

# 目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 目 录                         | 1  |
| 第十七章 静磁场                    | 2  |
| §17.1 电荷守恒及连续性方程            | 2  |
| §17.2 磁场                    | 4  |
| §17.3 矢量势                   | 11 |
| 17.3.1 面电流密度                | 11 |
| 17.3.2 矢量势                  | 14 |
| 17.3.3 磁偶极子                 | 19 |
| 17.3.4 Dirac $\delta$ 函数*   | 23 |
| §17.4 磁场的Gauss定律和Ampère环路定律 | 33 |
| §17.5 矢量势的计算*               | 39 |
| §17.6 磁场对电流的作用力             | 43 |
| 17.6.1 平行载流直线间的相互作用         | 43 |
| 17.6.2 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的力矩    | 44 |
| 17.6.3 一般载流线圈在均匀磁场中所受的力矩    | 47 |
| 17.6.4 磁偶极子在外磁场中所受之力和力矩     | 48 |
| §17.7 磁场对电荷的作用力             | 54 |
| 17.7.1 洛伦兹力                 | 54 |
| 17.7.2 回旋运动                 | 55 |
| 17.7.3 轮转线运动                | 58 |
| 17.7.4 霍尔效应                 | 63 |
| §17.8 运动电荷的电磁场*             | 66 |

# 第 17 章 静磁场

本章讨论静磁场。历史上，静磁现象的研究是从天然磁铁开始的。现代物理则将Oersted（奥斯特）实验作为磁学的出发点，这是因为，天然磁铁乃是一种介质，属于磁介质的一种，本质上，它是磁场与介质耦合的结果，磁介质很复杂、一点也不纯粹，因之，很难阐明磁性的本质。Oersted实验则表明，电流也能产生磁场。电流是电荷运动的产物，于是，Oersted实验将电现象与磁现象联系了起来，它揭示出电与磁有相同的物理起源。因此，Oersted实验在电磁学中具有基本而重要意义。为此，我们先来阐明电流的概念，见下一节。

## §17.1 电荷守恒及连续性方程

宏观上，通常将一群运动的电荷视为连续的流体，就像将一群运动的水分子视为连续的流体一样。这当然是一种近似，是有条件的。一般来说，它要求在一个宏观小而微观大的体积之中必须具备足够多的分子数（或电荷数）。如上章所述（见电介质那一节），这个条件并不苛刻，一般都能满足，因此，人们习惯上采用连续化近似，将一群运动的水分子或电荷视为连续的流体。

在描写水流时，最重要的两个物理量就是质量密度 $\rho$ 和质量流密度 $\mathbf{j}$ ，

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (17.1.1)$$

前者代表单位体积内所含水分子的质量，它是一个标量场。至于后者，其大小为单位时间通过单位面积的流体质量，其方向则为局部水流的速度方向，因此，它是一个矢量场，

$$\rho = \frac{dm}{dv}, \quad j = |\mathbf{j}| = \frac{dm}{dt ds} = \frac{\partial^2 m}{\partial t \partial s}. \quad (17.1.2)$$

宏观上，假定流水的质量守恒是合理的。于是，在流体中任取一块体积，我们有

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) dv = - \oint \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}, \quad (17.1.3)$$

其中， $dv$ 是体积元， $d\mathbf{s}$ 是面积元。显然，上式左边代表了单位时间块内流体的质量增量。按通量的定义，上式右边的积分描写的是单位时间内通过块表面从块内流出块外的流体质量，加负号后，它就变成了单位时间内通过块表面从块外流入块内的流体质量。按质量守恒，它当然与上式左边相等。利用Gauss公式，我们有

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dv. \quad (17.1.4)$$

将之代入式(17.1.3)的右边, 我们得

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) dv = - \int \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dv. \quad (17.1.5)$$

移项, 并注意到

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) dv = \int \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) dv, \quad (17.1.6)$$

我们有

$$\int \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right] dv = 0. \quad (17.1.7)$$

上式对任意体积均成立, 当然对球体亦成立。现在, 在流体中, 以点  $\mathbf{r}$  为中心, 任取一半径为  $\delta$  的小球, 并将上式应用到此小球上, 我们有

$$\frac{1}{V} \int \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right] dv = 0, \quad (17.1.8)$$

其中,  $V$  为小球的体积,

$$V = \frac{4\pi}{3} \delta^3. \quad (17.1.9)$$

取极限, 得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right] dv = 0. \quad (17.1.10)$$

注意到被积函数的连续性, 并利用积分中值定理, 得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}_c, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_c, t) \right] = 0, \quad (17.1.11)$$

其中,  $\mathbf{r}_c$  乃小球体内某一点。显然, 当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\mathbf{r}_c \rightarrow \mathbf{r}$  (见前, 点  $\mathbf{r}$  乃小球之球心也), 于是, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (17.1.12)$$

通常称上式为流体的**连续性方程** (continuity equation), 它是流体质量守恒的反映。

类如流水, 电荷之流动有电荷守恒。改上述之质量密度为电荷密度, 水流密度为电流密度,

$$\rho = \frac{dq}{dv}, \quad j = |\mathbf{j}| = \frac{dq}{dt ds} = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s}. \quad (17.1.13)$$

我们同样有连续性方程,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (17.1.14)$$

不同的是, 这里的电荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  可正可负, 因为电荷有正负也。电荷守恒是电磁现象的一个基本规律, 是Maxwell提出位移电流的立论依据 (见后)。

对于稳恒流动 (steady current), 例如直流电 (direct current), 电荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  与电流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  均不随时间变化,

$$\rho = \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (17.1.15)$$

于是,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \quad (17.1.16)$$

以及

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (17.1.17)$$

这说明，在稳恒流动的情况下，电流密度为无源场，换句话说，电流线是闭合的。

值得注意到是，在稳恒流动的情况下，一般地，

$$\rho(\mathbf{r}) \neq 0. \quad (17.1.18)$$

因此，在稳恒流动的情形下，可以有静态的（static）的电荷分布。这意味着，伴随着的稳恒电流，一般有静电场分布，

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (17.1.19)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}) dv. \quad (17.1.20)$$

此处有介质——导体，必要时，需要分区求解。

此外，对于金属等导体，在稳恒流动的情形下，电流满足欧姆定律（Ohm's law），

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (17.1.21)$$

其中， $\sigma$  为导体的电导率。或者，更详细地，

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (17.1.22)$$

这说明，稳恒流动不同于静电平衡（electrostatic equilibrium），此时导体内可以有静电场的分布，因为导体内可以有电流。

以上讨论说明，稳恒电流可以产生静电场，这是容易理解的。然而，Oerstedt发现，它还可以产生静磁场，具体情形如何，且待下节分解。

## §17.2 磁场

一八一九年，丹麦物理学家Oersted发现，当金属电线通上直流电后，可以产生磁场，见图17.2.1。

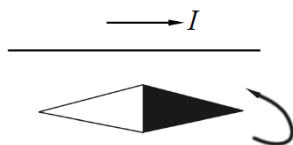


图 17.2.1. 奥斯特实验

在奥斯特实验中，磁相互作用出现在电流与磁针之间，随后，人们还发现，磁相互作用还可以出现在电流与电流之间。然而，由于直流电总要形成闭合回路（稳恒电流也一样），不存在孤立的电流元，因此，不同于电荷之间的静电作用，那里存在孤立的点电荷（即电荷元），人们要找到静磁相互作用的具体

形式就没有那么容易了。尽管如此, 经过一批法国学者, 特别是Biot、Savart、Ampère以及Laplace, 的努力, 人们还是得到了电流与电流之间磁相互作用的数学表达式,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (17.2.1)$$

上式称为**安培定律** (Ampère law), 它代表了两个直流电流圈之间的相互作用, 见图17.2.2。这里,  $\mathbf{F}_{12}$

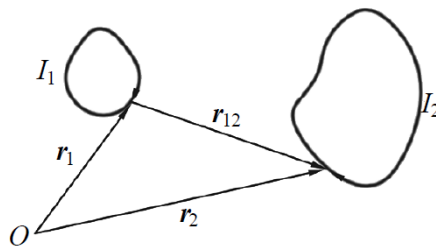


图 17.2.2. 安培定律

是第一个电流圈对第二个电流圈的作用力, 也称**安培力** (Ampère force)。 $\mu_0$  是国际单位制中真空的磁导率 (permeability),

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}. \quad (17.2.2)$$

另外,  $I_1$  和  $I_2$  分别是第一和第二个电流圈的电流,  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  分别是第一和第二个电流圈中的电流元的位矢,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $d\mathbf{l}_1$  表示沿着第一个电流圈的线积分 ( $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{r}_1$ ),  $d\mathbf{l}_2$  表示沿着第二个电流圈的线积分 ( $d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{r}_2$ )。人们也称  $I_1 d\mathbf{l}_1$  和  $I_2 d\mathbf{l}_2$  为电流元, 它们都是矢量, 因为电流有方向。容易看出, 两电流元之间的相互作用仍然是平方反比律, 只不过现在电流元是矢量, 因此, 相对于库伦定律, 现在力的表达式要复杂得多。

调换上式中 1, 2 的角色, 我们就得到了第二个电流圈对第一个电流圈的作用力,

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3}. \quad (17.2.3)$$

可以证明, 两个电流圈的相互作用满足牛顿第三定律,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (17.2.4)$$

首先, 注意到

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (17.2.5)$$

我们有

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}) = d\mathbf{l}_2(d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{21}) - \mathbf{r}_{21}(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2). \quad (17.2.6)$$

又

$$d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{r}_1, \quad d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{r}_2, \quad (17.2.7)$$

上式可以写为

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}) = d\mathbf{r}_2(d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{21}) - \mathbf{r}_{21}(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2). \quad (17.2.8)$$

这样, 我们有

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} = \frac{d\mathbf{r}_2(\mathbf{dr}_1 \cdot \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} - \frac{\mathbf{r}_{21}(\mathbf{dr}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)}{r_{21}^3}. \quad (17.2.9)$$

考虑到

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (17.2.10)$$

这是平方反比力的特性, 我们有

$$\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} = -\nabla_1 \frac{1}{r_{21}}, \quad (17.2.11)$$

这里,  $\nabla_1$  表示对变量  $\mathbf{r}_1$  取梯度,

$$\nabla_1 = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_1}. \quad (17.2.12)$$

于是, 我们得

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} = -d\mathbf{r}_2(\mathbf{dr}_1 \cdot \nabla_1 \frac{1}{r_{21}}) - \frac{\mathbf{r}_{21}(\mathbf{dr}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)}{r_{21}^3}. \quad (17.2.13)$$

将之代回到  $\mathbf{F}_{21}$  的表达式, 我们有

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 d\mathbf{r}_2 \left( \oint_1 d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 \frac{1}{r_{21}} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{r}_{21}(\mathbf{dr}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)}{r_{21}^3}. \quad (17.2.14)$$

注意到

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla f, \quad (17.2.15)$$

其中,  $f = f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ , 我们有

$$d\mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r} = d\frac{1}{r}. \quad (17.2.16)$$

这意味着

$$d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 \frac{1}{r_{21}} = d_1 \frac{1}{r_{21}}, \quad (17.2.17)$$

其中,  $d_1$  表示仅对变量  $\mathbf{r}_1$  取微分,  $\mathbf{r}_2$  保持不变。于是, 我们有

$$\oint_1 d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 \frac{1}{r_{21}} = \oint_1 d_1 \frac{1}{r_{21}} = 0. \quad (17.2.18)$$

将之代回到  $\mathbf{F}_{21}$  的表达式, 我们得

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2). \quad (17.2.19)$$

同理可得

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2). \quad (17.2.20)$$

注意到

$$\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}, \quad (17.2.21)$$

即知

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (17.2.22)$$

在电荷连续分布的情况下，库仑力可以写为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \rho_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad (17.2.23)$$

其中，为了方便，我们使用  $d\mathbf{r}_1$  和  $d\mathbf{r}_2$  表示体积元。通过引进电场，上式可以分解为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.2.24)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \int \rho_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (17.2.25)$$

这里，第一式表示电荷在空间所激发的电场，第二式表示分布在电场中的电荷所受的作用力。同样地，安培力

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (17.2.26)$$

也可以通过引进磁感应强度  $\mathbf{B}$  而作分解，

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I_1(\mathbf{r}') d\mathbf{l}' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.2.27)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \int I_2(\mathbf{r}) d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (17.2.28)$$

其中，第一式表示电流所激发的空间磁场，称为**Biot-Savart定律**，第二式表示分布在磁场中的电流所受的力作用。为了便于记忆，可以引进磁场微元  $d\mathbf{B}$  和力微元  $d\mathbf{F}$ ，

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}, \quad (17.2.29)$$

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}, \quad (17.2.30)$$

其中，

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.2.31)$$

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (17.2.32)$$

这两个微元经常用于计算静磁场与安培力。上面两式与静电场和库仑力的计算公式是相似的，差别是这里使用了叉乘，那是因为电荷元是标量，而电流元则是矢量。

在国际单位制中，磁感应强度的单位是T (Tesla, 特斯拉)

