅是全微分的一部分，切空间所能测量的那部分。故此，仿协变微分，这里亦以 D 算子记之。至于导数 $\frac{D\mathbf{f}}{dt}$ ，它与微分 $D\mathbf{f}$ 有相同的意义，是协变导数的类似物。

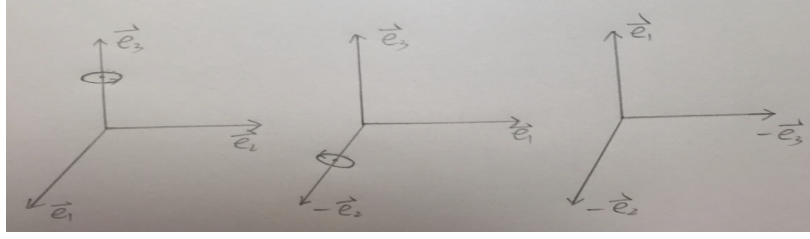


图 3.2.10. 有限角位移的加法：先绕 $\mathbf{e}_3$ 轴转 $\pi/2$ ，再绕 $\mathbf{e}_2$ 轴转 $\pi/2$ 。

足交换律。⁸ 那么，这两者之间到底有无关系？若有，又是怎样的关系呢？容易看出，正交归一右手标架在朝向上的改变，完全由基底的运动决定，而基底的运动则完全由无限小角位移决定。可见，无限小角位移和有限角位移这二者之间是有关系的，这个关系就是基底的运动方程，

$$d\mathbf{e}_i = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.134)$$

对这组运动方程进行积分，我们就能获得正交归一右手标架在朝向上的改变。可见，同有限位移与无限小位移（或速度）相比，有限角位移与无限小角位移（或角速度）这二者之间的关系不是那么直接，而是有点拐弯抹角的了。切莫望文生义！

最后，我们总结一下角速度理论：凡是正交归一右手标架，其基底的运动都可以用角速度进行描写，

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2.135)$$

其中，

$$\boldsymbol{\omega} = a_{23} \mathbf{e}_1 + a_{31} \mathbf{e}_2 + a_{12} \mathbf{e}_3, \quad (3.2.136)$$

这里诸系数 a_{ij} 由下式给出，

$$a_{ij}(t) = \mathbf{e}_j \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}. \quad (3.2.137)$$

相应地，一个矢量函数的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{D\mathbf{f}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}. \quad (3.2.138)$$

这是个一般的运动方程，基矢量的运动方程乃其特例，因为

$$\frac{D\mathbf{e}_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

至于角加速度，其定义类似于加速度，为角速度对时间的导数，

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{a}_{23} \mathbf{e}_1 + \dot{a}_{31} \mathbf{e}_2 + \dot{a}_{12} \mathbf{e}_3.$$

基底的运动也可以用微分形式进行刻画，此时，

$$d\mathbf{e}_i = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2.139)$$

⁸由是可知，无限小角位移的积分，

$$\Delta\boldsymbol{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\omega} dt,$$

绝不是有限角位移。

其中, $d\boldsymbol{\Omega}$ 乃无穷小角位移,

$$d\boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{e}_3) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_2 \cdot d\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_3. \quad (3.2.140)$$

此时, 矢量的微分可以写为如下之形式,

$$d\mathbf{f} = D\mathbf{f} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{f}. \quad (3.2.141)$$

两种形式是相互等价的, 可依方便而取用之。⁹

到此为止, 我们看到, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的定义方式同线速度 $\mathbf{v}$ 有很大的不同。确实, 这个定义方式上的不同将会引起二者在代数和物理性质上的重大区别: 后者是标准矢量, 而前者则属赝矢量。具体内容, 见下小节。

§3.2.4 赝矢量与赝标量

在空间反演下, 矢量可以分为极矢量 (polar vector) 和赝矢量 (pseudovector)。赝矢量又名轴矢量 (axial vector)。

所谓空间反演是指如下的直角坐标变换:

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z.$$

明显地, 在空间反演下, 质点的位矢将改变符号,

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}.$$

定义3.2.1. 凡是在空间反演下象位矢一样改变符号的矢量就叫极矢量。

按定义, 质点的位矢自然是一个极矢量。除质点的位矢以外, 质点的速度和动量也是极矢量, 这是因为在空间反演下,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} \rightarrow \frac{d}{dt}(-\mathbf{r}) = -\frac{d}{dt}\mathbf{r}.$$

这意味着

$$\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v},$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \rightarrow -m\mathbf{v} = -\mathbf{p}.$$

二者在空间反演下均改变符号, 故都是极矢量。

此外, 质点的加速度也是一个极矢量, 这是因为

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(-\mathbf{r}) = -\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}.$$

于是, 在空间反演下质点的加速度将改变符号,

$$\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a},$$

⁹从一般的观点看, 用微分形式进行刻画更为究竟, 在微分几何中, 外微分是描写运动标架的天然语言, 最为贴切。

因此它是一个极矢量。利用牛顿第二定律,

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a},$$

不难得知,力也是一个极矢量。

定义3.2.2. 凡是在空间反演下保持符号不变的矢量就叫**赝矢量**或**轴矢量**。

按定义,质点的角动量 $\mathbf{L}$ 和力矩 $\mathbf{M}$ 都是赝矢量,这是因为在空间反演下,二者符号均将保持不变,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{f}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{M}.$$

上述例子表明,叉乘运算可能改变矢量的属性,事实上,如果

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

则易知,当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是极矢量或赝矢量时, $\mathbf{c}$ 是赝矢量;当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 一个极矢量,另一个是赝矢量时, $\mathbf{c}$ 是极矢量。这就是叉乘运算与矢量极赝属性的一般关系。

角速度是一个著名的赝矢量,这可从基矢的运动方程证出,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

首先,我们指出,由于三个运动基矢满足右手关系,

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

因此, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 不可能都是极矢量。事实上,不难得知,作为运动基矢, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 或者都是赝矢量,或者其中两个是极矢量,另一个是赝矢量,只有这两种可能性,别无其它。例如,直角坐标系的三个运动基矢就都是赝矢,这是因为,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z},$$

三者在空间反演下均保持不变。又如,柱坐标系的三个运动基矢中,两个是极矢,一个是赝矢,这是因为,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z},$$

三者之中,前二在空间反演下改变符号,而最后一个则保持不变。球坐标系下的三个运动基矢也是这样,两个是极矢,一个是赝矢。

其次,注意到当 $\mathbf{e}_i$ 是极矢量时,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_i$$

为极矢量;当 $\mathbf{e}_i$ 是赝矢量时,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_i$$

为赝矢量。由是可知，当 $\mathbf{e}_i$ 是极矢量时，在空间反演下基矢运动方程两边必须同时改变符号；当 $\mathbf{e}_i$ 是赝矢量时，在空间反演下基矢运动方程两边必须同时保持符号不变。由此不难推知，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 必是一个赝矢量，因为，否则的话，在空间反演下基矢运动方程两边不能保持符号同时不变或同时改变。既然角速度是一个赝矢量，角加速度和无限小角位移自然也都是赝矢量。

我们知道，一个标准的标量应该在空间反演下保持不变，例如时间 t ，粒子的质量 m ，以及粒子的动能 T ，

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

但也有这样的标量，它在空间反演下改变符号：

定义3.2.3. 凡是在空间反演下改变符号的标量就叫做赝标量 (*pseudoscalar*)。

例如，三矢量的混合积，

$$\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 同时都是极矢量时， α 就是一个赝标量。当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中两个是赝矢量，另一个是极矢量时， α 也是一个赝标量。此外，两矢量的点积，

$$\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中一个是赝矢量，另一个是极矢量时， β 也是一个赝标量。此外，容易看出，只有当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三者中两个是极矢量，另一个是赝矢量时， α 才是一个真正的标量。同样，也只有当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 两者均是赝矢量，或者均是极矢量时， β 才是一个真正的标量。

§3.3 相对运动

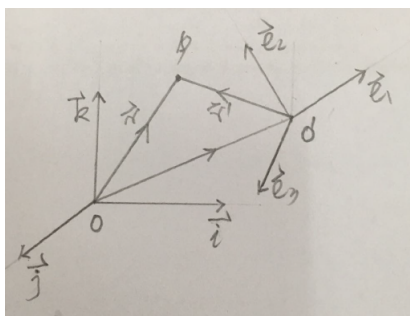


图 3.3.11. 质点的相对运动（注意， $\mathbf{i}$ 与 $\mathbf{j}$ 标错了，应互换）

如图3.3.11所示，设有两个参照系， S 和 S' ，其中 S 为静止坐标系， S' 为运动坐标系，它相对于 S 而运动。设 S 系的标架为 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ， S' 系的标架为 $\{O'(t); \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\}$ ，两者均为笛卡尔系。通常，约定两个参照系在初始时刻 $t = 0$ 相互重合，即

$$O'(0) = O; \mathbf{e}_1(0) = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2(0) = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3(0) = \mathbf{k}. \quad (3.3.1)$$

显然， S' 系既有平动也有转动：所谓平动即指原点 $O'(t)$ 的平移，可用径矢 $\overrightarrow{OO'}(t)$ 来描写；所谓转动即指正交归一右手基底 $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\}$ 的旋转，可用角速度为 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 来描写。

令质点 p 相对于 S 和 S' 系的位矢分别为 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ 。由图3.3.11易见

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{Op}, \quad \mathbf{r}'(t) = \overrightarrow{O'p}. \quad (3.3.2)$$

由三角形法则,

$$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}, \quad (3.3.3)$$

我们有

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \mathbf{r}'(t), \quad (3.3.4)$$

其中,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{e}_1(t) + y'(t)\mathbf{e}_2(t) + z'(t)\mathbf{e}_3(t). \quad (3.3.5)$$

于是,

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}(t) + \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}, \quad (3.3.6)$$

亦即,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'(t), \quad (3.3.7)$$

其中, $\mathbf{v}(t)$ 为质点 p 相对于 S 系的速度,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3.3.8)$$

$\mathbf{u}(t)$ 是 S' 系原点 O' 相对于对于 S 系的平移速度,

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}(t), \quad (3.3.9)$$

$\mathbf{v}'(t)$ 为质点 p 相对于 S' 系的速度,

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{D\mathbf{r}'}{dt} = \dot{x}'(t)\mathbf{e}_1(t) + \dot{y}'(t)\mathbf{e}_2(t) + \dot{z}'(t)\mathbf{e}_3(t), \quad (3.3.10)$$

最后一项则是 S' 系的转动对质点 p 运动速度的影响。总而言之, 上式表达了同一质点 p 分别相对于两个坐标系的速度 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}'$ 之间的关系。

现在, 进一步对时间求导, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{a}'(t) + 2\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}'(t) \\ &\quad + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{r}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'(t)], \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

其中, $\mathbf{a}(t)$ 为质点 p 相对于 S 系的加速度,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (3.3.12)$$

$\dot{\mathbf{u}}(t)$ 是 S' 系原点 O' 相对于对于 S 系的平移加速度,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO'}(t), \quad (3.3.13)$$

$\mathbf{a}'(t)$ 为质点 p 相对于 S' 系的加速度,

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{D\mathbf{v}'}{dt} = \frac{D^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \ddot{x}'(t)\mathbf{e}_1(t) + \ddot{y}'(t)\mathbf{e}_2(t) + \ddot{z}'(t)\mathbf{e}_3(t), \quad (3.3.14)$$

而 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 则为 S' 系转动的角加速度,

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

显然, 此式表达了同一质点 p 分别相对于两个坐标系的加速度 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 之间的关系。

上式右边的第二项, $2\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}'(t)$, 就是著名的 Coriolis acceleration, 相关应用见下节。

以上是一般的情况, 其中 S' 系既可以平动, 也可以转动。在特殊情况下, S' 系可以没有转动, 而只有平移, 即,

$$O' = O'(t); \mathbf{e}_1(t) = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{k}. \quad (3.3.15)$$

于是,

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (3.3.16)$$

此时, 我们有

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}'(t), \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{a}'(t). \quad (3.3.18)$$

反之, 如果 S' 系没有平移, 只有转动, 即,

$$O'(t) = O; \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(t), \quad (3.3.19)$$

则

$$\mathbf{u}(t) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = 0. \quad (3.3.20)$$

此时, 我们有

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'(t), \quad (3.3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}'(t) + 2\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}'(t) \\ &\quad + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{r}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'(t)]. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

这是两种典型的特殊情况。其它的特殊情况读者不难自行写出。

最后, 如果 S 和 S' 系均是惯性参考系, 则

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{c}, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (3.3.23)$$

即, $\mathbf{u}(t)$ 是一个常矢量, 并且 S' 没有旋转运动, 这是因为任意两个惯性参考系最多相差一个匀速直线运动。于是,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u} + \mathbf{v}'(t), \quad (3.3.24)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t). \quad (3.3.25)$$

两个惯性参照系之间的变换称为**伽利略变换** (Galilean transformation)。按照前面关于两个参照系标准位形的约定, 容易知道,

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{r}'(t). \quad (3.3.26)$$

由是可知, 若计入时间, 我们就有时空变换,

$$t' = t, \quad (3.3.27)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t. \quad (3.3.28)$$

这就是伽利略变换的表达式, 它显然是可逆变换, 其逆变换为

$$t = t', \quad (3.3.29)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t'. \quad (3.3.30)$$

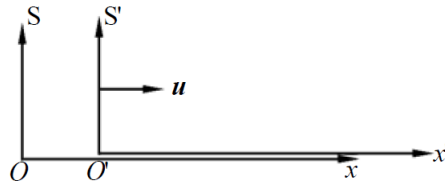


图 3.3.12. 伽利略变换

为了方便, 如图3.3.12所示, 人们常将 S 和 S' 系相对运动的方向取为 x 轴的正向, 于是,

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}. \quad (3.3.31)$$

这样, 我们有

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z. \end{cases} \quad (3.3.32)$$

这是伽利略变换最常见的形式。伽利略变换反映了经典的时空观, 在狭义相对论中, 它将被**洛伦兹变换** (Lorentz transformation) 所取代, 并且可以证明伽利略变换是洛伦兹变换的低速近似。

§3.4 科里奥利加速度与科里奥利力

本节, 作为角速度与运动标架的一个应用, 我们来讨论科里奥利加速度 (Coriolis acceleration) 和科里奥利力 (Coriolis force)。

地球既有公转, 又有自转, 二者均有加速运动, 因此, 地球当然不是惯性系。公转的加速度较自转加速度小得多, 因此, 我们下面将忽略公转, 只考虑地球的自转。设想有一个不自转的地球, 取它作惯性系, 记之为 xyz 坐标系, 地球相对此惯性系自转。现在, 在地球上绑定一个笛卡尔坐标系, 记之为 $x'y'z'$ 坐标系, 它随地球的自转而转动, 取地球的自转轴为此笛卡尔坐标系的 z' 轴, 取赤道平面

为此笛卡尔坐标系的 $x'y'$ 平面。我们称此坐标系为地球参照系。显然，地球参照系在惯性系中作定轴转动， z' 轴即其转轴也。以下，记惯性参照系的标架为

$$\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad (3.4.1)$$

记地球参照系的标架为

$$\{O'; \mathbf{e}_{x'}(t), \mathbf{e}_{y'}(t), \mathbf{e}_{z'}(t)\}. \quad (3.4.2)$$

此二均为正交归一右手系，并且，为了方便，无妨假定在初始时刻 $t = 0$ 时，二者重合，即，

$$\begin{cases} O' = O, \\ \mathbf{e}_{x'}(0) = \mathbf{i}, \\ \mathbf{e}_{y'}(0) = \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_{z'}(0) = \mathbf{k}. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

这样，在时刻 t ，我们便有

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{x'}(t) = \cos \varphi(t) \mathbf{i} + \sin \varphi(t) \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_{y'}(t) = -\sin \varphi(t) \mathbf{i} + \cos \varphi(t) \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_{z'}(t) = \mathbf{k}, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

其中 $\varphi(t)$ 是时刻 t 下地球参照系的 x' 轴与惯性参照系的 x 轴所成的夹角，见图3.4.13。

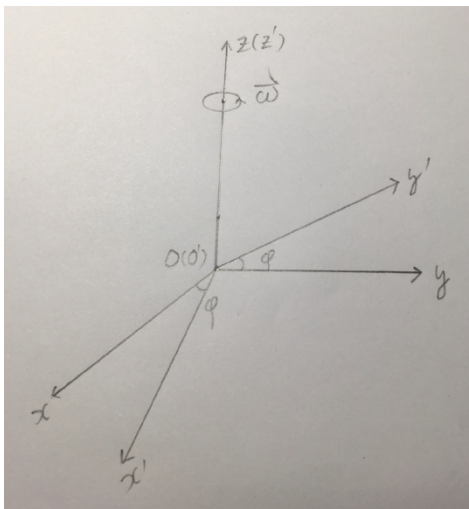


图 3.4.13. 地球的自转

作为正交归一右手系，地球参照系标架基底

$$\{\mathbf{e}_{x'}(t), \mathbf{e}_{y'}(t), \mathbf{e}_{z'}(t)\} \quad (3.4.5)$$

的运动可以用角速度加以描写，设此角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ ，显然，它就是地球的自转角速度。类似于柱坐标系，容易算得

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k}. \quad (3.4.6)$$

一般假定它是一个常矢量，

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}, \quad \omega = \dot{\varphi} = \text{constant}. \quad (3.4.7)$$

这样, 地球参照系标架基底的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_{x'}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{x'}(t), \quad (3.4.8)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_{y'}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{y'}(t), \quad (3.4.9)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_{z'}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{z'}(t). \quad (3.4.10)$$

现在, 设有一质点 p 在地球表面上运动, 或在表面外空间之中运动。记此质点在惯性参照系的位矢为 $\mathbf{r}(t)$, 在地球参照系的位矢为 $\mathbf{r}'(t)$ 。显然,

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{Op}, \quad \mathbf{r}'(t) = \overrightarrow{O'p}. \quad (3.4.11)$$

按照前面对两个参照系位形的设置, 两点 O 与 O' 重合, 见图3.4.13, 故

$$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{O'p}. \quad (3.4.12)$$

这说明

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t). \quad (3.4.13)$$

现在, 将 $\mathbf{r}'(t)$ 在运动基底 $\{\mathbf{e}_{x'}(t), \mathbf{e}_{y'}(t), \mathbf{e}_{z'}(t)\}$ 下分解,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{e}_{x'}(t) + y'(t)\mathbf{e}_{y'}(t) + z'(t)\mathbf{e}_{z'}(t), \quad (3.4.14)$$

其中, (x', y', z') 是质点在地球参照系下的直角坐标。于是, 我们有

$$\mathbf{r}(t) = x'(t)\mathbf{e}_{x'}(t) + y'(t)\mathbf{e}_{y'}(t) + z'(t)\mathbf{e}_{z'}(t). \quad (3.4.15)$$

这样, 质点在惯性参照系下的速度 $\mathbf{v}$ 为

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (3.4.16)$$

其中, $\mathbf{v}'(t)$ 是质点在地球参照系下的速度,

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}'(t)\mathbf{e}_{x'}(t) + \dot{y}'(t)\mathbf{e}_{y'}(t) + \dot{z}'(t)\mathbf{e}_{z'}(t). \quad (3.4.17)$$

进一步, 质点在惯性参照系下的加速度 $\mathbf{a}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}'(t) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

其中, $\mathbf{a}'(t)$ 是质点在地球参照系下的加速度,

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}'(t)\mathbf{e}_{x'}(t) + \ddot{y}'(t)\mathbf{e}_{y'}(t) + \ddot{z}'(t)\mathbf{e}_{z'}(t). \quad (3.4.19)$$

式(3.4.18)右边第二项,即

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t), \quad (3.4.20)$$

就是所谓的Coriolis acceleration,它来源于地球的自转。

按照牛顿第二定律(它只在惯性参照系下才成立),我们有

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (3.4.21)$$

其中, m 是质点的质量, $\mathbf{f}$ 是质点所受的作用力。上式乃质点在惯性参照系下的动力学方程。将式(3.4.18)中的加速度 $\mathbf{a}$ 代入,得

$$m\mathbf{a}'(t) + m[2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t)] + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = \mathbf{f}. \quad (3.4.22)$$

这就是目前所考虑的质点 p 在惯性参照系下的动力学方程的具体形式。移项,得

$$m\mathbf{a}'(t) = \mathbf{f} - m[2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t)] - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]. \quad (3.4.23)$$

通常将上式理解为在地球参照系下质点 p 的动力学方程。地球参照系是非惯性参照系,因此,上式乃非惯性参照系下的动力学方程。上式右边的第一项是真实的作用力 $\mathbf{f}$; 第二项,

$$-m[2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t)], \quad (3.4.24)$$

是所谓的科里奥利力Coriolis force,它来源于科里奥利加速度; 第三项,

$$-m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})], \quad (3.4.25)$$

是所谓的惯性离心力。在牛顿力学框架下,科里奥利力和惯性离心力,二者咸非真实力,而是形式力。

§3.5 内禀坐标系*

当质点约束在光滑的曲线或曲面上运动时,譬如单摆,质点就约束在圆周上运动,人们还可以引用一种内禀于曲线或曲面的坐标系——Frenet标架。因为Frenet标架完全由曲线或曲面的几何性质决定,它反映了曲线或曲面的内在属性,因此,人们有时又称之为**内禀坐标系**。按照Newton第二定律,质点的运动是由常微分方程支配的,要获得质点轨道等动力学信息,人们需要求解常微分方程。从数学角度看,方程现在既然受到了曲线或曲面的约束,利用曲线或曲面的几何信息,当然有益于它的求解。是故,在处理约束问题时,使用内禀坐标系将是一种不错的选择。

要选用内禀坐标系,人们需要具备足够的微分几何方面的知识。但若仅为了解这种方法,这正是本节的目的,却无需如此,人们只须理解平面曲线的Frenet标架即可,它是相对简单的。

为了方便,我们总是将平面看作空间的一部分,并将它安置为空间笛卡尔坐标系 xyz 的 xy 平面。设 $\mathbf{r}(t)$ 是一条平面曲线,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a, b], \quad (3.5.1)$$

其中, t 是参数。物理上, 我们可以将 t 想象为时间, 将 $\mathbf{r}(t)$ 想象为质点的轨迹。我们将 $\mathbf{r}(t)$ 视作有向曲线, 它的正向即参数 t 增大的方向。以后, 我们总是假定有向曲线 $\mathbf{r}(t)$ 有足够好的解析性质, 也就是它有我们所需要的各阶导数, 并且这些导数还是连续的。