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}). \quad (17.2.33)$$

特斯拉是一个比较大的单位，在实际工作中，人们还常常使用另一单位——高斯 (Gs, Gauss)，

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}. \quad (17.2.34)$$

高斯这一单位并不属于国际单位制，而是属于高斯单位制。

下面，我们先计算磁场，有关电流和运动电荷所受的磁力，我们留到后面的相关小节里进行讨论。

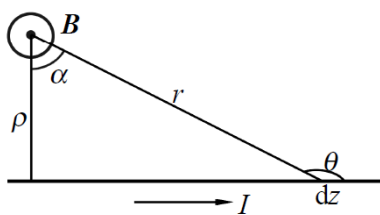


图 17.2.3. 无限长直线电流的空间磁场

**例17.2.1.** 如图17.2.3所示, 无限长电线载有直流电流  $I$ , 试计算电线外磁感应强度  $\mathbf{B}$  的空间分布。

**解.** 明显地, 系统有圆柱对称性, 因此, 我们可以将无限长电线取为  $z$  轴, 并且以电流的方向为  $z$  轴的正方向。选待算场点在导电线上的正投影为坐标原点, 如图17.2.3。这样, 位矢  $\mathbf{r}$  处的磁场微元可以写为如下形式,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (Idz \mathbf{e}_z) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (17.2.35)$$

其中,

$$\mathbf{r} = z \mathbf{e}_z + \rho \mathbf{e}_\rho. \quad (17.2.36)$$

注意到, 在柱坐标系下, 三个基矢量  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  是正交归一的右手系, 我们得

$$(Idz \mathbf{e}_z) \times \mathbf{r} = (Idz \mathbf{e}_z) \times (z \mathbf{e}_z + \rho \mathbf{e}_\rho) = I\rho dz \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.2.37)$$

这样, 我们有

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\rho dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \frac{d(z/\rho)}{\left[1 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.2.38)$$

见图17.2.3, 引用夹角  $\alpha$ , 我们有

$$\frac{z}{\rho} = \tan \alpha, \quad (17.2.39)$$

于是,

$$\frac{d(z/\rho)}{\left[1 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}} = \cos \alpha d\alpha. \quad (17.2.40)$$

将之代回磁场微元, 得

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.2.41)$$

积分, 得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.2.42)$$

上式即磁场在直线外的空间分布。 ■

**例17.2.2.** 计算电流环在对称轴上的磁场。如图17.2.4, 设一金属导线环, 半径为  $R$ , 载有电流  $I$ , 求其中心对称轴上的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

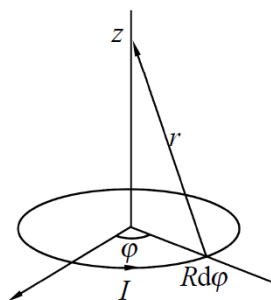


图 17.2.4. 电流环在对称轴上的磁场

解. 以电流环的对称中心为原点, 以对称轴为  $z$  轴, 建立柱坐标系, 见图 17.2.4。此时, 对称轴上任意一点的位矢  $\mathbf{r}$  可表为

$$\mathbf{r} = -R\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z. \quad (17.2.43)$$

于是, 对称轴上位矢  $\mathbf{r}$  处的磁场微元可写为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (IRd\varphi \mathbf{e}_\varphi) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (17.2.44)$$

利用基矢  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  的正交归一右手性, 我们得

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (z\mathbf{e}_\rho + R\mathbf{e}_z) d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\rho d\varphi + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z d\varphi. \end{aligned} \quad (17.2.45)$$

积分, 得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\rho d\varphi + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (17.2.46)$$

由于

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad (17.2.47)$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\rho d\varphi &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) d\varphi \\ &= \mathbf{i} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \mathbf{j} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (17.2.48)$$

这样, 我们有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z. \quad (17.2.49)$$

此即电流环对称轴上的磁场。■

在电磁学中, 电流环是一个磁偶极子 (magnetic dipole), 定义

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S} = I(\pi R^2 \mathbf{e}_n) = \pi R^2 I \mathbf{e}_n, \quad (17.2.50)$$

称为电流环的**磁偶极矩** (magnetic dipole moment)。上式中, 电流的方向同面积的方向满足右手螺旋定则。可以证明 (见下节), 磁偶极子的磁场 (远场) 为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \boldsymbol{\mu}]. \quad (17.2.51)$$

上例的结果属于  $\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\mu}$  的情况。

**例17.2.3.** 如图17.2.5所示, 将一根金属导线弯成一个半圆的环路 (a semi-circular loop), 其中, 半圆弧的半径为  $R$ 。设导线中载有电流  $I$ , 求半圆弧圆心  $P$  点上的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

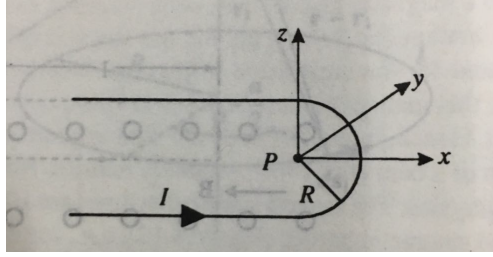


图 17.2.5. Magnetic field in a semi-circular loop

**解.** 如图17.2.5, 将半圆弧圆心  $P$  选为坐标原点, 将半圆的环路放置在  $xz$  平面, 使环路的直线部分与  $x$  轴平行。设下半枝回路的电流方向沿  $x$  轴正向。由 *Biot-Savart* 定律,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (17.2.52)$$

对于半圆弧圆心  $P$  点,  $\mathbf{r} = 0$ , 于是,

$$\mathbf{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int I d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3}. \quad (17.2.53)$$

整个回路分为三部分, 在下半直线支路上,

$$d\mathbf{r}' = dx \mathbf{i}; \quad \mathbf{r}' = x \mathbf{i} - R \mathbf{k}; \quad (17.2.54)$$

在中间半圆弧上,

$$d\mathbf{r}' = R d\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathbf{r}' = R \mathbf{e}_\rho. \quad (17.2.55)$$

在上半直线支路上,

$$d\mathbf{r}' = dx \mathbf{i}; \quad \mathbf{r}' = x \mathbf{i} + R \mathbf{k}; \quad (17.2.56)$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(dx \mathbf{i}) \times (x \mathbf{i} - R \mathbf{k})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R d\varphi \mathbf{e}_\varphi) \times (R \mathbf{e}_\rho)}{R^3} \\ &\quad - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{(dx \mathbf{i}) \times (x \mathbf{i} + R \mathbf{k})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{-\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{j} \\
& = -\frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \mathbf{j} \\
& = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/R)}{[1 + (x/R)^2]^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4 R} \mathbf{j} \\
& = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4 R} \mathbf{j} \\
& = -\frac{\mu_0}{4\pi} (2 + \pi) \mathbf{j}.
\end{aligned} \tag{17.2.57}$$

■

### §17.3 矢量势

在上节，我们使用了线电流元  $I d\mathbf{l}$ ，其中， $I$  是所谓的电流强度，

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{17.3.1}$$

显然，

$$j = |\mathbf{j}| = \frac{dq}{dt ds} = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} = \frac{dI}{ds}. \tag{17.3.2}$$

这意味着

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}, \tag{17.3.3}$$

或者，

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}. \tag{17.3.4}$$

这说明，电流强度就是电流密度的通量，或者说，电流密度是电流强度的通量密度。这里，我们已经计入了电流的方向。

在某种意义上，电流强度，包括电流方向后，记作  $\mathbf{I}$ ，可以看作电流的线密度，我们有

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{I} d\mathbf{l}, \tag{17.3.5}$$

这是因为  $d\mathbf{l}$  总是平行于电流的方向，也就是平行于  $\mathbf{I}$ 。

就象电荷有线电荷密度、面电荷密度、体电荷密度一样，电流也有线电流密度、面电流密度、体电流密度。线电流密度如上，体电流密度就是通常所谓的电流密度  $\mathbf{j}$ 。下一小节，我们来介绍面电流密度。

#### §17.3.1 面电流密度

对于电流在一极薄导电层流过的情况，我们可以用面电流密度来描写。如图17.3.6所示，作一薄

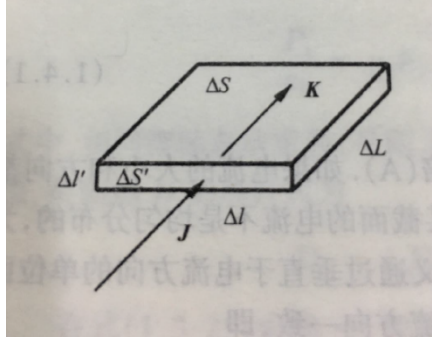


图 17.3.6. 电流流过极薄层

长的方块，其体积为  $\Delta v = \Delta S' \Delta L$ 。设电流方向与截面  $\Delta S'$  垂直，与  $\Delta L$  边平行。我们定义面电流密度  $\mathbf{K}$  如下：

$$\mathbf{K} := \frac{\mathbf{I}}{\Delta l}. \quad (17.3.6)$$

也就是说，面电流密度的大小，等于通过与电流方向垂直的单位长度上的电流强度，其方向则与电流方向一致。上式也经常写为

$$\mathbf{I} = \mathbf{K} \Delta l. \quad (17.3.7)$$

在图17.3.6中，注意到

$$\Delta S = \Delta l \Delta L, \quad \Delta S' = \Delta l \Delta l', \quad (17.3.8)$$

我们有

$$\mathbf{j} \Delta v = \mathbf{j} \Delta S' \Delta L = \mathbf{I} \Delta L = (\mathbf{K} \Delta l) \Delta L = \mathbf{K} (\Delta l \Delta L) = \mathbf{K} \Delta S. \quad (17.3.9)$$

取极限，得

$$\mathbf{j} dv = \mathbf{K} dS = \mathbf{I} dL. \quad (17.3.10)$$

这就是体电流元、面电流元、线电流元之间的一般关系，在电磁理论中经常使用。

安培定律也可以推广至面电流和体电流的情形，

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_1 \int_2 \frac{\mathbf{K}_2 ds_2 \times (\mathbf{K}_1 ds_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad (17.3.11)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_1 \int_2 \frac{\mathbf{j}_2 dv_2 \times (\mathbf{j}_1 dv_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (17.3.12)$$

相应地，磁感应强度和安培力分别为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.3.13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.3.14)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{K}(\mathbf{r}) ds \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (17.3.15)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (17.3.16)$$

**例17.3.1.** 无限大导体平板载有定向面电流, 大小均匀。设面电流密度为  $\mathbf{K}$ , 求板外空间的磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。

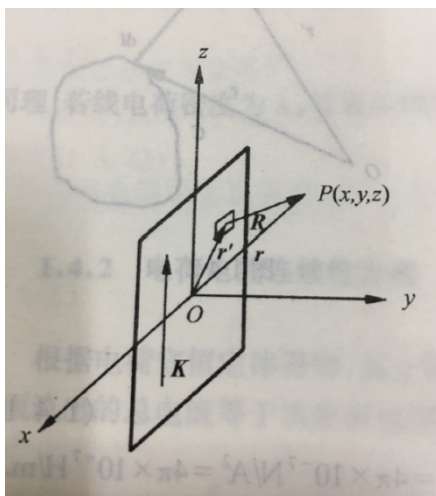


图 17.3.7. 无限大电流平板的磁场

**解.** 如图17.3.7所示, 任取平板上一点作为坐标原点  $O$ , 取平板为  $xz$  平面, 并取电流方向为  $z$  轴。我们有

$$\mathbf{K} = K \mathbf{k}. \quad (17.3.17)$$

根据 *Biot-Savart* 定律, 板外  $P$  点处的磁场可以写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{K}(\mathbf{r}') d\mathbf{s}' \times \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (17.3.18)$$

令

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i} + z' \mathbf{k}. \quad (17.3.19)$$

我们有

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = (x' - x) \mathbf{i} - y \mathbf{j} + (z' - z) \mathbf{k}. \quad (17.3.20)$$

于是,

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}(\mathbf{r}')] \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= (K \mathbf{k}) \times [(x' - x) \mathbf{i} - y \mathbf{j} + (z' - z) \mathbf{k}] \\ &= K[y \mathbf{i} + (x' - x) \mathbf{j}]. \end{aligned} \quad (17.3.21)$$

这样, 我们便有

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dz' \frac{y \mathbf{i} + (x' - x) \mathbf{j}}{[(x' - x)^2 + y^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}. \quad (17.3.22)$$

令

$$z' = z + \rho \cos \varphi, \quad (17.3.23)$$

$$x' = x + \rho \sin \varphi, \quad (17.3.24)$$

则磁感应强度  $B$  可以表为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\rho \rho \frac{y\mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j}}{[\rho^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (17.3.25)$$

积之, 得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{i}, & y > 0; \\ +\frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{i}, & y < 0. \end{cases} \quad (17.3.26)$$