大家知道, $\mathbf{r}'(t)$ 是曲线在 t 点的一个切矢,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}. \quad (3.5.2)$$

不过, 该切矢明显地与外部参数有关, 不是完全内禀的。为此, 我们引入弧长参数 s , 它由所谓的弧长微元决定,

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt. \quad (3.5.3)$$

在保持曲线定向的参数变换下,

$$t = \varphi(u), \quad \varphi'(u) > 0, \quad (3.5.4)$$

其中, u 是任意新参数, 增大方向与 t 一致。于是,

$$\mathbf{r}'(u) = \mathbf{r}'(t) \frac{dt}{du} = \mathbf{r}'(t)\varphi'(u), \quad (3.5.5)$$

并且

$$ds = |\mathbf{r}'(u)|du = |\mathbf{r}'(t)\varphi'(u)|du = |\mathbf{r}'(t)|\varphi'(u)du = |\mathbf{r}'(t)|dt. \quad (3.5.6)$$

可见, 弧长微元与外部参数无关, 它是曲线的一个内禀性质。另外, 弧长 s 的增大方向显然同 t 一致, 即它仍保持曲线的定向。总之, 弧长可谓是曲线的一个内禀参数。以后, 我们将曲线 $\mathbf{r}(t)$ 记为 $\mathbf{r}(s)$ 。

引用上述之弧长, 我们可以得到曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的内禀切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$,

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (3.5.7)$$

它与外部参数无关, 而且显然是一个单位矢量。注意到 $\mathbf{k}$ 是 xy 平面的自然法矢, 它当然就是该平面内一切曲线的内禀法矢。由此, 我们还得到平面曲线 $\mathbf{r}(s)$ 另一个内禀法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$,

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}(s). \quad (3.5.8)$$

$\boldsymbol{\beta}(s)$ 显然与切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 垂直, 并且

$$\{\mathbf{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{k}\} \quad (3.5.9)$$

构成了平面曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在 s 处的一个正交归一右手标架, 通常称之为Frenet标架。显然, Frenet标架是内禀于曲线的, 因此, 它是一个内禀坐标系。此外, Frenet标架是一个局部标架, 它将随内禀参数 s 的变化而变化, 因而它还是一个运动标架。

按照上节的理论, 我们可以用一个角速度 $\boldsymbol{\omega}(s)$ 来描写Frenet标架的运动,

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{\omega}(s) \times \boldsymbol{\alpha}(s), \quad (3.5.10)$$

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\omega}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s), \quad (3.5.11)$$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}(s) \times \mathbf{k}. \quad (3.5.12)$$

由于 $\mathbf{k}$ 乃常矢量, 因此,

$$\frac{d}{ds}\mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (3.5.13)$$

由是可知, 角速度 $\boldsymbol{\omega}(s)$ 必与矢量 $\mathbf{k}$ 平行, 即

$$\boldsymbol{\omega}(s) = \omega(s)\mathbf{k}. \quad (3.5.14)$$

这样, 我们有

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s) = [\omega(s)\mathbf{k}] \times \boldsymbol{\alpha}(s) = \omega(s)\boldsymbol{\beta}(s). \quad (3.5.15)$$

这意味着角速率 $\omega(s)$ 可以按如下方式求出,

$$\omega(s) = \boldsymbol{\beta}(s) \cdot \frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s). \quad (3.5.16)$$

注意到

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}, \quad (3.5.17)$$

我们得

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}, \quad (3.5.18)$$

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s) = x''(s)\mathbf{i} + y''(s)\mathbf{j}, \quad (3.5.19)$$

$$\boldsymbol{\beta}(s) = -y'(s)\mathbf{i} + x'(s)\mathbf{j}. \quad (3.5.20)$$

于是,

$$\omega(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}. \quad (3.5.21)$$

上面, 我们讨论了 $\omega(s)$ 的物理意义: 角速率。它还有几何意义。设 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 与 x 轴成夹角 $\theta(s)$, 由于它是单位矢量, 我们有

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \cos\theta(s)\mathbf{i} + \sin\theta(s)\mathbf{j}. \quad (3.5.22)$$

于是,

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s) = [-\sin\theta(s)\mathbf{i} + \cos\theta(s)\mathbf{j}]\theta'(s), \quad (3.5.23)$$

$$\boldsymbol{\beta}(s) = -\sin\theta(s)\mathbf{i} + \cos\theta(s)\mathbf{j}. \quad (3.5.24)$$

这样, 我们得

$$\omega(s) = \boldsymbol{\beta}(s) \cdot \frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(s) = \theta'(s) = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.5.25)$$

上式表明, $\omega(s)$ 等于内禀切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 之方向随弧长 s 变化的快慢。明显地, 内禀切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 之方向随弧长 s 变化的快慢反映了曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的弯曲程度, 变化得越快, 曲线越是弯曲。特别地, 若

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad (3.5.26)$$

则 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 为常矢,

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{c}, \quad (3.5.27)$$

曲线退回为直线,这在直观上是显然的。正因如此,在几何上,人们称这个变化率为**相对曲率**,并记之为 κ_r ,

$$\kappa_r(s) = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.5.28)$$

它的大小就是**绝对曲率** κ ,通常简称**曲率**,

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|. \quad (3.5.29)$$

曲率的倒数即**曲率半径** ρ ,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \left| \frac{ds}{d\theta} \right|. \quad (3.5.30)$$

几何上,它恰好是曲线密切圆的半径,故得此称谓。

总而言之,对于平面曲线,我们有

$$\omega(s) = \kappa_r(s) = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.5.31)$$

如果使用一般参数 t ,则

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} [x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}], \quad (3.5.32)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} [-y'(t)\mathbf{i} + x'(t)\mathbf{j}], \quad (3.5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(t) &= \left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{\alpha}(t) \right] \frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\alpha}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} [x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}] \right. \\ &\quad \left. + [x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}] \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

因之,我们得

$$\omega(t) = \kappa_r(t) = \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \frac{d}{ds}\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}^{3/2}. \quad (3.5.35)$$

若进一步,取 x 作参数,即 $t = x$,则

$$\omega(x) = \kappa_r(x) = \frac{y''(x)}{[1 + [y'(x)]^2]^{3/2}}. \quad (3.5.36)$$

作为例子,我们来考察半径为 R 的圆,

$$\mathbf{r}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (3.5.37)$$

首先,我们有

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt = Rdt. \quad (3.5.38)$$

于是,

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{-R \sin t dt \mathbf{i} + R \cos t dt \mathbf{j}}{R dt} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}. \quad (3.5.39)$$

由此, 得

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}(s) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}, \quad (3.5.40)$$

$$\frac{d}{ds} \boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{-\cos t dt \mathbf{i} - \sin t dt \mathbf{j}}{R dt} = -\frac{1}{R} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}). \quad (3.5.41)$$

由此可见, $\boldsymbol{\beta}(t)$ 与 $\mathbf{r}(t)$ 反平行, 永远指向圆心。最后,

$$\omega(t) = \kappa_r(t) = \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \frac{d}{ds} \boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{1}{R}, \quad (3.5.42)$$

以及

$$\rho = \frac{1}{|\kappa_r(t)|} = R. \quad (3.5.43)$$

现在, 我们来讨论内禀坐标系在力学上的应用。首先, 质点的速度 $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\alpha} |\mathbf{r}'(t)| = v(t) \boldsymbol{\alpha}(t). \quad (3.5.44)$$

其次, 质点的加速度 $\mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) + v(t) \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) \\ &= \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) + v(t) \left(\frac{d}{ds} \boldsymbol{\alpha}(t) \right) \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) + v^2(t) \frac{d}{ds} \boldsymbol{\alpha}(t) \\ &= \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) + v^2(t) (\kappa_r(t) \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) + v^2(t) \kappa_r(t) \boldsymbol{\beta}(t) \\ &= \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) \pm \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \boldsymbol{\beta}(t). \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

最后, 质点的动力学方程,

$$\frac{dv}{dt} \boldsymbol{\alpha}(t) \pm \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{f}(t), \quad (3.5.46)$$

其中, m 是质点的质量, $\mathbf{f}$ 是质点的受力, 它包括约束力和其它外力。

作为一个例子, 我们来考察单摆。设 $\theta(t)$ 是单摆对最低点的偏离角, 则

$$\mathbf{r}(t) = l \sin \theta(t) \mathbf{i} - l \cos \theta(t) \mathbf{j}, \quad (3.5.47)$$

其中, l 是摆长。于是,

$$v(t) = l \dot{\theta}(t), \quad \rho(t) = l. \quad (3.5.48)$$

这样, 质点的动力学方程为

$$l \ddot{\theta} \boldsymbol{\alpha}(t) + l \dot{\theta}^2 \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{m} [N(t) \boldsymbol{\beta}(t) - mg \mathbf{e}_z], \quad (3.5.49)$$

其中, $N(t)$ 乃摆绳之张力, 即约束力 (它将质点约束在圆周上运动), g 为重力加速度。注意到

$$\mathbf{e}_z = \sin \theta(t) \boldsymbol{\alpha}(t) + \cos \theta(t) \boldsymbol{\beta}(t), \quad (3.5.50)$$

我们有动力学方程，

$$l\ddot{\theta}\boldsymbol{\alpha}(t) + l\dot{\theta}^2\boldsymbol{\beta}(t) = -g\sin\theta\boldsymbol{\alpha}(t) + \left[\frac{N(t)}{m} - g\cos\theta\right]\boldsymbol{\beta}(t). \quad (3.5.51)$$

斯即方程组，

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (3.5.52)$$

$$N = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2. \quad (3.5.53)$$

这些都是大家熟悉的结果，余不具论矣。

第4章 实变复值函数

§4.1 复数

在量子力学中, 物质波的波函数 $\psi(x, y, z, t)$ 是取复数为值的, 其中, x, y, z 代表空间坐标, t 代表时间。由是可知, 复数乃是物理学的内在需要, 学习物理必须学习复数以及复值函数。在经典力学中, 虽然一切力学量都是取实数为值的, 但在有些问题中, 譬如, 三角函数与周期现象, 我们仍不妨将其扩张至复数域中来考虑。在求解常微分方程或偏微分方程的时候, 人们更是如此。其间道理, 正如求实系数一元二次方程的根, 哪怕是寻找实根, 最好也是到更广泛的复域中去讨论, 因为在复数域中, 根的分布情况是完全清楚的。在这一节中, 我们主要介绍复数以及实变复值函数, 至于更一般的复变复值函数, 那是以后更高级课程的任务, 例如, 《数学物理方法》或《复变函数论》。

§4.1.1 定义

我们把形如

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (4.1.1)$$

的数称为**复数**, 记作 z , 即

$$z = x + iy. \quad (4.1.2)$$

这里, i 是**虚数单位**,

$$i = \sqrt{-1}, \quad (4.1.3)$$

x, y 分别称为 z 的**实部**和**虚部**, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (4.1.4)$$

全体复数组成的集合叫**复数域**, 记作 $\mathbb{C}$ 。两个复数 z_1 和 z_2 相等, 当且仅当它们的实部与虚部分别相等, 即

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \quad (4.1.5)$$

实数有加、减、乘、除四则运算, 复数也有。设 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, 复数的加法和乘法定义如下,

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad (4.1.6)$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (4.1.7)$$