此即导体平板外的磁场。

本例中, 若先积去  $dz'$ , 亦可, 并且它还可以用于计算有限宽度导体平板的磁场, 例如,  $0 \leq x' \leq b$ 。此时, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} K \int_0^b dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{y\mathbf{i} + (x' - x)\mathbf{j}}{[(x' - x)^2 + y^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi} K \int_0^b dx' \frac{y\mathbf{i} + (x' - x)\mathbf{j}}{(x' - x)^2 + y^2} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi} K \left[ \left( \arctan \frac{b-x}{y} + \arctan \frac{x}{y} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(b-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j} \right]. \end{aligned} \quad (17.3.27)$$

■

在上面对  $z'$  的积分中, 我们利用了以下分解:

$$\frac{1}{(z')^2 + a^2} = \frac{1}{(z' - ia)(z' + ia)} = \frac{1}{2ia} \left( \frac{1}{z' - ia} - \frac{1}{z' + ia} \right). \quad (17.3.28)$$

从前面式(17.3.9)和(17.3.10)的推导来看, 体电流密度才是基本的, 面电流密度和线电流密度是体电流密度衍生的结果。因此, 在电磁理论的推导中, 往往以体电流密度作为例子进行推演。我们下面也是这样的。

### §17.3.2 矢量势

大家知道, 静电场  $\mathbf{E}$  可以用标量势  $\varphi$  表示,

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (17.3.29)$$

这是因为平方反比律有表示,

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}, \quad (17.3.30)$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
 &= -\nabla\varphi,
 \end{aligned} \tag{17.3.31}$$

其中,  $d\mathbf{r}'$  代表体积元 (在不至误会的地方, 以后就不再声明了),  $\nabla$  代表对变量  $\mathbf{r}$  的偏导, 而  $\varphi$  则正是所谓的标量势,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{17.3.32}$$

当电场强度用标量势表示时, 标量势有一个常数的不确定性, 这是因为

$$\nabla(\varphi + c) = \nabla\varphi, \tag{17.3.33}$$

故  $\varphi' = \varphi + c$  也是系统的标量势,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi'. \tag{17.3.34}$$

斯无害也, 人们可以根据需要, 选择合适的参照点来确定常数  $c$ 。

对于静磁场, 磁感应强度可以用所谓的**矢量势** (vector potential) 来表示。之所以如此, 仍然是因为平方反比律有表示(17.3.30):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.
 \end{aligned} \tag{17.3.35}$$

考虑到

$$\nabla \times (\psi \mathbf{f}) = \psi \nabla \times \mathbf{f} + \nabla\psi \times \mathbf{f}, \tag{17.3.36}$$

其中,  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  是标量场,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  是矢量场, 也就是

$$\nabla\psi \times \mathbf{f} = \nabla \times (\psi \mathbf{f}) - \psi \nabla \times \mathbf{f}, \tag{17.3.37}$$

我们有

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \tag{17.3.38}$$

因为  $\nabla$  是对变量  $\mathbf{r}$  的偏导, 所以

$$\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \tag{17.3.39}$$

于是,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (17.3.40)$$

将之代入磁感应强度  $\mathbf{B}$  的表达式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (17.3.41)$$

其中,  $\mathbf{A}$  正是所谓的矢量势,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17.3.42)$$

正如电场强度用标量势表示时有不确定性, 磁感应强度用矢量势表示时也有不确定性。设  $\psi$  为一个标量场。注意到梯度的旋度为零,

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0, \quad (17.3.43)$$

我们有

$$\nabla \times [\mathbf{A} + \nabla \psi] = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (17.3.44)$$

是故,  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$  也是一个矢量势,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'. \quad (17.3.45)$$

矢量势的不确定度比标量势要大, 它有一个标量场之梯度的不确定性。这种不确定性并不带来危害, 人们可以根据需要选择合适的条件来确定它, 这个合适的条件通常谓之**规范** (gauge)。对于静磁场, 通常选择所谓的**库伦规范** (Coulomb gauge) 来消去矢量势的不确定性,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (17.3.46)$$

这总是可以实现的: 假定矢量势  $\mathbf{A}'$  不满足库伦规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' \neq 0. \quad (17.3.47)$$

作变换

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \psi, \quad (17.3.48)$$

其中,  $\psi$  是一个待定的标量场, 于是, 我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \psi. \quad (17.3.49)$$

欲使  $\mathbf{A}$  满足库伦规范, 只须  $\psi$  满足

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}' \quad (17.3.50)$$

即可。上式是一个关于标量场  $\psi$  的泊松方程, 这说明, 只要取上述泊松方程的一个解, 矢量场  $\mathbf{A}$  就能满足库伦规范了。关于规范, 在建立了Maxwell方程组以后, 我们还要再讲, 那里可以看到规范的更一般意义。从现代物理的观点来看, 电磁场是一种规范场, 规范是电磁场的本质属性, 值得我们重视。

下面, 我们来证明式(17.3.42)所规定的矢量势满足库伦规范。我们有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.\end{aligned}\quad (17.3.51)$$

其中, 我们利用了矢量分析的公式,

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{f}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \psi \cdot \mathbf{f}. \quad (17.3.52)$$

注意到

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (17.3.53)$$

其中,  $\nabla'$  代表对变量  $\mathbf{r}'$  的偏导, 我们有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \left\{ \nabla' \cdot \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right\},\end{aligned}\quad (17.3.54)$$

其中, 我们再次利用了矢量分析公式(17.3.52)。对于稳恒电流, 由连续性方程, 我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.3.55)$$

这样, 上述矢量势就简化为如下形式了,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \nabla' \cdot \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (17.3.56)$$

注意, 这里体积分的积分区域必须包括所有一切电流在内, 也就是说, 积分区域可以恰好等于电流分布之区域, 也可以比电流分布之区域大(覆盖整个电流分布), 但不能比电流分布之区域小。利用高斯公式, 可以将此体积分化为表面积分,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{s}'. \quad (17.3.57)$$

由于实际电流总是分布在有限区域的, 因此, 我们可以取一个覆盖整个电流分布的空间区域做体积分, 使得该区域的表面(高斯曲面)位于电流分布的边界之外。边界之外, 没有电流分布, 电流密度自然为零, 皮之不存, 毛将焉附, 上式中的曲面积分应等于零。于是, 我们得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (17.3.58)$$

这就完成了证明。

最后, 我们来求矢量势的微分方程。我们知道, 标量势满足泊松方程,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (17.3.59)$$

其中,  $\rho$  是电荷密度。下面, 我们来证明, 静磁场的矢量势也满足泊松方程,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (17.3.60)$$

其中,  $\mathbf{j}$  是电流密度。上式其实就是由三个标量场的泊松方程组成的方程组。在直角坐标系下, 令

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) \mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{r}) \mathbf{e}_2 + A_3(\mathbf{r}) \mathbf{e}_3, \quad (17.3.61)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j_1(\mathbf{r}) \mathbf{e}_1 + j_2(\mathbf{r}) \mathbf{e}_2 + j_3(\mathbf{r}) \mathbf{e}_3, \quad (17.3.62)$$

并注意到

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \nabla^2 A_1 + \mathbf{e}_2 \nabla^2 A_2 + \mathbf{e}_3 \nabla^2 A_3. \quad (17.3.63)$$

式(17.3.60)化为如下等价的方程组,

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_0 j_1, \quad (17.3.64)$$

$$\nabla^2 A_2 = -\mu_0 j_2, \quad (17.3.65)$$

$$\nabla^2 A_3 = -\mu_0 j_3. \quad (17.3.66)$$

标量势  $\varphi$  定义为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17.3.67)$$

它当然是泊松方程(17.3.59)解, 由是可得

$$\int d\mathbf{r}' \left( -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}). \quad (17.3.68)$$

定义函数  $K$

$$K = K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (17.3.69)$$

它是一个积分核, 对任何连续函数  $\rho(\mathbf{r})$ , 此积分核都有性质,

$$\int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}). \quad (17.3.70)$$

这种类型的积分核, 在Fourier级数中也出现过。对于连续函数  $f(t)$ , 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt' D(t - t') f(t') = f(t), \quad t \in (-\pi, \pi), \quad (17.3.71)$$

其中,  $D$  是所谓的Dirichlet核,

$$D(t - t') = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (t - t') \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} (t - t') \right]}. \quad (17.3.72)$$

这类积分核在数学和物理上都是很重要的，它是Dirac（他先修工程，后治量子力学，一代宗师）提出所谓Dirac  $\delta$  函数（Dirac delta function）的背景与基础。Dirac  $\delta$  函数是数学、物理、以及工程学中的一个广大议题，大手印是也，值得认真观修，同学们以后在学习信号与系统时会再遇到它。我们暂且不管那么多，而是将核积分  $K$  应用到连续函数  $A_1(\mathbf{r})$ ，矢量势的第一个分量，我们有

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 A_1 &= -\nabla^2 \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{j_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
 &= \mu_0 \int d\mathbf{r}' \left( -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) j_1(\mathbf{r}') \\
 &= \mu_0 \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') j_1(\mathbf{r}') \\
 &= \mu_0 j_1(\mathbf{r}).
 \end{aligned} \tag{17.3.73}$$

这就证明了

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_0 j_1(\mathbf{r}). \tag{17.3.74}$$

也就是说， $A_1$  满足泊松方程。 $A_2$  和  $A_3$  是类似的。这样，我们就证得了我们所需要的结果。

从上面的演绎过程可以看出，标量势和矢量势都是作为电磁场的计算工具而引进的，本身并不具有物理意义，更确切地说，它们都不是物理实在，虽然标量势与静电力的作功密切相关，给人以很直观的感觉。一直以来，大家也是这么看的——标量势和矢量势仅仅是数学工具，目的是便于电磁场的计算。直到上个世纪六十年代，Aharonov和Bohm通过实验才发现，标量势和矢量势同电子体系的量子行为直接有关，物理上，我们必须承认二者均是物理实在，而不是数学工具。这样，人们就改变了对标量势和矢量势的看法。与此同时，由Yang和Mills所倡导的规范场论也得到了充足的发展，在场论与基本粒子领域得到了广泛的应用。总之，规范已经成为物理学中最基本的概念之一，值得我们认真学习，本小节所讲的只是这方面最初的知识，所谓根基是也。

### §17.3.3 磁偶极子

磁偶极子是电偶极子的对应物，在理论与应用中都很重要。藉助上小节所引进的矢量势，我们来讨论磁偶极子及其场分布。

为了对比，我们先回顾一下标量势的多极展开。设电荷分布在空间某小块区域，我们来考察远离这块电荷的地方上的电场，所谓远场是也。如图17.3.8所示，建立坐标系，记场点  $P$  的位矢为  $\mathbf{r}$ ，电荷元的位矢为  $\mathbf{r}'$ ，电荷元的体积为  $d\tau'$ 。于是， $P$  点的标量势为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{17.3.75}$$

对于远场，

$$r \gg r'. \tag{17.3.76}$$

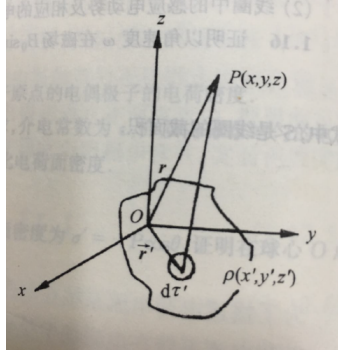


图 17.3.8. 电偶极子

我们有Taylor展开,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + (-\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (17.3.77)$$

将之代入标量势的表达式, 得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \dots, \end{aligned} \quad (17.3.78)$$

其中,

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (17.3.79)$$

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau'. \quad (17.3.80)$$

这就是标量势的多极展开, 其中  $q$  是所谓的电单级子 (electric monopole),  $\mathbf{p}$  是所谓的电偶极子 (electric dipole)。这里, 我们仅保留至单级子, 而忽略了四极子及更高级别的多级子。在多极展开中, 电单级子其实就是系统的总电荷。

至于电场, 只须对标量势取梯度即可,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \dots, \quad (17.3.81)$$

这里,

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \\ \nabla \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \nabla (r^{-3}(p_1x + p_2y + p_3z)) \\ &= (\nabla r^{-3})(p_1x + p_2y + p_3z) + r^{-3} \nabla (p_1x + p_2y + p_3z) \\ &= -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} (p_1x + p_2y + p_3z) + r^{-3} \mathbf{p} \\ &= -\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p} r^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (17.3.82)$$

于是, 我们得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p} r^2}{r^5} + \dots \quad (17.3.84)$$

右边第一项是电单级子的电场, 第二项是电偶极子的电场。

如图17.3.9所示, 设一个导体线圈载有电流  $I$  (为了简单, 我们这里只考虑电流圈, 没有考虑一般情形)。由式(17.3.42)可知 (将体电流元换为线电流元), 点  $P$  处的矢量势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\mathbf{l}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17.3.85)$$