在上列第二式之中,把乘积展开为 i 的多项式,然后用 $i^2 = -1$ 代入即得右边的结果。减法和除法定义为加法和乘法的逆运算。我们有

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2), \quad (4.1.8)$$

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad a_2 + ib_2 \neq 0. \quad (4.1.9)$$

可以证明,复数的四则运算满足同实数四则运算一样的运算法则(交换律、结合律、分配律等)。复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的扩张。

从复数加法与乘法的定义容易看出,

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad (4.1.10)$$

$$\alpha(a_1 + ib_1) = (\alpha a_1) + i(\alpha b_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.1.11)$$

因此,复域可以看作实数域上线性空间,且以 $\{1, i\}$ 为其基底。这就是说,复域乃二维实空间,因而可以同平面建立一一对应:

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 : z = x + iy \mapsto (x, y) \mapsto \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1.12)$$

斯即复数的几何表示,人们常常直接将 z 称之为点,或**矢量**,同时将相应的平面称之为**复平面** $\mathbb{C}$ 。由是可知,我们还可以引进复数两点 z_1 和 z_2 之间的**距离**,

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (4.1.13)$$

以及复数 z 的**模**,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.1.14)$$

容易看出,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|. \quad (4.1.15)$$

明显地,距离与模满足三角不等式,

$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3), \quad (4.1.16)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (4.1.17)$$

反过来,人们也可以将 z 称为点 (x, y) 或**矢量** $\mathbf{r}$ 的复表示,因而, $\{1, i\}$ 也就是直角基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的复表示。

如果将平面笛卡尔坐标系换为极坐标系,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

那么,复数还可以有**三角表示**,

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.1.19)$$

极角 φ 是矢量 z 与 x 轴的夹角, 它本身可以有无穷多个值, 人们将之记作 $\operatorname{Arg} z$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.20)$$

并称之为 z 的**辐角**。在 $\operatorname{Arg} z$ 中, 只有一个值 α 满足条件 $-\pi < \alpha \leq \pi$, 它叫做 z 的辐角的主值, 记作 $\arg z$ 。有时, 也将主值范围规定为 $[0, 2\pi)$, 即 $0 \leq \arg z < 2\pi$ 。引用模与辐角, 复数的三角表示还可以写为

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z). \quad (4.1.21)$$

复数 $z = x + iy$ 的共轭复数为 $x - iy$, 记之为 $\bar{z}$ ¹,

$$\bar{z} = x - iy. \quad (4.1.22)$$

显然, z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称。又, 明显地, $\bar{\bar{z}} = z$, 因此, z 和 $\bar{z}$ 相互共轭。利用三角表示, 我们有

$$\bar{z} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi). \quad (4.1.23)$$

特别地,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad (4.1.24)$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z|^2 = \bar{z}z, \quad (4.1.25)$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (4.1.26)$$

复数的三角表示特别适合计算乘除运算。设

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2). \quad (4.1.27)$$

那么,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

这就是说, 两个复数相乘, 就是它们的模相乘, 辐角相加。特别地,

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad 1 < n \in \mathbb{N}. \quad (4.1.29)$$

同样地, 我们有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (4.1.30)$$

即, 两个复数相除, 就是它们的模相除, 辐角相减。

显然, 平面曲线

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a, b], \quad (4.1.31)$$

¹有的文献中, 用 z^* 表示 z 的共轭复数。

也可以用复数描写,

$$z(t) = x(t) + y(t)i, \quad t \in [a, b]. \quad (4.1.32)$$

事实上, 有些平面几何问题用复数描写更为简洁、更为方便。当然, 质点的平面运动也是如此。

最后, 我们来考察复数序列 $\{z_n\}$,

$$z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots \quad (4.1.33)$$

复数序列实际上就是一个实矢量序列。称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛到点 z_0 , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad (4.1.34)$$

如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|z_n - z_0| < \varepsilon. \quad (4.1.35)$$

同矢量序列一样, 容易证明, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z_0. \quad (4.1.36)$$

即复数序列收敛当且仅当其分量序列收敛。

§4.1.2 复指数函数

定义4.1.1. 复数 z 的指数函数称作**复指数函数**, 记作 e^z , 定义为

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy.$$

由定义可知, 复指数函数的变量是复的, 因而是一个复变函数。当 $y = 0$ 时, 它退回为实指数函数: $e^z = e^x$, 因此, 复指数函数是实指数函数的推广。在这种推广下, 复指数函数仍能保留实指数函数所有的好性质, 譬如,

1. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$;
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;
3. $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

证明. 第一条是显然的。下面, 我们来证 2 和 3。

令

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad (4.1.37)$$

那么,

$$\begin{aligned}
 e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} \\
 &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\
 &= [e^{x_1} e^{x_2}] \cdot [(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2)] \\
 &= e^{x_1+x_2} \cdot [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)] \\
 &= e^{z_1+z_2}.
 \end{aligned}$$

第二条成立。

至于第三条, 首先, 如果 $z=0$, 它是显然成立的。其次, 当 $z \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right)^n \\
 &= \rho_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n),
 \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

其中,

$$\rho_n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \tag{4.1.39}$$

$$\varphi_n = n \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right), \quad n > |x|. \tag{4.1.40}$$

利用洛必达法则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = x, \tag{4.1.41}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right) \right] = y. \tag{4.1.42}$$

最后, 利用函数的连续性, 我们有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \rho_n}(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \rho_n} \left[\cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \right) + i \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \right) \right] \\
 &= e^x(\cos y + i \sin y) \\
 &= e^z.
 \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

因此, 当 $z \neq 0$ 时, 第三条亦成立。 ■

除这三条性质外, 复指数函数还保留了实指数函数有关求导、积分、Taylor级数等多方面的良好性质, 可参考《复变函数论》或《数学物理》方面的教程。本书只用到它的特例: 欧拉公式。它较简单, 仅仅是一个实变复值函数而已, 见下一小节。

§4.1.3 欧拉公式

在复指数函数中, 令 $x = 0$, 便有

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (4.1.44)$$

上式便是著名的欧拉公式。

利用欧拉公式, 复数还有指数表示,

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}. \quad (4.1.45)$$

利用指数表示, 计算复数的乘除法以及复共轭尤为方便,

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (4.1.46)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (4.1.47)$$

$$\bar{z} = \overline{[\rho e^{i\varphi}]} = \rho \overline{[e^{i\varphi}]} = \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}. \quad (4.1.48)$$

欧拉公式的更大功用是计算三角函数, 旋转门为

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (4.1.49)$$

例如, 加法公式,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i\alpha} e^{i\beta} + e^{-i\alpha} e^{-i\beta}) \\ &= \frac{1}{2} [(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) + (\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)] \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

再如, 积化和差,

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \cdot \frac{1}{2} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}) \\ &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]. \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

又如, 和差化积,

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{i\beta} [e^{i(\alpha-\beta)} + 1] + \text{c.c.} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} [e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} + e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}] + \text{c.c.} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} 2 \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \text{c.c.} \right\} \\
&= \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \left[e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} + e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \right] \\
&= 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right), \tag{4.1.52}
\end{aligned}$$

其中, c.c. 表示复共轭部分。再次,

$$\begin{aligned}
\sin^3 \alpha &= \left[\frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \right]^3 \\
&= -\frac{1}{8i} (e^{i3\alpha} - 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} - e^{-i3\alpha}) \\
&= \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha). \tag{4.1.53}
\end{aligned}$$

再次,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \cos k\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (e^{-in\alpha} + e^{-i(n-1)\alpha} + \dots + e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} + \dots + e^{in\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (e^{-in\alpha} + e^{-i(n-1)\alpha} + \dots + e^{-i\alpha} + e^{-i0\alpha} + e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} + \dots + e^{in\alpha}) - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{e^{-in\alpha} (1 - e^{i(2n+1)\alpha})}{1 - e^{i\alpha}} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha} (1 - e^{i(2n+1)\alpha})}{e^{-i\frac{1}{2}\alpha} - e^{i\frac{1}{2}\alpha}} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}. \tag{4.1.54}
\end{aligned}$$

最后, 我们来看一个物理上的例子, 振动的合成,

$$\begin{aligned}
A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_1) &= \frac{1}{2} [(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} + \text{c.c.}] \\
&= \frac{1}{2} (A e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \text{c.c.}) \\
&= A \cos(\omega t + \varphi), \tag{4.1.55}
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
A &= |A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}| \\
&= \left[(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})^* (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \tag{4.1.56}
\end{aligned}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \tag{4.1.57}$$

顺便提一句, 在复变函数论中, 正弦和余弦函数定义如下,

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}). \tag{4.1.58}$$

这里, 变量是复数, 因此, 二者悉为复变复值函数, 简称**复变函数**。当 z 为实数时, 它们退回为普通的实变函数。与之对应的是双曲函数,

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}). \quad (4.1.59)$$

同样地, 当 z 为实数时, 它们均退回到普通的实变函数。可见, 通过复指数函数, 三角函数与双曲函数可以统一起来。春秋之义, 大一统也! 数学物理, 何莫不然!

由欧拉公式,

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{\pm i2\pi} = 1. \quad (4.1.60)$$

这些都是常常引用的结果。

此外,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (4.1.61)$$

它是复平面的一个单位矢量,

$$|e^{i\varphi}| = 1. \quad (4.1.62)$$

容易看出, 它其实就是沿着矢径正方向的单位矢量, 或者说, 它是极坐标系基矢 $\mathbf{e}_\rho$ 的复形式,

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi. \quad (4.1.63)$$

将其逆时针旋转 $\pi/2$,

$$i e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi + i \cos \varphi, \quad (4.1.64)$$

我们得到的就是极坐标系基矢 $\mathbf{e}_\varphi$ 的复形式,

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{i} (-\sin \varphi) + \mathbf{j} \cos \varphi. \quad (4.1.65)$$

总而言之, 极坐标系基底的复表示就是

$$\{e^{i\varphi}, i e^{i\varphi}\}. \quad (4.1.66)$$

这个对我们在极坐标系下研究质点的平面运动是很重要的。此时, 平面曲线化为以下形式,

$$z(t) = \rho(t) e^{i\varphi(t)}. \quad (4.1.67)$$

它与

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) \quad (4.1.68)$$

相对应。

§4.2 实变复值函数

§4.2.1 定义

定义4.2.1. 设 $D \subset \mathbb{R}$ 。我们把从 D 到 $\mathbb{C}$ 的单值映射

$$w = f(t)$$

称为实变复值函数。

例如, 欧拉公式,

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad (4.2.1)$$

便是一个实变复值函数。再如, 平面曲线,

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad t \in [a, b], \quad (4.2.2)$$

也是一个实变复值函数。人们引入实变复值函数, 目的就是要以之为工具, 更为方便地研究实变函数。设

$$w = u + iv, \quad (4.2.3)$$

$$f(t) = \psi(t) + i\chi(t). \quad (4.2.4)$$

容易看出, 一个实变复值函数相当于一对普通实函数,

$$\begin{cases} u = \psi(t) \\ v = \chi(t). \end{cases} \quad (4.2.5)$$

§4.2.2 极限

定义4.2.2. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t_0 的邻域内有定义, 但在点 t_0 本身可以无定义。又设 $c \in \mathbb{C}$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得只要

$$0 < |t - t_0| < \delta,$$

便有

$$|f(t) - c| < \varepsilon,$$

那么, 我们就说, 当 t 趋于 t_0 时, 函数 $f(t)$ 趋于极限 c , 记为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = c.$$