将远场的Taylor展开(17.3.77)代入矢量势的表达式, 并保留至线性级, 得

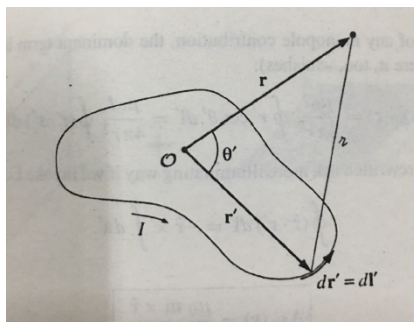


图 17.3.9. 磁偶极子

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\mathbf{l}' \frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\mathbf{l}' \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}', \end{aligned} \quad (17.3.86)$$

其中,  $q_m$  是所谓的**磁单极矩** (magnetic monopole),

$$q_m = \oint I d\mathbf{l}' = I \oint d\mathbf{l}' = 0. \quad (17.3.87)$$

电单级就是电荷, 磁单极自然也就是磁荷。上式说明, 在稳恒电流的情况下, 磁单极是不存在的。在Maxwell建立的Maxwell方程组中也不存在磁单极 ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ )。Dirac从对称性考虑, 提出了磁单极理论, 认为自然界中应该存在磁单极子, 然而, 至今未能获得实验的支持。

这样, 保留至线性级, 我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}'. \quad (17.3.88)$$

注意到  $d\mathbf{l}' = d\mathbf{r}'$ , 并利用矢量分析中的积分公式,

$$\oint u d\mathbf{l} = \int d\mathbf{s} \times \nabla u, \quad (17.3.89)$$

我们有

$$\oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = \int d\mathbf{s}' \times [\nabla'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] = \int d\mathbf{s}' \times \mathbf{r} = \left( \int d\mathbf{s}' \right) \times \mathbf{r} \quad (17.3.90)$$

将之代入矢量势的公式, 得

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (17.3.91)$$

其中,  $\mathbf{m}$  称为磁偶极子或磁偶极矩,

$$\mathbf{m} = \int I d\mathbf{s}' = I \int d\mathbf{s}' = I\mathbf{S}. \quad (17.3.92)$$

式(17.3.91)就是磁偶极子的矢量势, 它同电偶极子的标量势是类似的,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (17.3.93)$$

当电流圈为平面电流圈时,

$$\mathbf{S} = S \mathbf{n}, \quad (17.3.94)$$

其中,  $\mathbf{n}$  是电流圈的单位法矢, 其方向与电流的环绕方向成右手螺旋关系。此时, 磁偶极矩简化为

$$\mathbf{m} = IS \mathbf{n}. \quad (17.3.95)$$

若对式(17.3.91)求旋度, 我们就可以得到磁偶极子的磁场,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (17.3.96)$$

利用矢量分析的公式,

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}, \quad (17.3.97)$$

我们有

$$\nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{m} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (17.3.98)$$

这里,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla \cdot (r^{-3} \mathbf{r}) \\ &= (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3} (\nabla \cdot \mathbf{r}) \\ &= (-3r^{-5} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} \\ &= 0, \quad r \neq 0; \end{aligned} \quad (17.3.99)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= (\mathbf{m} \cdot \nabla) [r^{-3} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})] \\ &= \mathbf{i}(\mathbf{m} \cdot \nabla)(x r^{-3}) + \mathbf{j}(\mathbf{m} \cdot \nabla)(y r^{-3}) + \mathbf{k}(\mathbf{m} \cdot \nabla)(z r^{-3}) \\ &= \mathbf{i} \{ \mathbf{m} \cdot [\nabla(x r^{-3})] \} + \mathbf{j} \{ \mathbf{m} \cdot [\nabla(y r^{-3})] \} + \mathbf{k} \{ \mathbf{m} \cdot [\nabla(z r^{-3})] \} \\ &= \mathbf{i} [\mathbf{m} \cdot (\mathbf{i} r^{-3} - 3x r^{-5} \mathbf{r})] + \mathbf{j} [\mathbf{m} \cdot (\mathbf{j} r^{-3} - 3y r^{-5} \mathbf{r})] + \mathbf{k} [\mathbf{m} \cdot (\mathbf{k} r^{-3} - 3z r^{-5} \mathbf{r})] \\ &= r^{-3} (\mathbf{i} m_1 + \mathbf{j} m_2 + \mathbf{k} m_3) - 3r^{-5} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{i} x + \mathbf{j} y + \mathbf{k} z) \\ &= r^{-3} \mathbf{m} - 3r^{-5} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \\ &= \frac{\mathbf{m} r^2 - 3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, \quad r \neq 0. \end{aligned} \quad (17.3.100)$$

将它们返回原式, 我们得

$$\nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5}. \quad (17.3.101)$$

最后, 将上式返回式(17.3.96), 我们就得到了磁偶极子的场分布,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5}. \quad (17.3.102)$$

它同电偶极子的场分布形式上完全一致,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p} r^2}{r^5}. \quad (17.3.103)$$

### §17.3.4 Dirac $\delta$ 函数\*

前面, 在第17.3.2小节, 我们谈到了Dirac  $\delta$  函数。本小节, 我将给一个初步的介绍。在基础物理这样一个初级的课程中, 它也就够用了。

一般地, 在一维的情况下, 凡是满足下面条件的函数  $g$  均可称为Dirac  $\delta$  函数,

$$\int_a^b f(x)g(x-c) = f(c), \quad c \in (a, b), \quad (17.3.104)$$

其中,  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数。这里区间  $[a, b]$  也可改为  $(a, b)$ , 或  $[a, +\infty)$ , 或  $(a, +\infty)$ , 或  $(-\infty, a)$ , 或  $(-\infty, a]$ , 或  $(-\infty, +\infty)$ , 等等, 只要这些区间包含点  $c$  在内部即可。也就是说, 一维Dirac  $\delta$  函数的定义性质为

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c) = f(c), \quad c \in (a, b). \quad (17.3.105)$$

前面讲过的Dirichlet核  $D(t-t')$  就是一维Dirac  $\delta$  函数的一个实例, 通常记为

$$D(t-t') = \delta(t-t'). \quad (17.3.106)$$

一维Dirac  $\delta$  函数有很多的实例, Dirichlet核  $D(t-t')$  只是其中的一个。例如,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \delta(x), \quad (17.3.107)$$

也是一个。

三维Dirac  $\delta$  函数定义为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{c}) = \delta(x - c_1) \delta(y - c_2) \delta(z - c_3), \quad (17.3.108)$$

其中,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (17.3.109)$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}. \quad (17.3.110)$$

显然,

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{c}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{c}), \quad (17.3.111)$$

其中,  $f(\mathbf{r})$  是连续函数, 点  $\mathbf{c}$  位于积分区域的内部,  $d\mathbf{r}$  表示体积元。二维Dirac  $\delta$  函数与三维的类似, 只要减掉一维即可。上面讲过的积分核  $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  是三维Dirac  $\delta$  函数的一个实例,

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (17.3.112)$$

可见, Dirac  $\delta$  函数是一大类积分核的共同性质。Dirac将它抽象出来单独定义为一个函数, 是极富远见的。这个共同属性太重要了, 它在数学、物理以及工程学中具有广泛的应用。

Dirac是在研究量子力学时提出Dirac  $\delta$  函数的。基于  $\delta$  函数, Dirac建立了量子理论的数学框架, 这种框架在物理上非常成功, 因为理论结果与实验一致。 $\delta$  函数, 性体简明, 一用之后, 如获至宝, 人见人爱, 花见花开。然而, 正如上述, Dirac的定义毕竟是直观的, 经验性的, 在数学上是不够严格的, 尽管它非凡地幸运, 非凡地成功, 可以说天从人愿, 事事如意。不过, 不管它多么幸运, 多么如意, 只要不严密, 数学家总还是胆战心惊, 放心不下, 更看不下去的, 后来法国数学家Schwartz提出了分布理论 (distribution theory), 总算如愿地将Dirac  $\delta$  函数在数学上严密化了, 终于放心了, 可放胆干活了。Schwartz发现, Dirac提出的  $\delta$  函数并不是普通意义的函数, 而是一种分布, 正因如此, Dirac  $\delta$  函数现在也叫**分布** (distribution), 或**广义函数** (generalized function, 这是苏联学者起的名字)。

直到现在, 在物理学的教学中, 大家基本上还是跟着Dirac直观地学  $\delta$  函数, 直观地用  $\delta$  函数, 因为Schwartz的分布理论对学物理的人来说太尖深了, 就是数学系的学生, 也要到高年级或者研究生阶段才能学习它。直观地学习Dirac  $\delta$  函数并不难, 我们就这么干, 至少先得这么干, 等以后有基础、有机会了再学Schwartz的分布理论那也不迟。

物理上, 人们经常这么使用Dirac  $\delta$  函数,

$$f(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (17.3.113)$$

我们知道, 空间点  $\mathbf{r}_0$  处的点电荷  $q$  激发的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (17.3.114)$$

利用式(17.3.113), 我们有

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (17.3.115)$$

于是, 点电荷  $q$  激发的电场可以写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (17.3.116)$$

将之与电荷连续分布情形的电场相比,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (17.3.117)$$

其中,  $\rho(\mathbf{r})$  是电荷分布的密度, 容易猜想

$$q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (17.3.118)$$

就是空间点  $\mathbf{r}_0$  处的点电荷  $q$  的电荷分布密度,

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (17.3.119)$$

下面, 我们来看看这样猜想的合理性: 首先, 由式(17.3.113)易知, 这样的电荷分布密度给出的全空间的总电荷为  $q$ ,

$$\int q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = q. \quad (17.3.120)$$

其次, 以积分核  $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  为实例, 我们来说明, 这样的电荷分布密度所给的电荷只分布在点  $\mathbf{r}_0$  上, 在其它的地方没有电荷分布。当  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  时,

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \end{aligned} \quad (17.3.121)$$

从上小节式(17.3.99), 我们知道

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad r \neq 0. \quad (17.3.122)$$

这意味着

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'. \quad (17.3.123)$$

这说明

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = qK(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0, \quad (17.3.124)$$

即在点  $\mathbf{r}_0$  外, 没有电荷分布。既然, 如上所述, 全空间的总电量为  $q$ , 而在  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  处没有电荷分布, 那么, 总电荷为  $q$  就应完全集中在点  $\mathbf{r}_0$  上。这正是人们对点电荷的直观印象, 因此, 将

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (17.3.125)$$

看作是空间点  $\mathbf{r}_0$  上点电荷  $q$  的电荷分布密度是十分合理的。在电磁学中, 人们正是这么看的。对于单位点电荷,  $q = 1$ , 于是,

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (17.3.126)$$

由此可见,  $\delta$  函数可以视为单位点电荷的电荷密度分布。同理, 容易看出, 如果考虑的是质点问题, 那么,  $\delta$  函数也可以视为单位质点的质量密度分布。为了直观地说明  $\delta$  函数的单点分布性, 人们形象地将它写为

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = 0; \\ 0, & \mathbf{r} \neq 0. \end{cases} \quad (17.3.127)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (17.3.128)$$

为了理解  $\delta$  函数的上述特性, 我们以  $K(\mathbf{r})$  作为实例来说明之。其实, 前面我们已经利用式(17.3.123)说明了

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0. \quad (17.3.129)$$

其次, 注意到在  $\mathbf{r} = 0$  处,  $K(\mathbf{r})$  显然是发散的, 我们有

$$\delta(\mathbf{r}) = \infty, \quad \mathbf{r} = 0. \quad (17.3.130)$$

也就是说,  $\delta(\mathbf{r})$  在  $\mathbf{r} = 0$  不是有限的。最后, 由上上小节的式(17.3.70), 取  $\rho(\mathbf{r}) = 1$ , 可以看出  $\delta(\mathbf{r})$  也满足第二式(17.3.128)。然而, 下面, 我们愿意利用  $K(\mathbf{r})$  给出  $\delta(\mathbf{r})$  满足(17.3.128)的一个直接证明, 因为它与静电场的高斯定律有关。我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \frac{1}{r} d\mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{B(R)} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (17.3.131)$$

其中,  $B(R)$  是一个以坐标原点为中心, 半径为  $R$  的球。利用高斯公式, 上式右边的积分可以化为表面积分, 得

$$\int_{B(R)} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r} = \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{s}, \quad (17.3.132)$$

其中,  $S$  是球  $B(R)$  的表面。在球坐标系下, 面积元可写为

$$d\mathbf{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r, \quad (17.3.133)$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot (r^2 \mathbf{e}_r) \right]_{r=R} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\ &= 4\pi. \end{aligned} \quad (17.3.134)$$

将之代回式(17.3.131), 得

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (17.3.135)$$

容易看出, 这个结果其实就是关于坐标原点处单位点电荷 ( $q = 1$ ) 的高斯定律,

$$\oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0}. \quad (17.3.136)$$

在一维情形下,  $\delta$  函数的单点分布性表现为

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (17.3.137)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (17.3.138)$$

例如, 长度为  $l$  的细杆, 质量为 1, 密度均匀, 即

$$\rho_l(x) = \begin{cases} 1/l, & |x| \leq l/2; \\ 0, & |x| > l/2. \end{cases} \quad (17.3.139)$$

注意, 我们总有

$$\int_{-l/2}^{l/2} \rho_l(x) dx \equiv 1, \quad (17.3.140)$$

于是, 我们得

$$\lim_{l \rightarrow 0} \rho_l(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (17.3.141)$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \int_{-l/2}^{l/2} \rho_l(x) dx = 1. \quad (17.3.142)$$

这说明它是一个点分布, 故

$$\lim_{l \rightarrow 0} \rho_l(x) = \delta(x). \quad (17.3.143)$$

即单位质量的杆, 当长度趋于零时, 其密度即  $\delta$  函数。

再如前面举出的例子,

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0. \quad (17.3.144)$$

容易知道,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x) dx \equiv 1. \quad (17.3.145)$$

因此, 我们有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (17.3.146)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x) dx = 1. \quad (17.3.147)$$

可见, 它也是一个点分布, 故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \delta(x). \quad (17.3.148)$$

再如

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/2\sigma), \quad \sigma > 0. \quad (17.3.149)$$

容易得知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x) dx \equiv 1. \quad (17.3.150)$$

这样, 我们有

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (17.3.151)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma}(x) dx = 1. \quad (17.3.152)$$

可见, 它也是一个点分布, 故

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(x) = \delta(x). \quad (17.3.153)$$

以上这些都是一维  $\delta$  函数的实例, 它们都是某种序列的极限。

现在, 让我们来考察 **Heaviside 函数** (Heaviside function, Heaviside, 英国电气工程师),

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (17.3.154)$$

它在点  $x = 0$  的值不重要, 可以随便给。易知其导数有性质,

$$H'(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (17.3.155)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dH(x) = 1. \quad (17.3.156)$$

可见, 它也是一个点分布, 故

$$H'(x) = \delta(x). \quad (17.3.157)$$

此例表明, 每一个分段连续可微函数的第一类间断点, 当求导时, 均可产生一个常数倍的  $\delta$  函数, 其倍数为该间断点的跃度。例如,

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} f_1(x), & x > 0 \\ f_2(x), & x < 0 \end{cases} \\ &= H(x)f_1(x) + [1 - H(x)]f_2(x), \end{aligned} \quad (17.3.158)$$

其导数为

$$\begin{aligned} f'(x) &= h\delta(x) + \begin{cases} f'_1(x), & x > 0 \\ f'_2(x), & x < 0 \end{cases} \\ &= h\delta(x) + H(x)f'_1(x) + [1 - H(x)]f'_2(x), \end{aligned} \quad (17.3.159)$$

其中,  $h$  为跃度,

$$h = f_1(0) - f_2(0). \quad (17.3.160)$$

单点分布性(17.3.137)和(17.3.138)也可看作  $\delta$  函数的定义, 这是因为, 对于任何连续函数  $f(x)$ , 都有

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) = \begin{cases} f(0) \cdot \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (17.3.161)$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \quad (17.3.162)$$

与前面的定义一致。

如果单点分布不是位于原点，而是位于点  $x = a$ ，则相应的  $\delta$  函数为

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a; \\ 0, & x \neq a. \end{cases} \quad (17.3.163)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (17.3.164)$$

另外，

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a), \quad (17.3.165)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (17.3.166)$$

**例17.3.2.** 计算积分

$$\begin{array}{lll} (a) \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx & (b) \int_0^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx & (c) \int_{0.3}^{2.5} x^3 \delta(x - 2) dx \\ (d) \int_{-\infty}^0 x^3 \delta(x - 2) dx & (e) \int_3^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx & (f) \int_0^1 x^3 \delta(x - 2) dx \end{array}$$

解.

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx = x^3 \Big|_{x=2} = 2^3 = 8. \quad (17.3.167)$$

$$(b) \int_0^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx = x^3 \Big|_{x=2} = 2^3 = 8. \quad (17.3.168)$$

$$(c) \int_{0.3}^{2.5} x^3 \delta(x - 2) dx = x^3 \Big|_{x=2} = 2^3 = 8. \quad (17.3.169)$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 x^3 \delta(x - 2) dx = 0. \quad (17.3.170)$$

$$(e) \int_3^{+\infty} x^3 \delta(x - 2) dx = 0. \quad (17.3.171)$$

$$(f) \int_0^1 x^3 \delta(x - 2) dx = 0. \quad (17.3.172)$$

情形 (a)、(b)、(c)，结果皆为 8，因为积分区间都包含点  $x = 2$ ；情形 (d)、(e)、(f)，结果皆为 0，因为积分区间都不包含点  $x = 2$ 。 ■

**例17.3.3.** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(kx) dx, \quad k \neq 0. \quad (17.3.173)$$

解. 令

$$y = kx. \quad (17.3.174)$$

如果  $k > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(kx) dx &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/k) \delta(y) dy \\ &= \frac{1}{k} f(0). \end{aligned} \quad (17.3.175)$$

如果  $k < 0$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(kx) dx &= \frac{1}{k} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y/k) \delta(y) dy \\ &= -\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/k) \delta(y) dy \\ &= -\frac{1}{k} f(0). \end{aligned} \quad (17.3.176)$$

联合二者, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(kx) dx = \frac{1}{|k|} f(0). \quad (17.3.177)$$

■

例17.3.4. 计算积分

$$\int_V (r^2 + 2) \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r},$$

其中  $V$  是一个以原点为中心半径为  $R$  的球。

解. 注意到

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} = \delta(\mathbf{r}), \quad (17.3.178)$$

以及

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (17.3.179)$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_V (r^2 + 2) \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r} &= \int_V (r^2 + 2) 4\pi \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= (0^2 + 2) 4\pi \\ &= 8\pi. \end{aligned} \quad (17.3.180)$$

■

象  $\delta$  函数这样的广义函数, 其基本功能是做积分核并用于积分。如果两个积分核用于积分时, 其作用效果完全相同, 那么, 我们应该认为它们是相等的。基于这样的看法, 我们可以定义两个广义函数的相等: 如果对于任意的连续函数  $f(x)$ , 以下的等式均成立,

$$\int D_1(x) f(x) dx = \int D_2(x) f(x) dx, \quad (17.3.181)$$

那么, 广义函数  $D_1(x)$  和  $D_2(x)$  相等,

$$D_1(x) = D_2(x). \quad (17.3.182)$$

按照这个定义, 我们有

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x), \quad (17.3.183)$$

特别地,

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (17.3.184)$$

即  $\delta$  函数是偶函数。我们还有

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad (17.3.185)$$

特别地,

$$x\delta(x) = 0. \quad (17.3.186)$$

作为广义函数,  $\delta$  函数还可以求导。 $\delta$  函数的导数记为

$$\delta'(x), \quad (17.3.187)$$

其的定义是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x)dx = -f'(0), \quad (17.3.188)$$

其中,  $f(x)$  是任意一个在点  $x = 0$  附近连续可微的函数。关于这个定义, 我们可以用分部积分来理解:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\delta(x) \\ &= f(x)\delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= 0 - f'(0) \\ &= -f'(0). \end{aligned} \quad (17.3.189)$$

同普通函数一样,  $\delta$  函数的二阶导数就是一阶导数的导数, 记为

$$\delta''(x). \quad (17.3.190)$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta''(x)dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta'(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\delta(x)dx \\ &= f''(0). \end{aligned} \quad (17.3.191)$$

这也可以看作是两次分部积分的结果。利用归纳法,可以看出,  $\delta$  函数可以有任意阶的导数, 记其  $n$  阶数为

$$\delta^{(n)}(x). \quad (17.3.192)$$

作为积分核, 其积分效果如下,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-)^n f^{(n)}(0). \quad (17.3.193)$$

这相当于做了  $n$  次分部积分。此外, 读者不难证明

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (17.3.194)$$

$$\delta^{(n)}(-x) = (-)^n \delta^{(n)}(x). \quad (17.3.195)$$

Dirac  $\delta$  函数还有很多其它的重要性质, 例如Laplace变换、Fourier变换, 等等, 在将来的后继课程里会介绍的, 本课程暂且用不着, 为节省时间, 我们就到此为止, 不越俎代庖了。

现在, 让我们回到电磁场。如果空间中有多点电荷, 例如,  $q_1, \dots, q_n$ , 设它们分别位于点  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ , 那么, 它们在空间激发的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (17.3.196)$$

同单个点电荷的情形一样, 运用  $\delta$  函数, 上式可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \int d\mathbf{r}' q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \left[ \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right] \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (17.3.197)$$

其中,  $\rho(\mathbf{r})$  是点电荷组  $q_1, \dots, q_n$  的电荷密度, 它是各个点电荷的电荷密度之和,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (17.3.198)$$

可以看出, 运用Dirac  $\delta$  函数, 离散分布的电荷和连续分布的电荷在形式上获得了统一: 它们的电场都是

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (17.3.199)$$

它们电势都是

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17.3.200)$$

它们的静电势能都是

$$U = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}). \quad (17.3.201)$$

它们所受的库仑力都是

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (17.3.202)$$

统一的形式便于人们在理论上对它们进行统一的处理。

前面，我们假定了点电荷静止在空间某一点，如果点电荷是运动的，则其位矢将时间变化，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (17.3.203)$$

此时，点电荷的电荷分布密度亦随时间，应写为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]. \quad (17.3.204)$$

如果是电荷组，则为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)]. \quad (17.3.205)$$

运动的点电荷还会产生电流。设点电荷  $q$  在时刻  $t$  的位矢和速度分别为  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$ ，则其体电流密度为

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]\mathbf{v}(t). \quad (17.3.206)$$

如果是一组点电荷，则总电流密度为各个点电荷的电流密度之和，

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)]\mathbf{v}_i(t). \quad (17.3.207)$$

总而言之，引用Dirac  $\delta$  函数，离散分布和连续分布的电荷可以用统一的形式进行理论处理，这为电磁理论的书写、推导、以及演算带来了极大的方便。从微观来看，电荷都是离散的，连续化仅仅是一种模型近似，这也说明离散分布和连续分布的电荷应该有统一的模式，Dirac  $\delta$  函数正好满足了这一需求。

## §17.4 磁场的Gauss定律和Ampère环路定律

从17.3.2小节，我们知道静电场可以用标量势表示，静磁场可以用矢量势表示，

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (17.4.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (17.4.2)$$

由第一式，我们有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\varphi), \quad (17.4.3)$$

注意到梯度的旋度为零，得

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (17.4.4)$$

物理上，称旋度为零的场为无旋场 (irrotational field)。因此，静电场是一个无旋场。又，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi. \quad (17.4.5)$$

考虑到标量势满足泊松方程,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (17.4.6)$$

其中,  $\rho$  为电荷密度, 我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (17.4.7)$$

可见, 静电场的散度一般不为零。

总而言之, 对于静电场, 我们有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (17.4.8)$$

它是静电场满足的两个基本偏微分方程。对它们积分, 并运用Stokes公式和Gauss公式, 得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q, \quad (17.4.9)$$

其中,  $Q$  为高斯曲面内所包含的总电量。这是静电场所满足的两个基本积分方程, 其中, 第二个等式就是大家已经熟知的高斯定律。

我们知道, 高斯定律虽然是一个积分方程, 但在有对称性的情况下, 它是易于求解的, 从它能够很容易地求得系统的电场强度  $\mathbf{E}$ 。这是一个求解静电场的简易法门。类似的情况在静磁场下也是存在的, 那就是安培环路定律, 我们下面来讲它。办法同上面处理静电场的过程是平行的, 那里是从静电场的标量势表示出发来演绎整个理论的, 这里换为静磁场的矢量势表示即可。

由式(17.4.2), 我们有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (17.4.10)$$

从矢量分析, 有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (17.4.11)$$

于是,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (17.4.12)$$

取库伦规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (17.4.13)$$

得

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A}. \quad (17.4.14)$$

注意到, 矢量势满足泊松方程,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (17.4.15)$$

其中,  $\mathbf{j}$  是电流密度, 我们最后得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (17.4.16)$$

这是磁场的旋度, 它一般不为零。另一方面, 对  $\mathbf{B}$  取散度, 我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (17.4.17)$$

由于旋度的散度恒为零, 因此,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (17.4.18)$$

物理上, 散度为零的场称为**无源场** (solenoidal field)。可见, 静磁场是一个无源场。前已指出, 静电场的散度不为零, 因此, 它是有源场, 它的源就是电荷, 也就是电单级。静磁场既然是一个无源场, 它就是没有磁荷的, 也就是不存在磁单极的。

总而言之, 静磁场满足两个如下的偏微分方程,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (17.4.19)$$

此与方程组(17.4.8)相对应, 特别地, 静电场是无旋有源场, 静磁场是有旋无源场。

对上两式积分, 并利用Stokes公式和Gauss公式, 得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (17.4.20)$$

这是静磁场的两个积分方程, 它与静电场的方程组(17.4.9)对应。上面的第一式称为Ampère环路定律 (Ampère circuital law), 其中的  $I$  为穿过环路的电流, 电流方向与环路方向为右手螺旋关系 (right-hand-screw relation)。