定理4.2.1. 设实变复值函数 $f(t) = \psi(t) + i\chi(t)$ 在 t_0 的邻域内有定义 (在 t_0 本身可有可无)。又设 $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, 那么,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = c$$

的充分必要条件是

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t) = b.$$

证明. 注意到以下不等式即可也,

$$\left. \begin{aligned} |\psi(t) - a| \\ |\chi(t) - b| \end{aligned} \right\} \leq |f(t) - c| \leq |\psi(t) - a| + |\chi(t) - b|. \quad (4.2.6)$$

■

容易看出, 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = c, \quad (4.2.7)$$

那么,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{f}(t) = \bar{c}, \quad (4.2.8)$$

§4.2.3 连续性

定义4.2.3. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t_0 的邻域内有定义。如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0),$$

那么, 我们就说函数 $f(t)$ 在点 t_0 连续。

定理4.2.2. 设实变复值函数 $f(t) = \psi(t) + i\chi(t)$ 在点 t 的邻域内有定义, 那么, $f(t)$ 在点 t 连续当且仅当 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 都在点 t 连续。

利用这个定理以及一元实变实值函数的相应结果, 容易导出以下结论。

定理4.2.3. 常值函数 $f(t) = c$, $c \in \mathbb{C}$ 在点 t 连续。

定理4.2.4. 设实变复值函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在都点 t 连续, $c \in \mathbb{C}$, 则

1. $cf(t)$ 在点 t 连续。
2. $f(t) + g(t)$ 在点 t 连续。
3. $f(t) \cdot g(t)$ 在点 t 连续。
4. $\frac{f(t)}{g(t)}$ 在点 t 连续, $g(t) \neq 0$ 。
5. $\bar{f}(t)$ 在点 t 连续, 其中, $\bar{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的复共轭: $\bar{f}(t) = \psi(t) - i\chi(t)$ 。
6. $|f(t)|$ 在点 t 连续。

定理4.2.5. 设实变实值函数 $f(t)$ 在点 t 连续, 实变复值函数 $g(x)$ 在点 $x = f(t)$ 连续, 那么, 复合函数 $g \circ f(t) = g(f(t))$ 在点 t 连续。

§4.2.4 导数

定义4.2.4. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t_0 的邻域内有定义。如果以下极限存在,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

那么, 我们就说函数 $f(t)$ 在点 t_0 可导, 并且把上述极限称为函数 $f(t)$ 在点 t_0 的导数, 记作 $f'(t_0)$ 或 $\frac{df(t_0)}{dt}$, 即,

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

定理4.2.6. 设实变复值函数 $f(t) = \psi(t) + i\chi(t)$ 在点 t 的邻域内有定义, 那么, $f(t)$ 在点 t 可导当且仅当 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 都在点 t 可导。并且, 当这一条件满足时, 我们有

$$f'(t) = \psi'(t) + i\chi'(t).$$

利用这个定理以及一元实变实值函数的相应结果, 或直接仿照一元实变实值函数的方法, 容易证明以下一序列命题。

定理4.2.7. 如果实变复值函数 $f(t)$ 在点 t 可导, 那么它在该点连续。

定理4.2.8. 设实变复值函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在都点 t 可导, $c \in \mathbb{C}$, 则

1. $c' = 0$ 。
2. $cf(t)$ 在点 t 可导, 并且 $[cf(t)]' = cf'(t)$ 。
3. $f(t) + g(t)$ 在点 t 可导, 并且 $[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$ 。
4. $f(t) \cdot g(t)$ 在点 t 可导, 并且 $[f(t) \cdot g(t)]' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$ 。
5. $\frac{f(t)}{g(t)}$ 在点 t 可导, 其中 $g(t) \neq 0$, 并且 $\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right]' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$ 。

证明. 这里, 我们仿照一元实变实值函数的方法来证明上述定理的最后两点:

4. 令

$$h(t) = f(t)g(t). \quad (4.2.9)$$

于是,

$$\begin{aligned} h(t + \Delta t) - h(t) &= f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t) \\ &= [f(t + \Delta t) - f(t)]g(t + \Delta t) + f(t)[g(t + \Delta t) - g(t)]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

这样, 便有

$$\begin{aligned} h'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} g(t + \Delta t) + f(t) \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \\ &= f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

5. 令

$$h(t) = \frac{f(t)}{g(t)}. \quad (4.2.12)$$

于是,

$$\begin{aligned} h(t + \Delta t) - h(t) &= \frac{f(t + \Delta t)}{g(t + \Delta t)} - \frac{f(t)}{g(t)} \\ &= \frac{f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t + \Delta t)}{g(t + \Delta t)g(t)} \\ &= \frac{[f(t + \Delta t) - f(t)]g(t) - f(t)[g(t + \Delta t) - g(t)]}{g(t + \Delta t)g(t)} \\ &= \frac{[f(t + \Delta t) - f(t)]g(t)}{g(t + \Delta t)g(t)} - \frac{f(t)[g(t + \Delta t) - g(t)]}{g(t + \Delta t)g(t)}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

因而有

$$\begin{aligned} h'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} g(t)}{g(t + \Delta t)g(t)} - \frac{f(t) \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{g(t + \Delta t)g(t)} \right] \\ &= \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

■

定理4.2.9. 设实变实值函数 $f(t)$ 在点 t 可导, 实变复值函数 $g(x)$ 在点 $x = f(t)$ 可导, 那么, 复合函数 $h(t) = g \circ f(t) = g(f(t))$ 在点 t 可导, 并且

$$h'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t).$$

证明. 令

$$g(x) = \psi(x) + i\chi(x), \quad (4.2.15)$$

则

$$h(t) = \psi \circ f(t) + i\chi \circ f(t) = \psi(f(t)) + i\chi(f(t)). \quad (4.2.16)$$

因之,

$$\begin{aligned} h'(t) &= [\psi(f(t))]' + i[\chi(f(t))]' = \psi'(f(t)) \cdot f'(t) + i\chi'(f(t)) \cdot f'(t) \\ &= [\psi'(f(t)) + i\chi'(f(t))] \cdot f'(t) \\ &= g'(f(t)) \cdot f'(t). \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

■

本定理表明,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{df} \frac{df}{dt}. \quad (4.2.18)$$

通常称之为复合函数求导的**链式法则**。

实变实值函数的高阶导数可以同普通实函数一样地定义：一阶导数的导数就是二阶导数， $\dots$ ， n 阶导数的导数就是 $n+1$ 阶导数，

$$f''(t) = [f'(t)]', \dots, f^{(n+1)}(t) = [f^{(n)}(t)]', \quad (4.2.19)$$

或

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{df(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n+1} f(t)}{dt^{n+1}} = \frac{d}{dt} \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \quad (4.2.20)$$

定理4.2.10. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t 可导，则

$$\bar{f}'(t) = \overline{f'(t)}, \dots, \bar{f}^{(n)}(t) = \overline{f^{(n)}(t)},$$

或

$$\frac{d}{dt} \bar{f}(t) = \overline{\frac{d}{dt} f(t)}, \dots, \frac{d^n}{dt^n} \bar{f}(t) = \overline{\frac{d^n}{dt^n} f(t)}.$$

本定理表明，求导或微商同复共轭可以相互交换运算次序。这是一条很重要的性质，在讨论微分方程时是很有用的。

例4.2.1. 设 $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$ ，试求

$$f(t) = (t+c)^n$$

的导数。

解. 当 $n=1$ 时，我们有

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t+\Delta t+c) - (t+c)}{\Delta t} = 1. \quad (4.2.21)$$

当 $n=2$ 时，利用乘积的求导公式，我们有

$$f'(t) = [(t+c)^2]' = (t+c)' \cdot (t+c) + (t+c) \cdot (t+c)' = 2(t+c). \quad (4.2.22)$$

当 $n>2$ 时，利用乘积的求导公式，

$$[(t+c)^n]' = [(t+c)^{n-1}]' \cdot (t+c) + (t+c)^{n-1} \cdot (t+c)', \quad (4.2.23)$$

归纳得

$$f'(t) = n(t+c)^{n-1}. \quad (4.2.24)$$

■

例4.2.2. 设 $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$ ，试求

$$f(t) = (t+c)^{-n}, \quad t \neq -c,$$

的导数。

解. 利用商的求导公式, 我们有

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \left[\frac{1}{(t+c)^n} \right]' \\
 &= -\frac{1}{(t+c)^{2n}} [(t+c)^n]' \\
 &= -\frac{1}{(t+c)^{2n}} n(t+c)^{n-1} \\
 &= -n(t+c)^{-n-1}
 \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

■

例4.2.3. 试求

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

的导数, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 。

解. 令

$$\lambda = \alpha + i\beta. \tag{4.2.26}$$

于是,

$$f(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t). \tag{4.2.27}$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (e^{\alpha t})'(\cos \beta t + i \sin \beta t) + e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)' \\
 &= \alpha e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + e^{\alpha t}(-\beta \sin \beta t + i \beta \cos \beta t) \\
 &= \alpha e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + i \beta e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \\
 &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \\
 &= \lambda e^{\lambda t}.
 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

■

下面, 作为应用, 我们来研究质点平面运动的速度 v 与加速度 a 。

首先, 在笛卡尔坐标系下, 质点的位矢 $z(t)$ 为

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad t \in [a, b]. \tag{4.2.29}$$

于是,

$$v = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt} = \dot{x}(t) + i \dot{y}(t), \tag{4.2.30}$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + i \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) + i \ddot{y}(t). \tag{4.2.31}$$

这很自然、很直观。

其次, 在极坐标系下, 利用指数表示, 质点的位矢 $z(t)$ 为,

$$z(t) = \rho(t) e^{i\varphi(t)}. \quad (4.2.32)$$

这样, 我们便有

$$v = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} e^{i\varphi(t)} + \rho(t) \frac{d}{dt} e^{i\varphi(t)}. \quad (4.2.33)$$

利用复合函数的求导公式, 得

$$\frac{d}{dt} e^{i\varphi(t)} = i \dot{\varphi}(t) e^{i\varphi(t)}. \quad (4.2.34)$$

将之代回原式, 便得

$$v = \dot{\rho}(t) e^{i\varphi(t)} + \rho(t) \dot{\varphi}(t) i e^{i\varphi(t)}. \quad (4.2.35)$$

这是速度在极坐标系下的复表示。注意到, 极坐标系基底的复表示就是

$$\{e^{i\varphi(t)}, i e^{i\varphi(t)}\}, \quad (4.2.36)$$

因此, 上式表明质点的径向与横向速度分别为

$$v_\rho = \dot{\rho}(t), \quad (4.2.37)$$

$$v_\varphi = \rho(t) \dot{\varphi}(t). \quad (4.2.38)$$

现在, 继续求加速度 a ,

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{\rho}(t) e^{i\varphi(t)} + \rho(t) \dot{\varphi}(t) i e^{i\varphi(t)}] \\ &= [\ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\varphi}^2(t)] e^{i\varphi(t)} + [2\dot{\rho}(t) \dot{\varphi}(t) + \rho(t) \ddot{\varphi}(t)] i e^{i\varphi(t)}. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

这是加速度在极坐标系下的复表示。它说明, 径向与横向加速度分别为

$$a_\rho = \ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\varphi}^2(t), \quad (4.2.40)$$

$$a_\varphi = 2\dot{\rho}(t) \dot{\varphi}(t) + \rho(t) \ddot{\varphi}(t). \quad (4.2.41)$$

它同我们以前得到的结果一致。

设质点受力为 f ,

$$\begin{aligned} f &= f_x(t) + i f_y(t) \\ &= f_\rho(t) e^{i\varphi(t)} + f_\varphi(t) i e^{i\varphi(t)}. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

这里, 第一个等号的右边是力在笛卡尔坐标系下的分解, 第二个的等号右边是力在极坐标系下的分解。根据牛顿第二定律, 我们有

$$ma(t) = f(t), \quad (4.2.43)$$

其中, m 为质点质量。在极坐标系下分解之, 便得

$$ma_\rho(t) = f_\rho(t), \quad (4.2.44)$$

$$ma_\varphi(t) = f_\varphi(t). \quad (4.2.45)$$

于是, 我们有

$$m [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)] = f_\rho(t), \quad (4.2.46)$$

$$m [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)] = f_\varphi(t). \quad (4.2.47)$$

这就是运动方程在极坐标系下的形式, 它适用于质点的平面运动, 特别是, 可以用于Kepler问题。

§4.2.5 微分

定义4.2.5. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t 附近有定义。如果

$$f(t + \Delta t) - f(t) = A\Delta t + o(\Delta t),$$

其中, $o(\Delta t)$ 是余项, 它是 Δt 的实变复值函数, 满足

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

那么, 我们称函数 $f(t)$ 在点 t 可微。

定理4.2.11. 实变复值函数 $f(t)$ 在点 t 可微的充分必要条件是它在这点可导。

证明. 充分性: 如果 $f(t)$ 在点 t 可导, 即存在极限,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t), \quad (4.2.48)$$

那么, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\alpha(\Delta t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - f'(t) \rightarrow 0. \quad (4.2.49)$$

这意味着

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t. \quad (4.2.50)$$

取

$$A = f'(t), \quad o(\Delta t) = \alpha(\Delta t)\Delta t, \quad (4.2.51)$$

便有

$$f(t + \Delta t) - f(t) = A\Delta t + o(\Delta t), \quad (4.2.52)$$

并且

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (4.2.53)$$

函数 $f(t)$ 在点 t 可微。

必要性: 如果 $f(t)$ 在点 t 可微, 即

$$f(t + \Delta t) - f(t) = A\Delta t + o(\Delta t), \quad (4.2.54)$$

那么,

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = A + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.2.55)$$

于是,

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t). \quad (4.2.56)$$

函数 $f(t)$ 在点 t 可导。 ■

可见, 可导、可微乃同义语尔, 并且, 当 $f(t)$ 在点 t 可微时,

$$f(t + \Delta t) - f'(t) = f'(t)\Delta t + o(\Delta t). \quad (4.2.57)$$

定义4.2.6. 设实变复值函数 $f(t)$ 在点 t 可微。定义

$$dt := \Delta t,$$

$$df := f'(t)\Delta t.$$

通常称 df 为函数 $f(t)$ 在点 t 的微分。

由是可知,

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t) = df + o(\Delta t), \quad (4.2.58)$$

因此, df 乃函数增量 Δf 的线性主部。

函数的微分有一个重要的性质——微分形式的不变性。考察复合函数 $f(g(t))$ 的导数:

$$[f(g(t))]' = f'(g(t))g'(t). \quad (4.2.59)$$

我们有

$$d[f(g(t))] = [f(g(t))]'dt = f'(g(t))g'(t)dt = f'(g(t))dg(t). \quad (4.2.60)$$

这就是说, 不论 x 是自变量, 还是中间变量 ($x = g(t)$), 函数 $f(x)$ 的微分永远都有相同的形式,

$$df(x) = f'(x)dx. \quad (4.2.61)$$

此即函数微分的形式不变性也。

最后, 利用上一小节的结果, 我们还有

定理4.2.12. 设实变复值函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在都点 t 可微, $c \in \mathbb{C}$, 则

1. $dc = 0$ 。

2. $cf(t)$ 在点 t 可微, 并且 $d[cf(t)] = cdf(t)$ 。

3. $f(t) + g(t)$ 在点 t 可微, 并且 $d[f(t) + g(t)] = df(t) + dg(t)$ 。
4. $f(t) \cdot g(t)$ 在点 t 可微, 并且 $d[f(t) \cdot g(t)] = df(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot dg(t)$ 。
5. $\frac{f(t)}{g(t)}$ 在点 t 可微, 其中 $g(t) \neq 0$, 并且 $d\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{df(t)g(t) - f(t)dg(t)}{g^2(t)}$ 。

§4.2.6 不定积分

定义4.2.7. 设实变复值函数 $f(t)$ 在区间 I 上有定义。如果存在一个实变复值函数 $F(t)$, 它在区间 I 上连续, 在此区间内部 I° 可导, 并且

$$F'(t) = f(t),$$

那么, 我们就说 F 是 f 的一个原函数。

设

$$F(t) = \Psi(t) + i\Phi(t), \quad f(t) = \psi(t) + \phi(t), \quad (4.2.62)$$

于是, $F'(t) = f(t)$ 当且仅当

$$\Psi'(t) = \psi(t), \quad \Phi'(t) = \phi(t). \quad (4.2.63)$$

由是可知,

定理4.2.13. 设 $F(t)$ 和 $f(t)$ 均是实变复值函数, 则 $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数当且仅当 $\bar{F}(t)$ 是 $\bar{f}(t)$ 的一个原函数。

定理4.2.14. 设 $F(t)$ 和 $f(t)$ 均是实变复值函数, 则 $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数当且仅当 $F(t)$ 的实部与虚部分别是 $f(t)$ 的实部与虚部的原函数。

从此不难证明,

定理4.2.15. 如果 $F(t)$ 是实变复值函数 $f(t)$ 一个原函数, 那么, 对任何一个复数 $C \in \mathbb{C}$, 函数

$$F(t) + C$$

也是 $f(t)$ 的一个原函数, 并且 $f(t)$ 的任何原函数也都可以表示成这种形式。

定义4.2.8. 如果 $F(t)$ 是实变复值函数 $f(t)$ 一个原函数, 那么, 函数族

$$F(t) + C, \quad C \in \mathbb{C},$$

表示 $f(t)$ 的一切原函数。我们把这个函数族叫做函数 $f(t)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

上式中的 $f(t)$ 称为被积函数。

例4.2.4. 设 $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, 求不定积分

$$\int (t+c)^n dt.$$

解. 由于

$$[(t+c)^n]' = n(t+c)^{n-1}, \quad (4.2.64)$$

因此,

$$\int (t+c)^n dt = \frac{1}{n+1} (t+c)^{n+1} + C. \quad (4.2.65)$$

■

例4.2.5. 设 $1 < n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, 求不定积分

$$\int (t+c)^{-n} dt.$$

解. 由于

$$[(t+c)^{-n}]' = -n(t+c)^{-n-1}, \quad (4.2.66)$$

因此,

$$\int (t+c)^{-n} dt = -\frac{1}{n-1} (t+c)^{-n+1} + C. \quad (4.2.67)$$

■

例4.2.6. 求不定积分

$$\int e^{\lambda t} dt, \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}.$$

解. 因为

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad (4.2.68)$$

所以

$$\int e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C. \quad (4.2.69)$$

■

定理4.2.16. 设 $f(t)$ 是实变复值函数。如果

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

那么,

$$\int \bar{f}(t) dt = \bar{F}(t) + C.$$

定理4.2.17. 设 $f(t)$, $g(t)$ 均是实变复值函数, $\lambda \in \mathbb{C}$ 。如果 $f(t)$, $g(t)$ 皆有原函数, 那么,

$$\begin{aligned} \int [f(t) + g(t)] dt &= \int f(t) dt + \int g(t) dt, \\ \int \lambda f(t) dt &= \lambda \int f(t) dt. \end{aligned}$$

定理4.2.18. 设 $f(x)$ 是实变复值函数, $g(t)$ 是实变实值函数, 二者皆有原函数, 那么,

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(g(t))dg(t).$$

定理4.2.19. 设 $u(t), v(t)$ 均是连续可微的实变复值函数, 那么,

$$\int u(t)dv(t) = u(t)v(t) - \int v(t)du(t).$$

例4.2.7. 求不定积分

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt.$$

解. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t^2+1)^2} &= \left(\frac{1}{t^2+1} \right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(t-i)^2} - \frac{2}{t^2+1} + \frac{1}{(t+i)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(t-i)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(t+i)^2}, \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(t-i)^2} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(t+i)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \arctgt + \frac{1}{4} \frac{1}{t-i} + \frac{1}{4} \frac{1}{t+i} + C \\ &= \frac{1}{2} \arctgt + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

■

例4.2.8. 求不定积分

$$\int t^2 \cos t dt.$$

解. 由 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned} \int t^2 \cos t dt &= \frac{1}{2} \left(\int t^2 e^{it} dt + \int t^2 e^{-it} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \int t^2 e^{it} dt + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (4.2.72)$$

又,

$$\begin{aligned}
 \int t^2 e^{it} dt &= -i \int t^2 de^{it} \\
 &= -it^2 e^{it} + i \int e^{it} dt^2 \\
 &= -it^2 e^{it} + i2 \int t e^{it} dt \\
 &= -it^2 e^{it} + 2 \int t de^{it} \\
 &= -it^2 e^{it} + 2te^{it} - 2 \int e^{it} dt \\
 &= -it^2 e^{it} + 2te^{it} + i2e^{it} + C.
 \end{aligned} \tag{4.2.73}$$

因而, 我们得

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4.2.74}$$

■

例4.2.9. 求不定积分

$$\int e^{at} \cos bt dt, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

解. 由 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned}
 \int e^{at} \cos bt dt &= \frac{1}{2} \left(\int e^{at} e^{ibt} dt + \int e^{at} e^{-ibt} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int e^{(a+ib)t} dt + \text{c.c.} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)t} + \text{c.c.} + C \\
 &= \frac{1}{2} \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{(a+ib)t} + \text{c.c.} + C \\
 &= \frac{a}{a^2+b^2} e^{at} \cos bt + \frac{b}{a^2+b^2} e^{at} \sin bt + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{4.2.75}$$

■

§4.2.7 定积分

定义4.2.9. 设 $f(t)$ 为实变复值函数, 它在闭区间 $[a, b]$ 上有定义。对区间 $[a, b]$ 作分割, 使得

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

对此分割, 作 Riemann 和,

$$\sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta t_\nu,$$

其中, $\xi_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$, $\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$ 。令

$$\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}.$$

考察极限,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta t_\nu,$$

如果它对任意分割都存在, 并且与选点 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 无关, 那么, 我们就说函数 $f(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 并把该极限称为函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta t_\nu.$$

与通常一样, 这里的 $\int$ 称为积分号, $f(t)$ 称为被积函数, b 和 a 分别称为积分的上限和下限。

设

$$f(t) = \psi(t) + i\chi(t). \quad (4.2.76)$$

于是, Riemann 和可分解为实部与虚部,

$$\sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta t_\nu = \sum_{\nu=1}^n \psi(\xi_\nu) \Delta t_\nu + i \sum_{\nu=1}^n \chi(\xi_\nu) \Delta t_\nu. \quad (4.2.77)$$

因为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta t_\nu = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \psi(\xi_\nu) \Delta t_\nu + i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \chi(\xi_\nu) \Delta t_\nu. \quad (4.2.78)$$