当系统具有圆柱对称性和平面平移对称性时, 利用Ampère环路定律计算磁场极为方便。

**例17.4.1.** 无限长载有电流的导体直线 (例17.2.1) 具有圆柱对称性, 对称轴即导体直线自身。以导体直线为  $z$  轴, 以电流方向为  $z$  轴正向, 可以建立一个柱坐标系。在柱坐标系的极坐标平面上, 取一个以坐标原点为中心的圆周, 半径为  $\rho$ 。显然, 圆周各点上的磁场大小相等, 方向皆为自处的坐标矢量  $\mathbf{e}_\varphi$ 。取此圆周为安培环路, 按照安培环路定律, 我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (17.4.21)$$

其中,  $I$  是直线上荷载的电流。左边的回路积分容易算出,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint (B\mathbf{e}_\varphi) \cdot (\mathbf{e}_\varphi d\mathbf{l}) = \oint B d\mathbf{l} = 2\pi\rho B. \quad (17.4.22)$$

由此, 我们得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}. \quad (17.4.23)$$

最后, 附上方向, 我们得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.4.24)$$

此与例17.2.1所得结果一致, 但现在的解方程方法要比那里的直接计算法简单得多, 这就是为什么物理上喜好建方程、解方程了。

**例17.4.2.** 无限长圆柱导体, 半径为  $R$ , 载有电流  $I$ , 电流沿横截面均匀分布, 求其磁场分布。系统具有圆柱对称性。以圆柱导体的中心轴为  $z$  轴, 以电流方向为  $z$  轴正向, 建立一个柱坐标系。同上

例, 在极坐标平面上, 取一个以坐标原点为中心的圆周, 半径为  $\rho$ 。圆周各点上的磁场大小相等, 方向皆为自处的坐标矢量  $\mathbf{e}_\varphi$ 。取此圆周为安培环路, 按照安培环路定律, 我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{in}, \quad (17.4.25)$$

其中,  $I_{in}$  为穿过环路的电流。当  $\rho < R$  时,

$$I_{in} = \frac{\pi \rho^2}{\pi R^2} I = \frac{\rho^2}{R^2} I. \quad (17.4.26)$$

当  $\rho \geq R$  时,

$$I_{in} = I. \quad (17.4.27)$$

左边的回路积分为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \rho B. \quad (17.4.28)$$

由是, 我们得

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi R^2}, & \rho < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (17.4.29)$$

计入方向, 我们得

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (17.4.30)$$

**例17.4.3.** 如图17.4.10所示, 无限大导体平板, 位于  $xy$  平面, 载有均匀电流, 面电流密度为  $\mathbf{K} = K \mathbf{e}_x$  (参考例17.3.1, 那里平板位于  $zx$  平面, 电流方向沿  $z$  轴正向)。

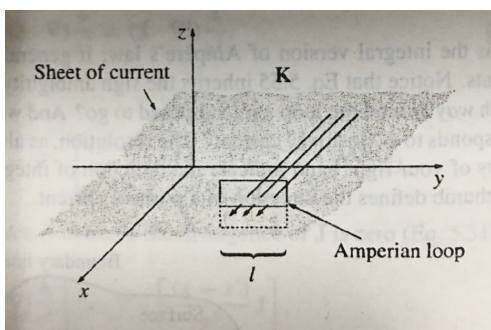


图 17.4.10. 电流平板

按照Biot-Savart定律, 磁场与电流垂直, 因此,  $\mathbf{B}$  不会有  $x$  分量。将面电流平行于  $x$  轴作分割, 微元为平行于  $x$  轴的直线电流, 利用直线电流的结果, 并考虑到沿平面  $y$  轴方向的平移不变性, 容易得知,  $\mathbf{B}$  也不会有  $z$  分量 (两侧对称直线电流元的磁场  $z$  分量相互抵消)。这样,  $\mathbf{B}$  只有  $y$  分量, 并且显然在平板上侧  $\mathbf{B} = -B \mathbf{e}_y$ , 在平板下侧  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_y$ 。如图17.4.10所示, 垂直于  $x$  轴取矩形安培回路, 使之上下对称地骑跨在平板两侧。按照安培环路定律, 我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (17.4.31)$$

其中,  $I$  是穿过安培回路的电流,

$$I = K l. \quad (17.4.32)$$

至于安培回路积分, 显然,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl. \quad (17.4.33)$$

这说明

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 K. \quad (17.4.34)$$

最后, 计入方向, 我们得

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{e}_y, & z > 0 \\ \frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{e}_y, & z < 0. \end{cases} \quad (17.4.35)$$

此结果与例17.3.1一致。

**例17.4.4.** 如图17.4.11所示, 无限长螺线管载有电流  $I$ , 螺线很密, 讨论电流激发的磁场。

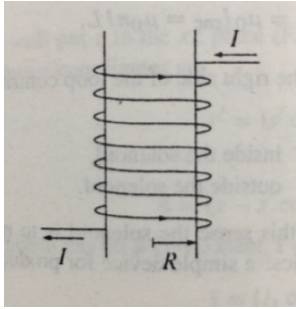


图 17.4.11. 无限长载流螺线管

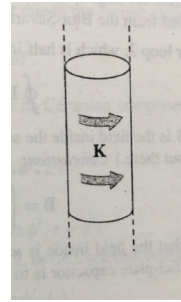


图 17.4.12. 无限长载流圆柱壳

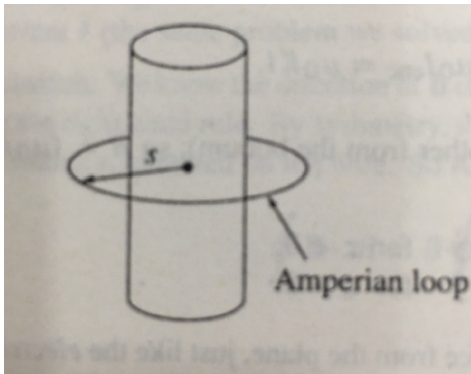


图 17.4.13. 无限长载流螺线管

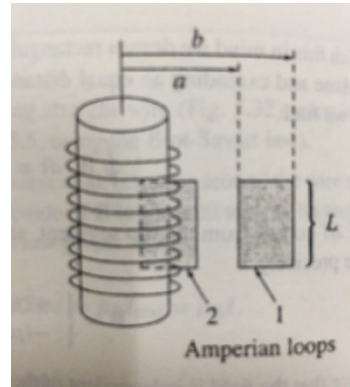


图 17.4.14. 无限长载流圆柱壳

由于螺线很密集, 人们通常将其模型化为无限长载流圆柱壳, 如图17.4.12所示。模型化后, 电流同圆柱壳的中心轴完全垂直, 在螺线管的情形, 电流与螺线管中心轴几乎垂直但并不完全垂直。这种近似的误差可以用图17.4.13加以说明, 其中, 安培环路是一个以中心轴为对称轴的一个圆周, 半径为  $s$ , 位于壳外。在载流圆柱壳的情形, 电流同圆柱壳的中心轴完全垂直, 没有任何电流穿越安培环路, 因此,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\phi(2\pi s) = 0. \quad (17.4.36)$$

采用柱坐标系, 这意味着圆柱壳外沿  $\mathbf{e}_\varphi$  方向没有磁场。然而, 如果是载流螺线管, 则有电流  $I$  穿过安培环路, 因此,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq 0. \quad (17.4.37)$$

这意味着螺线管外沿  $\mathbf{e}_\varphi$  方向存在磁场。下面我们将会看到, 螺线管内的磁场与绕线密度成正比, 因此, 在绕线密度很高的情况下, 螺线管内的磁场很强。相比而言, 螺线管外沿  $\mathbf{e}_\varphi$  方向的磁场很弱, 可以略去, 此时, 模型成立。

在载流圆柱壳的情形, 刚才我们已经看到, 它在壳外沿  $\mathbf{e}_\varphi$  方向没有磁场, 同样的办法, 很容易看出, 它在壳内沿  $\mathbf{e}_\varphi$  方向也不会有磁场。至于沿  $\mathbf{e}_\rho$  方向的磁场, 只要注意到上下有反演对称性, 当颠倒上下时, 沿  $\mathbf{e}_\rho$  方向的磁场应保持不变, 但当颠倒上下时电流反向了, 故磁场也应该反向, 只有沿  $\mathbf{e}_\rho$  方向的磁场为零时, 才能同时满足这两个要求。这说明, 在载流圆柱壳的情形, 沿  $\mathbf{e}_\rho$  的方向也不存在磁场。无限长载流圆柱壳激发的磁场只能朝向  $\mathbf{e}_z$ , 也就是与中心对称轴平行。

下面我们来说明, 这种平行于中心对称轴的磁场只存在于壳内, 在壳外, 这种平行场恒等于零。为此, 如图 17.4.14, 在一个通过中心对称轴的平面上, 取一个矩形安培回路 1, 其中两边平行于中心对称轴。另外两边则垂直于中心对称轴, 我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(a) - B(b)]L = 0, \quad (17.4.38)$$

其中,  $a, b$  如图 17.4.14 所示, 是平行于中心对称轴的两边分别到中心对称轴的距离,  $L$  则是这两边的长度。这样, 我们有

$$B(a) = B(b), \quad (17.4.39)$$

即壳外的磁场与它到壳的距离无关。取极限  $b \rightarrow +\infty$ , 得

$$B(a) = B(+\infty). \quad (17.4.40)$$

从物理上看, 离源无限远处的磁场应该为零, 故

$$B(+\infty) = 0. \quad (17.4.41)$$

这蕴含着

$$B(a) = 0, \quad a > R, \quad (17.4.42)$$

其中,  $R$  是圆柱壳的半径。这样, 我们就完成了证明。

最后, 我们只须计算壳内沿  $\mathbf{e}_z$  方向的磁场, 那就很容易了, 如图 17.4.14 所示, 取安培回路 2, 它是一个骑跨在圆柱壳内外的矩形, 同上面的安培回路 1, 它位于一个通过中心对称轴的平面上, 并且两边平行于中心对称轴, 另两边则垂直于中心对称轴。我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 n I L, \quad (17.4.43)$$

其中,  $n$  是单位长度内绕线的匝数。由是可知,

$$B = \mu_0 n I. \quad (17.4.44)$$

这样, 在模型近似下, 我们得

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{e}_z, & \text{inside the solenoid} \\ 0, & \text{outside the solenoid.} \end{cases} \quad (17.4.45)$$

这就是载流螺线管的磁场分布。

**例17.4.5.** 如图17.4.15所示, 将载流螺线管两头相接, 形如轮胎或面包圈 (*dounut*), 称超环面 (*toroid*)。设整个超环面上一共均匀密集绕有导线  $N$  匝, 每根导线载有电流  $I$ , 试讨论载流超环面的磁场分布。

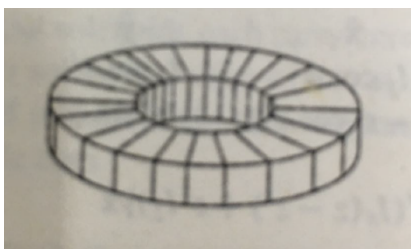


图 17.4.15. 载流超环面

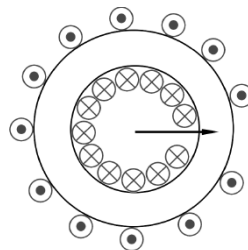


图 17.4.16. 载流超环面的横截面

见图17.4.16, 取超环面的横截面。在图中的两个同心圆周之间, 任取一个与它们同心, 半径为  $r$  的圆周作安培回路, 我们有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\varphi(2\pi r) = \mu_0 N I, \quad (17.4.46)$$

其中,  $B_\varphi$  是磁场沿圆周环绕方向的分量。于是, 得

$$B_\varphi = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I. \quad (17.4.47)$$

计入方向以及超环面的内外, 我们有

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I \mathbf{e}_\varphi, & \text{inside the toroid} \\ 0, & \text{outside the toroid.} \end{cases} \quad (17.4.48)$$

这就是载流超环面的磁场分布。

## §17.5 矢量势的计算\*

矢量势比标量势复杂, 计算也要困难一些。本节, 我们来讨论几个例子, 一方面, 提升对矢量势的感觉, 另一方面, 也为后继课程, 特别是量子力学, 服务。

首先, 让我们考察载流无限大导体平板。若将平板选为  $xz$  平面, 并将电流方向选为  $x$  轴的正向, 即  $\mathbf{K} = K \mathbf{e}_x$ , 则由例17.3.1 易知,

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 K \mathbf{e}_z, & y > 0 \\ -\frac{1}{2} \mu_0 K \mathbf{e}_z, & y < 0. \end{cases} \quad (17.5.1)$$

此外, 由式(17.3.42) 可知 (将体电流元换为面电流元), 系统的矢量势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{K} ds' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int K ds' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \mathbf{e}_x. \quad (17.5.2)$$

这说明矢量势的方向永远平行于  $x$  轴, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(x, y, z) \mathbf{e}_x. \quad (17.5.3)$$

显然, 当沿着  $x$  轴 (平行电流方向) 平移时, 系统是不变的; 当沿着  $z$  轴 (垂直于电流方向) 平移时, 系统也是不变的。由此可知, 系统矢量势与  $x, z$  无关, 我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(y) \mathbf{e}_x. \quad (17.5.4)$$