所以

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \psi(t) dt + i \int_a^b \chi(t) dt. \quad (4.2.79)$$

由此易知,

1. $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$ (λ 为复常数)。
2. $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$
3. $\int_a^b f(\mu(t)) \mu'(t) dt = \int_a^b f(\mu(t)) d\mu(t).$
4. $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt, \quad a < b < c.$
5. $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ (Newton-Leibnitz 公式, $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数)。
6. $\int_a^b \bar{f}(t) dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}.$

§4.3 常系数线性常微分方程

通常称形如

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)x = f(t) \quad (4.3.1)$$

的方程称为 n 阶线性常微分方程, 其中 $a_i(t)$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 以及 $f(t)$ 都是某区间 $[a, b]$ 上连续的实变复值函数。特别地, 如果 $f(t) \equiv 0$, 则称之为 n 阶齐次线性常微分方程, 简称齐线性方程。反之, 如果 $f(t) \neq 0$, 则称之为 n 阶非齐次线性常微分方程, 简称非齐线性方程, 并称 $f(t)$ 为非齐次项。

每一个非齐线性方程, 都有一个对应的齐线性方程, 令非齐次项等于零即得, 也就是,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)x = 0. \quad (4.3.2)$$

非齐线性方程解的结构与对应的齐线性方程有关。设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是非齐线性方程的两个任意解,

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\xi = f(t), \quad (4.3.3)$$

$$\frac{d^n \eta}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \eta}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\eta = f(t), \quad (4.3.4)$$

那么,

$$\psi(t) = \xi(t) - \eta(t) \quad (4.3.5)$$

必是相应齐线性方程的解, 即,

$$\frac{d^n \psi}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\psi = 0. \quad (4.3.6)$$

反之, 如果 $\psi(t)$ 与 $\eta(t)$ 分别是齐线性方程与非齐线性方程任一解,

$$\frac{d^n \psi}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\psi = 0, \quad (4.3.7)$$

$$\frac{d^n \eta}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \eta}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\eta = f(t), \quad (4.3.8)$$

那么,

$$\xi(t) = \psi(t) + \eta(t) \quad (4.3.9)$$

必是非齐线性方程的解, 即,

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\xi = f(t). \quad (4.3.10)$$

这意味着, 非齐线性方程的一般解等于它自身的任意一个特解再加上相应齐线性方程的一般解。于是, 问题归结为求齐线性方程的一般解以及非齐线性方程的一个特解。数学上, 一般解也叫通解。

在物理学中, 经常碰到所谓的常系数线性常微分方程。如果线性常微分方程的所有系数都是常数, 不随自变量的变化而变化, 即

$$a_{n-1}(t) \equiv a_{n-1}, \cdots, a_0(t) \equiv a_0, \quad (4.3.11)$$

那么, 这个方程就称为**常系数线性常微分方程**。这种方程的一般形式为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 x = f(t). \quad (4.3.12)$$

例如, 自由落体的运动方程,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg, \quad (4.3.13)$$

其中, m 是自由落体的质量, g 是所谓的重力加速度。再如, 一维简谐振子,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (4.3.14)$$

其中, m 是振子的质量, k 是弹簧的弹性系数。

常系数线性常微分方程相对简单, 解法很多。我们这里介绍一种简单的解法, 为此, 我们先讨论自由落体, 它的方程可化为

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -g. \quad (4.3.15)$$

注意到

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}, \quad (4.3.16)$$

方程可进一步化为

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} z(t) = -g. \quad (4.3.17)$$

令

$$z_1(t) = \frac{d}{dt} z(t), \quad (4.3.18)$$

则

$$\frac{d}{dt} z_1(t) = -g. \quad (4.3.19)$$

解之, 得

$$z_1(t) = -gt + c_1, \quad (4.3.20)$$

其中, $c_1 \in \mathbb{C}$ 是一个复常数。将之代入式(4.3.18), 有

$$\frac{d}{dt} z(t) = -gt + c_1. \quad (4.3.21)$$

进一步解之, 得

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2, \quad (4.3.22)$$

其中, $c_2 \in \mathbb{C}$ 也是一个复常数。这样, 通过先解方程(4.3.19), 再解方程(4.3.18), 如是串联求解, 我们最后就得到了原方程的通解。

至于通解中的两个复常数, 则像通常一样, 可以由初值确定,

$$c_2 = z(0), \quad c_1 = \dot{z}(0) = v(0), \quad (4.3.23)$$

其中, $z(0)$ 即初始位置, $v(0)$ 即初始速度。尽管我们将解的范围扩大到了实变复值函数, 但最后的结果又自然而然地回到了普通的实变实值函数,

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt + v(0)t + z(0). \quad (4.3.24)$$

一切如恒, 毋庸虑也!

仔细观察上述求解通解的过程, 不难发现, 能够建立串联解法的关键在于式(4.3.16), 即

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right)^2, \quad (4.3.25)$$

它将二阶求导算子分解为两个一阶求导算子的乘积, 于是, 人们可以通过引进中间变量从而获得可以串联求解的方程组,

$$\frac{d}{dt} z_1(t) = -g, \quad (4.3.26)$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = z_1(t). \quad (4.3.27)$$

现在, 我们来考察一维简谐振子, 它的方程可化为如下形式,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x(t) = 0, \quad (4.3.28)$$

其中,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.3.29)$$

容易发现, 同自由落体一样, 一维简谐振子也存在算子分解,

$$\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \omega^2 = \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right). \quad (4.3.30)$$

这样, 原方程可化为

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x(t) = 0. \quad (4.3.31)$$

容易看出, 通过引进中间变量 x_1 ,

$$x_1 := \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x(t), \quad (4.3.32)$$

人们可以建立串联方程组如下,

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) x_1(t) = 0, \quad (4.3.33)$$

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x(t) = x_1(t). \quad (4.3.34)$$

消去中间变量 x_1 , 此方程组即回到式(4.3.31), 因此, 此串联方程组同原方程(4.3.31)完全等价。上述方程组的第一个方程即

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -i\omega x_1(t). \quad (4.3.35)$$

分离变量得

$$\frac{dx_1}{x_1} = -i\omega dt. \quad (4.3.36)$$

由是可知, 其解为

$$x_1(t) = c_1 e^{-i\omega t}. \quad (4.3.37)$$

其中, $c_1 \in \mathbb{C}$ 是一个复常数。将之代入串联方程的第二个方程, 得

$$\frac{d}{dt}x(t) - i\omega x(t) = c_1 e^{-i\omega t}. \quad (4.3.38)$$

两边同时乘以

$$e^{-i\omega t}, \quad (4.3.39)$$

得

$$e^{-i\omega t} \frac{d}{dt}x(t) - i\omega e^{-i\omega t} x(t) = c_1 e^{-i2\omega t}. \quad (4.3.40)$$

此即

$$\frac{d}{dt} [e^{-i\omega t} x(t)] = c_1 e^{-i2\omega t}. \quad (4.3.41)$$

积分, 得

$$e^{-i\omega t} x(t) = \frac{c_1}{-i2\omega} e^{-i2\omega t} + c_2, \quad (4.3.42)$$

其中, $c_2 \in \mathbb{C}$ 是积分常数。最后, 我们得到通解,

$$x(t) = c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t}, \quad (4.3.43)$$

其中, c_1, c_2 是两个复常数。

复值通解当然包括实值通解, 为了找出实值通解, 只须对 c_1, c_2 的取值加以限制即可。容易看出, 实值解一定满足

$$\bar{x}(t) = x(t), \quad \forall t, \quad (4.3.44)$$

也即

$$c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t} = \bar{c}_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega t}, \quad \forall t. \quad (4.3.45)$$

分别令 $\omega t = 0$ 和 $\omega t = \pi/2$, 得,

$$c_1 + c_2 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2, \quad (4.3.46)$$

$$c_1 - c_2 = -\bar{c}_1 + \bar{c}_2. \quad (4.3.47)$$

两式相减, 得

$$c_2 = \bar{c}_1. \quad (4.3.48)$$

因此, 实值通解的形式为

$$x(t) = c e^{-i\omega t} + \bar{c} e^{i\omega t}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (4.3.49)$$

它有一个待定的复常数, 或两个待定的实常数。若令

$$c = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}, \quad A > 0, \varphi \in \mathbb{R}, \quad (4.3.50)$$

则实值通解可写为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.3.51)$$

其中, $A > 0$ 和 φ 是两个待定的实常数。如果令

$$c = \frac{A}{2} + i \frac{B}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad (4.3.52)$$

那么, 实值通解也可写为

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (4.3.53)$$

其中, A, B 为两个待定的实常数。实值通解的上述三种形式是等价的。

当然, 也可以将复值通解中的两个常数留给最后的初值确定,

$$c_1 + c_2 = x(0), \quad (4.3.54)$$

$$-i\omega(c_1 - c_2) = \dot{x}(0). \quad (4.3.55)$$

由之得

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[x(0) + i \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \right], \quad c_2 = \frac{1}{2} \left[x(0) - i \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \right]. \quad (4.3.56)$$

因此,

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (4.3.57)$$

可见最终解总是实值的, 尽管中间过程是复值的。

前面谈到, 串联解法的关键是算子分解, 它实质上就是一元多项式的因子分解。还应看到, 要实现串联求解, 必须将算子多项式分解为一次多项式的乘积, 而这在实数域上一般是不可能的, 例如简谐振子的算子多项式,

$$\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \omega^2, \quad (4.3.58)$$

在实数域上是不可能分解为两个一次因式的乘积的, 这是因为二次多项式

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a, \quad a > 0, \quad (4.3.59)$$

其中 λ 是所谓的未定元, 在实数域上是不可约的。然而, 按照代数基本定理, 在复数域上, 所有一元多项式都可分解为一次多项式的乘积, 因此, 为了实现串联解法, 我们必须将常微分方程的系数域从实数域扩张到复数域, 并相应地, 将方程的解域从普通的实变实值函数扩张到实变复值函数。这就是在前面我们引进实变复值函数的基本原因。

简谐振子属常系数齐线性常微分方程,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (4.3.60)$$

自由落体属常系数非齐线性常微分方程,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g. \quad (4.3.61)$$

由上讨论可见, 串联解法对齐线性和非齐线性常微分方程都适用, 都能求得复值通解, 只要它们是常系数就可以了。

在物理学中, 常微分方程一般不超过两阶, 因此, 我们下面着重研究二阶常系数线性常微分方程。首先, 考虑齐次的情形, 即,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \quad (4.3.62)$$

作算子分解

$$\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2 \right), \quad (4.3.63)$$

其中, λ_1, λ_2 为一元二次多项式

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (4.3.64)$$

的两个复根, 也即,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2). \quad (4.3.65)$$

这样, 我们便得串联方程组,

$$\frac{dx_1}{dt} - \lambda_1 x_1 = 0, \quad (4.3.66)$$

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = x_1. \quad (4.3.67)$$

明显地, 第一个方程的解为

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad c_1 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.68)$$

将之代入第二个方程, 得

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = c_1 e^{\lambda_1 t}. \quad (4.3.69)$$

两边乘以

$$e^{-\lambda_2 t}, \quad (4.3.70)$$

有

$$\frac{d}{dt} [e^{-\lambda_2 t} x(t)] = c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}. \quad (4.3.71)$$