为了具体地求出  $A(y)$ , 当然可以使用式(17.5.2), 然而, 考虑到已经得到了磁感应强度  $\mathbf{B}$ , 我们更愿意利用  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的关系来求  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (17.5.5)$$

积分, 得

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (17.5.6)$$

现在, 在  $xy$  平面上取四点:  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, y)$ ,  $(0, y)$ , 作一矩形, 其正向为  $z$  轴方向。将上式应用到此矩形, 注意到矢量势  $\mathbf{A}$  与  $x$  轴平行, 沿安培回路的积分只有平行于  $x$  轴的两边有贡献, 平行于  $y$  轴的两边没有贡献, 我们得

$$A(0)x - A(y)x = Bxy. \quad (17.5.7)$$

这说明

$$A(y) = A(0) - By. \quad (17.5.8)$$

这样, 我们便有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [A(0) - By] \mathbf{e}_x = -By \mathbf{e}_x + A(0) \mathbf{e}_x. \quad (17.5.9)$$

因为常矢量的旋度恒等于零, 所以我们可以把上式中右边的第二项规范掉 (作规范变换去掉它)。于是, 我们得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By \mathbf{e}_x. \quad (17.5.10)$$

更详细地, 我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 Ky \mathbf{e}_x, & y > 0 \\ \frac{1}{2}\mu_0 Ky \mathbf{e}_x, & y < 0. \end{cases} \quad (17.5.11)$$

这就是系统的矢量势。值得指出的是, 尽管磁感应强度在越过电流平板时是跳跃的, 不连续的, 但是矢量势在越过电流平板时确是连续的。

读者容易验证

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (17.5.12)$$

从本问题的结果, 容易知道, 当空间中存在一个沿  $z$  轴的均匀磁场时,  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , 系统的矢量势可以取为

$$\mathbf{A} = -By\mathbf{e}_x. \quad (17.5.13)$$

这就是所谓的朗道规范 (Landau gauge), 它在量子力学中将大有用处。

其次, 让我们来求前面例17.4.2中电流产生的矢量势。由式(17.3.42), 系统的矢量势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int j d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \mathbf{e}_z, \quad (17.5.14)$$

其中,  $\mathbf{j}$  是体电流密度,

$$\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z. \quad (17.5.15)$$

由此可见, 系统的矢量势平行于  $z$  轴 (系统的中心对称轴), 也就是说,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_z. \quad (17.5.16)$$

容易看出, 当沿  $z$  轴平行移动时, 系统保持不变 (系统具有沿电流方向的平移对称性); 当绕  $z$  轴作定轴旋转时, 系统也保持不变 (系统具有绕  $z$  轴的旋转对称性)。这蕴含着

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{e}_z. \quad (17.5.17)$$

为求  $A(\rho)$ , 同前, 我们将继续使用  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的关系,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (17.5.18)$$

在  $z, \rho$  平面上取四点:  $(0, 0)$ ,  $(z, 0)$ ,  $(z, \rho)$ ,  $(0, \rho)$ , 将它们连成一个矩形, 取正向为  $\mathbf{e}_\varphi$ 。把上式应用到此矩形, 注意到  $\mathbf{A}$  平行于  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B}$  平行于  $\mathbf{e}_\varphi$ , 我们有

$$A(0)z - A(\rho)z = \int B dz d\rho = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho^2 I}{R^2} z, & \rho < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{\rho}{R} \right) \right] z, & \rho > R, \end{cases} \quad (17.5.19)$$

其中, 我们利用了式(17.4.29)。由此可得

$$A(\rho) = A(0) - \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho^2 I}{R^2}, & \rho < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{\rho}{R} \right) \right], & \rho > R, \end{cases} \quad (17.5.20)$$

或者,

$$\mathbf{A} = A(0)\mathbf{e}_z - \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho^2 I}{R^2} \mathbf{e}_z, & \rho < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{\rho}{R} \right) \right] \mathbf{e}_z, & \rho > R. \end{cases} \quad (17.5.21)$$

右边第一项, 作为常矢量, 可以规范掉, 这样, 我们得

$$\mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho^2 I}{R^2} \mathbf{e}_z, & \rho < R \\ -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{\rho}{R} \right) \right] \mathbf{e}_z, & \rho > R. \end{cases} \quad (17.5.22)$$

在柱坐标系下, 记

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z. \quad (17.5.23)$$

利用柱坐标系下散度和旋度公式,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z), \quad (17.5.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}, \quad (17.5.25)$$

读者容易验证

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (17.5.26)$$

再次, 我们来讨论例(17.4.1)。同前例的讨论, 易知

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{e}_z. \quad (17.5.27)$$

在  $z, \rho$  平面上取四点:  $(0, 1)$ ,  $(z, 1)$ ,  $(z, \rho)$ ,  $(0, \rho)$ , 将它们连成一个矩形, 取正向为  $\mathbf{e}_\varphi$ 。将此矩形, 作为安培回路, 应用到  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的关系,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (17.5.28)$$

同时, 注意到  $\mathbf{A}$  平行于  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B}$  平行于  $\mathbf{e}_\varphi$ , 我们有

$$A(1)z - A(\rho)z = \int B dz d\rho = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \rho z, \quad (17.5.29)$$

其中, 我们利用了式(17.4.24)。由此可得

$$A(\rho) = A(1) - \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \rho. \quad (17.5.30)$$

规范掉常数项后, 我们得

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \rho \mathbf{e}_z. \quad (17.5.31)$$

利用柱坐标系下散度和旋度公式, 读者容易验证

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (17.5.32)$$

在此, 我们愿意指出, 前面我们取  $z, \rho$  平面上的四点:  $(0, 1)$ ,  $(z, 1)$ ,  $(z, \rho)$ ,  $(0, \rho)$ , 连成一个矩形, 而不取四点:  $(0, 0)$ ,  $(z, 0)$ ,  $(z, \rho)$ ,  $(0, \rho)$ , 连成一个矩形, 是因为后者磁通量里会含有积分,

$$\int_0^\rho \frac{1}{\rho} d\rho, \quad (17.5.33)$$

兹将导致发散, 是不可也。这种情况类似于静电场中带电无限大平板的情况, 在那里,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{k}, & z > 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{k}, & z < 0. \end{cases} \quad (17.5.34)$$

在求标量势时, 此处不能象通常的那样, 取无限远点作参照点, 而必须取  $z = 0$  作参照点, 否则就发散了,

$$\int_\infty^z \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz. \quad (17.5.35)$$

两者相比,相当于通过重新规范,去掉了一个常数无穷大,不影响物理结果。

最后,我们来讨论无限长螺线管,即例17.4.4。从沿  $z$  轴的平移对称性和绕  $z$  轴的旋转对称性,易知

$$\mathbf{A} = A(\rho) \mathbf{e}_\varphi. \quad (17.5.36)$$

在  $\rho, \varphi$  平面内取一个以极点  $(0, 0)$  为原点,半径为  $\rho$  的圆周,取其方向为  $\mathbf{e}_z$ 。将此圆周作为安培回路,用于  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 易得

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{2} \rho \mathbf{e}_\varphi, & \rho < R \\ -\frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{\rho} \mathbf{e}_\varphi, & \rho > R. \end{cases} \quad (17.5.37)$$

## §17.6 磁场对电流的作用力

在17.2节,我们将安培定律拆成了两部分,得到了公式(17.2.27)和公式(17.2.28),其中公式(17.2.27)即Biot-Savart定律,它描写电流所激发的磁场,我们在前面几节已经详细讨论过了。现在,我们来讨论公式(17.2.28),它描写的是电流在外磁场中所受的作用力,所谓**安培力**(Ampère force)是也,其微元为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (17.6.1)$$

这里,我们略去了下标 1, 2 等。用此微元,我们可以计算各种形状的载流回路在外磁场中所感受到的力和力矩。下面,我们来看几个例子。

### §17.6.1 平行载流直线间的相互作用

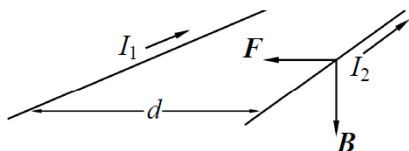


图 17.6.17. 平行载流直线间的相互作用

如图17.6.17所示,设两载流导体直线间的距离为  $d$ , 电流分别为  $I_1$  和  $I_2$ 。直线电流  $I_1$  在空间激发的磁场  $\mathbf{B}$  为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi, \quad (17.6.2)$$

其中,我们使用了柱坐标系,它以直线电流  $I_1$  为  $z$  轴。按照式(17.6.1),直线电流  $I_2$  所受安培力之微元为

$$d\mathbf{F} = I_2 d(l\mathbf{e}_z) \times \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \mathbf{e}_\varphi \right) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl \mathbf{e}_\rho. \quad (17.6.3)$$

由是可知,直线电流  $I_2$  单位长度上所受之安培力为

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \mathbf{e}_\rho. \quad (17.6.4)$$

上式表明, 当电流  $I_2$  与电流  $I_1$  同向时,  $\mathbf{f}$  与  $\mathbf{e}_\rho$  方向相反, 即直线电流  $I_2$  所受之安培力指向电流  $I_1$ , 可见, 此时直线电流  $I_2$  为直线电流  $I_1$  所吸引, 直线电流  $I_2$  所受之安培力为吸引力; 反之, 当电流  $I_2$  与电流  $I_1$  反向时, 直线电流  $I_2$  为直线电流  $I_1$  所排斥, 直线电流  $I_2$  所受之安培力为排斥力。

同样的计算表明, 当电流  $I_1$  与电流  $I_2$  同向时, 直线电流  $I_1$  为直线电流  $I_2$  所吸引, 直线电流  $I_1$  所受之安培力为吸引力; 当电流  $I_1$  与电流  $I_2$  反向时, 直线电流  $I_1$  为直线电流  $I_2$  所排斥, 直线电流  $I_1$  所受之安培力为排斥力。

总而言之, 当两平行直线所载电流同向时, 两者相互吸引; 所载电流反向时, 两者相互排斥。

### §17.6.2 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的力矩

如图17.6.18所示, 一个矩形导体线圈处在均匀外磁场中, 设线圈载有电流  $I$ , 外磁场磁感应强度为  $\mathbf{B}$ 。

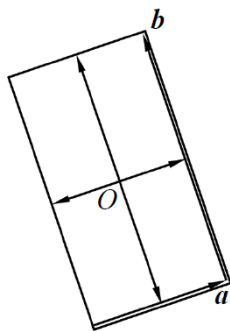


图 17.6.18. 均匀磁场中的矩形载流线圈

值得指出的是, 在讨论载流线圈时, 一般都假定载流线圈是刚性的, 不会变形, 这是与实际应用相一致的。因此, 从力学上看, 载流线圈就是一个刚体。我们知道, 刚体的运动可以分解为质心的平动与绕质心的转动。质心的平动等价于质点的平移, 其动力学由刚体所受的合力决定。至于绕质心的转动, 其动力学则由刚体所受的力矩决定。正因如此, 在讨论载流线圈时, 我们既要计算它所受的合力, 又要计算它所受的力矩, 其中, 力矩尤为重要, 这是因为, 在实际应用中, 例如, 电动机、发电机、电流计, 等等, 人们总是让载流线圈作绕质心的定轴转动。

回到矩形载流线圈, 它在均匀外磁场中所受之合力为零: 如图17.6.18, 从下边开始, 分别计算各边所受之安培力, 然后求和, 我们有

$$\mathbf{F} = I\mathbf{a} \times \mathbf{B} + I\mathbf{b} \times \mathbf{B} + I(-\mathbf{a}) \times \mathbf{B} + I(-\mathbf{b}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (17.6.5)$$

在均匀外磁场中, 矩形载流线圈所受之力矩一般不为零。同上, 从下边开始, 相对于质心  $O$ , 分别计算各边所受之力矩, 然后求和, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left(-\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \times (I\mathbf{a} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{a}}{2} \times (I\mathbf{b} \times \mathbf{B}) \\ &\quad + \frac{\mathbf{b}}{2} \times [I(-\mathbf{a}) \times \mathbf{B}] + \left(-\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \times [I(-\mathbf{b}) \times \mathbf{B}] \end{aligned}$$

$$= I[-\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B})]. \quad (17.6.6)$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}), \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (17.6.7)$$

我们有

$$-\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}. \quad (17.6.8)$$

利用Jacobi恒等式,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{a}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad (17.6.9)$$

也能得到相同的结果,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) - \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}. \quad (17.6.10)$$

将之代入力矩  $\mathbf{M}$  的表达式, 我们得

$$\mathbf{M} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (17.6.11)$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}$  为矩形载流线圈的磁偶极矩,