积分, 得

$$x(t) = \begin{cases} (c_1 t + c_2) e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases} \quad (4.3.72)$$

这样, 我们便得到了常系数二阶齐次线性常微分方程的通解。当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解形式为

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{\lambda_2 t}; \quad (4.3.73)$$

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 通解形式为

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4.3.74)$$

在这两种形式的通解中, c_1, c_2 都是复常数。

例4.3.1. 考虑一维阻尼振子。此时，振子除了受弹性恢复力 ($f_1 = kx$) 的作用外，还受到一个与速度成正比但方向相反的阻尼力 ($f_2 = -\eta\dot{x}$) 的作用。因此，振子的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x},$$

其中， m 是振子的质量。讨论振子的运动情况。

解. 振子的运动方程是一个常系数二阶齐次线性常微分方程，

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.3.75)$$

其中，

$$\gamma = \frac{\eta}{2m} > 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0. \quad (4.3.76)$$

可见，参数 γ 代表了阻尼的强度， ω_0 代表了振子的自然频率。

作算子分解，

$$\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right), \quad (4.3.77)$$

其中，

$$\lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (4.3.78)$$

$$\lambda_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (4.3.79)$$

下面，根据阻尼的强弱，分三种情形讨论之：

1. 弱阻尼的情形： $\gamma < \omega_0$. 此时，

$$\lambda_1 = -i\omega - \gamma, \quad (4.3.80)$$

$$\lambda_2 = +i\omega - \gamma, \quad (4.3.81)$$

其中，

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (4.3.82)$$

因此，运动方程的一般解为

$$x(t) = c_1 e^{-i\omega t - \gamma t} + c_2 e^{i\omega t - \gamma t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.83)$$

这说明，在弱阻尼的情形，振子的运动是一种衰减振荡。

2. 中等阻尼的情形： $\gamma = \omega_0$. 此时，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma < 0. \quad (4.3.84)$$

运动方程的一般解为

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\gamma t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.85)$$

因此，在中等阻尼的情形，振子的位移是先作线性增长然后指数式地衰减，最终趋于零。

3. 强阻尼的情形: $\gamma > \omega_0$. 此时,

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0. \quad (4.3.86)$$

运动方程的一般解为

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.87)$$

这意味着, 在强阻尼的情形下, 振子的运动是纯指数式的衰减, 振子的位置将随时间单调地趋于平衡点 $x = 0$.

■

现在, 让我们来考虑非齐次的情形,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t). \quad (4.3.88)$$

物理上, 非齐次项 $f(t)$ 代表外部的驱动. 它一般都可以分解为一些简单项的和,

$$f(t) = \sum_l \alpha_l f_l(t), \quad \alpha_l \in \mathbb{C}. \quad (4.3.89)$$

容易证明, 如果 $x_l(t)$ 是非齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f_l(t) \quad (4.3.90)$$

的解, 那么, 它们的线性叠加,

$$x(t) = \sum_l \alpha_l x_l(t), \quad (4.3.91)$$

一定是原方程(4.3.88)的解。

前已指出, 非齐线性方程的通解等于它自身的任意一个特解再加上相应齐线性方程的通解. 齐线性方程通解的求法已见上, 剩下的是求特解. 为求特解, 我们只须像上面那样, 先将非齐次项 $f(t)$ 分解为一些简单项的和, 然后求各子方程(4.3.90)的特解, 最后将这些特解线性组合即可. 从物理上看, 非齐次项 $f(t)$ 的分解一般就是Fourier展开, 即将 $f(t)$ 分解为不同频率驱动信号的线性组合,

$$f(t) = \sum_l \alpha_l e^{-i\omega_l t}, \quad \alpha_l \in \mathbb{C}, \quad (4.3.92)$$

其中, ω_l 是第 l 个分量信号的频率. 因此, 我们只须在数学上会求以下方程的特解即可,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e^{-i\omega t}. \quad (4.3.93)$$

串联法可以求非齐线性方程的通解, 当然就能求非齐线性方程的特解. 为此, 只须在求解过程中丢掉积分常数即可, 见下。

同前, 设算子分解如下,

$$\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2 \right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.94)$$

于是, 得串联方程组,

$$\frac{dx_1}{dt} - \lambda_1 x_1 = e^{-i\omega t}, \quad (4.3.95)$$

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = x_1. \quad (4.3.96)$$

对第一个方程两边乘以

$$e^{-\lambda_1 t}, \quad (4.3.97)$$

得

$$\frac{d}{dt} [e^{-\lambda_1 t} x_1(t)] = e^{(-\lambda_1 - i\omega)t}. \quad (4.3.98)$$

积分, 得

$$e^{-\lambda_1 t} x_1(t) = \frac{1}{-\lambda_1 - i\omega} e^{(-\lambda_1 - i\omega)t} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.99)$$

丢掉积分常数 c_1 , 得

$$x_1(t) = \frac{1}{-\lambda_1 - i\omega} e^{-i\omega t}. \quad (4.3.100)$$

将之代入第二个方程, 得

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = \frac{1}{-\lambda_1 - i\omega} e^{-i\omega t}. \quad (4.3.101)$$

两边乘以

$$e^{-\lambda_2 t}, \quad (4.3.102)$$

得

$$\frac{d}{dt} [e^{-\lambda_2 t} x(t)] = \frac{1}{-\lambda_1 - i\omega} e^{(-\lambda_2 - i\omega)t}. \quad (4.3.103)$$

积分, 得

$$e^{-\lambda_2 t} x(t) = \frac{1}{(-\lambda_1 - i\omega)(-\lambda_2 - i\omega)} e^{(-\lambda_2 - i\omega)t} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.3.104)$$

丢掉积分常数 c_2 , 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(-i\omega - \lambda_1)(-i\omega - \lambda_2)} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{-\omega^2 - ia_1\omega + a_0} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.3.105)$$

可见, 这样选择的特解同外部驱动项频率相同, 只是“复振幅”不同而已。如果令

$$-\omega^2 - ia_1\omega + a_0 = |-\omega^2 - ia_1\omega + a_0| e^{i\varphi}, \quad (4.3.106)$$

那么,

$$x(t) = \frac{1}{|-\omega^2 - ia_1\omega + a_0|} e^{-i(\omega t + \varphi)}. \quad (4.3.107)$$

也就是说, 特解同外部驱动项的差别仅在振幅与初位相。

物理上, 通常直接取特解的试探解为

$$x(t) = A e^{-i\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad (4.3.108)$$

然后将之代入方程(4.3.93)以定“复振幅” A ,

$$A(-\omega^2 - ia_1\omega + a_0)e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}, \quad (4.3.109)$$

立得

$$A = \frac{1}{-\omega^2 - ia_1\omega + a_0}. \quad (4.3.110)$$

结果同前。此法殊为便利, 物理学工作者多乐为之。

例4.3.2. 考虑阻尼振子的强迫振动。此时, 振子除了受弹性恢复力($f_1 = kx$)和阻尼力($f_2 = -\eta\dot{x}$)的作用外, 还受外界驱动力的作用, 其形式为

$$f_3 = F_0 \cos \omega t, \quad 0 < F_0 \in \mathbb{R},$$

其中, ω 为外力的频率。设振子的质量为 m 。讨论振子的运动情况。

解. 由 Newton 第二定律, 振子的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad (4.3.111)$$

也即

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha e^{-i\omega t} + \alpha e^{i\omega t}, \quad (4.3.112)$$

其中,

$$\gamma = \frac{\eta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{F_0}{2m}. \quad (4.3.113)$$

对应齐次方程的通解在前面的例子中已经求得。现在来求特解, 这只需将下列两个非齐次方程的特解求出并线性组合即可,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e^{-i\omega t}, \quad (4.3.114)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}. \quad (4.3.115)$$

第一个方程即方程(4.3.93), 它的特解前已求出, 即

$$x_1(t) = \frac{1}{-\omega^2 - i2\gamma\omega + \omega_0^2} e^{-i\omega t}. \quad (4.3.116)$$

第二个方程是第一个方程的复共轭, 因此, 其特解可取为第一个方程特解的复共轭,

$$x_2(t) = \frac{1}{-\omega^2 + i2\gamma\omega + \omega_0^2} e^{i\omega t}. \quad (4.3.117)$$

或直接取试探解,

$$x_2(t) = A e^{i\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad (4.3.118)$$

亦可求得相同的结果。对二者作线性组合, 使得方程(4.3.112)的特解,

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t) \\ &= \frac{\alpha}{-\omega^2 - i2\gamma\omega + \omega_0^2} e^{-i\omega t} + \frac{\alpha}{-\omega^2 + i2\gamma\omega + \omega_0^2} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.3.119)$$

写作实形式, 便是

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\right). \quad (4.3.120)$$

相应齐次方程的通解, 不管阻尼强弱如何, 经过相当长的时间之后都是指数式衰减的, 因此, 在经过足够长的时间之后, 齐次方程的通解便很微弱, 可以忽略不记, 此时, 振子的受迫振动行为可以完全用上述特解描写. 详细内容就不赘述了, 参阅相关教材可也. ■

在本节的最后, 我们来考察一般的 n 阶常系数线性常微分方程,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 x = f(t). \quad (4.3.121)$$

在复数域上, 作算子分解,

$$\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right), \quad (4.3.122)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是多项式,

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (4.3.123)$$

在复数域上的 n 个根, 重根按重数计算. 数学上, 常称多项式 $P(\lambda)$ 为相应方程(4.3.121) 的特征多项式. 利用算子分解, 方程(4.3.121)可写为

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right) x(t) = f(t). \quad (4.3.124)$$

于是, 通过引进 $n-1$ 个中间变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 我们可以得到串联方程组如下,

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) x_{n-1}(t) = f(t), \quad (4.3.125)$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) x_{n-2}(t) = x_{n-1}(t), \quad (4.3.126)$$

.....

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_{n-1}\right) x_1(t) = x_2(t), \quad (4.3.127)$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right) x(t) = x_1(t). \quad (4.3.128)$$

因此, 在数学上, 问题归结为解一阶常系数线性常微分方程,

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) y(t) = g(t), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (4.3.129)$$

其中, $g(t)$ 是一个实变复值函数. 如果 $g(t) = 0$, 方程为齐线性方程, 分离变量,

$$\frac{dy}{y} = \alpha dt, \quad (4.3.130)$$

然后积分, 即得通解如下,

$$y = c e^{\alpha t}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (4.3.131)$$

如果 $g(t) \neq 0$, 则两边乘以

$$e^{-\alpha t}, \quad (4.3.132)$$

得

$$\frac{d}{dt} [e^{-\alpha t} y(t)] = g(t) e^{-\alpha t}. \quad (4.3.133)$$

积分, 得

$$e^{-\alpha t} y(t) = \int dt g(t) e^{-\alpha t} + c, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (4.3.134)$$

这里, 不定积分不包含任意常数, 它仅仅表示被积函数的任意一个确定的原函数而已。这样, 我们便得通解如下,

$$y(t) = c e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int dt g(t) e^{-\alpha t}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (4.3.135)$$

事实上, 上式第一项即相应齐线性方程的通解, 第二项即非齐线性方程的特解。

这样, 我们原则上就解决了一般高阶常系数线性常微分方程的求解问题。当然, 对于具体的方程, 这里的方法不一定是最简便的, 另外, 还有常系数线性常微分方程组, 等等, 这些更复杂的问题只能留待读者参考有关常微分方程方面的教材了。