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (17.6.12)$$

前已指出, 矩形载流线圈在目前考虑的情形下假定为刚体, 因此, 其面积  $S$  的大小是固定不变的。又磁场的大小和方向均不变, 因此, 力矩的大小将只随磁偶极子  $\boldsymbol{\mu}$  与磁场  $\mathbf{B}$  的夹角  $\theta$  的大小而改变, 与它量无关。这蕴含着系统只有一个自由度, 并且还是一个角变量, 因此, 其运动与定轴转动等价, 而  $\theta$  即其转角。显然, 转轴的正向为  $\theta$  增大的方向。不妨将转轴选为柱坐标系的  $z$  轴, 这样, 我们便有

$$\mathbf{M} = -\mu B \sin \theta \mathbf{e}_z. \quad (17.6.13)$$

上式右边之所以出现负号, 是因为力矩  $\mathbf{M}$  总是使  $\theta$  减小, 见图17.6.19 和17.6.20。

我们知道, 外力的功微元为

$$\mathrm{d}w = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \mathrm{d}t, \quad (17.6.14)$$

其中,  $\mathbf{f}_i$  是作用在系统上的各种外力。对于刚体的定点转动, 我们有

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (17.6.15)$$

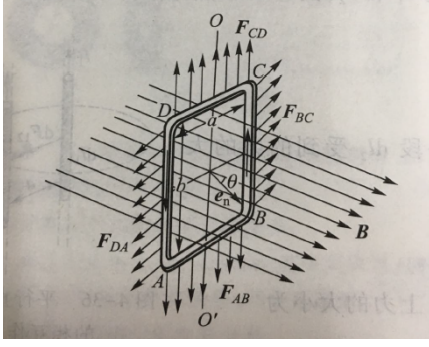


图 17.6.19. 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的力矩

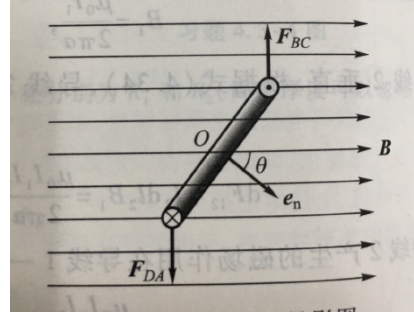


图 17.6.20. 前图的投影

其中,  $\omega$  为刚体的角速度。于是, 对于刚体的定点转动, 功微元可以写为

$$\begin{aligned}
 \mathrm{d}w &= \sum_i \mathbf{f}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \mathrm{d}t \\
 &= \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) \mathrm{d}t \\
 &= \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i \right) \mathrm{d}t \\
 &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathrm{d}t \\
 &= \mathbf{M}_{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathrm{d}t.
 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  是外力的总力矩,

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i. \quad (17.6.16)$$

对于目前考虑的情形, 显然有

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M} \quad (17.6.17)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z. \quad (17.6.18)$$

如是, 我们有

$$\mathrm{d}w = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathrm{d}t = -\mu B \sin \theta \mathrm{d}\theta. \quad (17.6.19)$$

积之, 得

$$w = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mu B \sin \theta \mathrm{d}\theta = \mu B \cos \theta - \mu B \cos \theta_0. \quad (17.6.20)$$

可见, 力矩  $\mathbf{M}$  所做之功只与始点角度  $\theta_0$  和终点角度  $\theta$  有关, 与过程无关。因此, 力矩  $\mathbf{M}$  乃是一个保守力矩, 系统具有机械势能  $U$ ,

$$U = -w = -\mu B \cos \theta + \mu B \cos \theta_0 = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + \mu B \cos \theta_0. \quad (17.6.21)$$

若取  $\theta_0 = \pi/2$  作为势能的参照点, 则势能  $U$  可简化为

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (17.6.22)$$

由此可知, 当磁偶极矩  $\boldsymbol{\mu}$  与外磁场  $\mathbf{B}$  平行时, 矩形载流线圈势能最低; 当磁偶极矩  $\boldsymbol{\mu}$  与外磁场  $\mathbf{B}$  反平行时, 矩形载流线圈势能最高。

这种情况同处在均匀外电场中的两个点电荷是类似的, 这两个点电荷电量相等、符号相反、并且保持距离不变。在那里, 我们有

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (17.6.23)$$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (17.6.24)$$

其中,  $\mathbf{p}$  是两个的点电荷的电偶极矩。

### §17.6.3 一般载流线圈在均匀磁场中所受的力矩

矩形载流线圈的这些结果都可以推广至一般的载流线圈。

首先, 在均匀外磁场中, 一般的载流线圈所受的合力亦为零:

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left( \oint d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0, \quad (17.6.25)$$

这是因为

$$\oint d\mathbf{l} = 0. \quad (17.6.26)$$

其次, 系统的力矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \oint \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= I \oint \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= I \oint [d\mathbf{l}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})] \\ &= I \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (17.6.27)$$

注意到  $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ , 我们有

$$\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \oint d\mathbf{r}^2 = 0. \quad (17.6.28)$$

将之代入力矩的表达式, 得

$$\mathbf{M} = I \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{l}. \quad (17.6.29)$$

利用矢量分析中的积分变换公式,

$$\oint u d\mathbf{l} = \int d\mathbf{s} \times \nabla u, \quad (17.6.30)$$

我们有

$$\mathbf{M} = I \int d\mathbf{s} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}). \quad (17.6.31)$$

容易得知,

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}. \quad (17.6.32)$$

于是, 我们得

$$\mathbf{M} = I \int d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = I \left( \int d\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (17.6.33)$$

其中,  $\mathbf{S}$  是载流线圈的面积矢量,  $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S}$  是载流线圈的磁偶极矩。

只要意识到, 按前面的假定, 一般的载流线圈仍是刚体, 不变形, 则同矩形载流线圈完全一样, 我们仍有

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (17.6.34)$$

此即一般载流线圈在均匀外磁场中的机械势能。

#### §17.6.4 磁偶极子在外磁场中所受之力和力矩

上小节, 我们考虑的载流线圈和等量异号的两个点电荷都是大尺寸的刚体, 并且所处之外场为均匀场。本小节, 我们考虑小尺寸 (小范围、小区域) 的载流线圈和电荷分布在外场中所受之力以及力矩的情况, 前者如氢原子中电子的轨道电流 (按Bohr模型), 后者如氢原子中电荷分布。它们所处的外场也不再要求为均匀场, 可以有空间变化。这种情况在量子力学、统计物理、原子物理、核物理以及凝聚态物理中都有广泛的应用。

首先, 我们考虑外电场中分布在小区域内的电荷。设小区域  $\Omega$  内电荷密度为  $\rho(\mathbf{r})$ , 外电场为  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。我们有

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (17.6.35)$$

其中,  $\mathbf{F}$  是小区域电荷所受的总库仑力。由于在我们所考察的系统之中, 电荷所占之区域很小, 因此, 我们可以对外电场作Taylor展开。为了方便, 我们将坐标原点选在小区域之中。这样, 我们有

$$E_i(\mathbf{r}) = E_i(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) E_i(0) + \cdots, \quad (17.6.36)$$

其中,  $E_i$  是电场  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  的第  $i$  个直角坐标分量 ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{i} E_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j} E_2(\mathbf{r}) + \mathbf{k} E_3(\mathbf{r}). \quad (17.6.37)$$

这个Taylor展开, 可以写为如下的矢量形式,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0) + \cdots. \quad (17.6.38)$$

将之代入库仑力  $\mathbf{F}$  的表达式, 得

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(0) d\mathbf{r} + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0) d\mathbf{r} + \cdots. \quad (17.6.39)$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(0) d\mathbf{r} &= \left[ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \mathbf{E}(0) \\ &= Q \mathbf{E}(0),\end{aligned}\quad (17.6.40)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0) d\mathbf{r} &= \int_{\Omega} [\rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{E}(0) d\mathbf{r} \\ &= \left\{ \left[ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{r} \right] \cdot \nabla \right\} \mathbf{E}(0) \\ &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0),\end{aligned}\quad (17.6.41)$$

其中,  $Q$  是小区域电荷的总电量,  $\mathbf{p}$  小区域电荷的电偶极矩,

$$Q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}), \quad (17.6.42)$$

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{r}. \quad (17.6.43)$$

我们有

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0) + \cdots. \quad (17.6.44)$$

上式右边的第一项是电单级子所受的库仑力, 第二项是电偶极子所受的库仑力, 后面省略的项是高阶多级子所受的库仑力。

小区域电荷所受的力矩为

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times [\rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (17.6.45)$$

代入式(17.6.38), 得

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times [\rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(0)] d\mathbf{r} + \cdots. \quad (17.6.46)$$

这里, 同力  $\mathbf{F}$  一样, 我们只保留到线性级。整理, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \left[ \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{r} \right] \times \mathbf{E}(0) + \cdots \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}(0) + \cdots.\end{aligned}\quad (17.6.47)$$

上式右边的第一项是电偶极子所受的力矩, 后面省略的项是高阶多级子所受的力矩。

总而言之, 小区域电偶极子在外电场中所受的力和力矩为,

$$\mathbf{f} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (17.6.48)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (17.6.49)$$

其中,  $\mathbf{E}$  为电偶极子所在位置处的外电场 (在上面的推导中, 电偶极子位于坐标原点)。

利用矢量分析的公式,

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}, \quad (17.6.50)$$

并注意到  $\mathbf{p}$  为常矢量, 我们得

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (17.6.51)$$

又,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (17.6.52)$$

我们有

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (17.6.53)$$

于是, 力  $\mathbf{f}$  所作之功为

$$\mathrm{d}w = \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = [(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = [\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})] \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (17.6.54)$$

由是可知,  $\mathbf{f}$  为保守力, 其势能微元为

$$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w = \mathrm{d}(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (17.6.55)$$

这说明电偶极子在外电场中的势能  $u$  可取为如下形式,

$$u = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (17.6.56)$$

这个结果也可以通过小区域电荷在外电场中的静电势能而得到,

$$U = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r}, \quad (17.6.57)$$

其中,  $\varphi$  为外电场的电势。同前, 对电势  $\varphi$  作Taylor展开,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \varphi(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \varphi(0) + \cdots \\ &= \varphi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) + \cdots, \end{aligned} \quad (17.6.58)$$

并代入势能  $U$  的表达式, 得

$$\begin{aligned} U &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \varphi(0) \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0)] \mathrm{d}\mathbf{r} + \cdots \\ &= \left[ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} \right] \varphi(0) - \left[ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{r} \right] \cdot \mathbf{E}(0) + \cdots \\ &= Q \varphi(0) + [-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)] + \cdots. \end{aligned} \quad (17.6.59)$$

上式右边的第一项为电单级子在外电场中静电势能, 第二项为电偶极子在外电场中静电势能, 省略的项为高级多级子在外电场中静电势能。这样, 我们就再次证得了式(17.6.56)。其实, 有了这儿求得的静电势能, 求电偶极子所受的力更为容易,

$$\mathbf{f} = -\nabla u = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (17.6.60)$$

综上所述, 小区域电荷的偶极子在外电场中的势能以及所受之力和力矩分别为

$$u = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (17.6.61)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (17.6.62)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (17.6.63)$$

下面, 我们来讨论小尺寸载流线圈在外磁场中的情形。关于受力, 我们有

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (17.6.64)$$

同于电场的情况, 我们作Taylor展开,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(0) + \cdots, \quad (17.6.65)$$

并将它代入上述力的表达式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(0) + \oint I d\mathbf{l} \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(0)] + \cdots \\ &= \oint I d\mathbf{l} \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(0)] + \cdots. \end{aligned} \quad (17.6.66)$$

这是因为磁单极子是不存在的,

$$\oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(0) = \left( \oint I d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}(0) = 0. \quad (17.6.67)$$

至于展开式中的偶极项, 尚需稍加整理, 我们有

$$\begin{aligned} & d\mathbf{l} \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(0)] \\ &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) \times \{(\mathbf{r} \cdot \nabla)[\mathbf{i} B_1(0) + \mathbf{j} B_2(0) + \mathbf{k} B_3(0)]\} \\ &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) \times [\mathbf{i}(\mathbf{r} \cdot \nabla) B_1(0) + \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \nabla) B_2(0) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \nabla) B_3(0)] \\ &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) \times \{\mathbf{i}[\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] + \mathbf{j}[\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] + \mathbf{k}[\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)]\} \\ &= \mathbf{i} \{[\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz\} \\ &\quad + \mathbf{j} \{[\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dz - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dx\} \\ &\quad + \mathbf{k} \{[\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dx - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dy\}. \end{aligned} \quad (17.6.68)$$

将之代入力  $\mathbf{F}$  的表达式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{i} I \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz \\ &\quad + \mathbf{j} I \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dz - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dx \\ &\quad + \mathbf{k} I \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dx - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dy + \cdots. \end{aligned} \quad (17.6.69)$$

下面, 我们分别计算上式右边的三个积分。

首先, 对于第一个积分, 利用Stokes公式, 我们有

$$\begin{aligned} & \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz \\ &= - \int \left[ \frac{\partial}{\partial y} B_2(0) + \frac{\partial}{\partial z} B_3(0) \right] dy dz \\ &+ \int \frac{\partial}{\partial x} B_2(0) dz dx + \frac{\partial}{\partial x} B_3(0) dx dy. \end{aligned} \quad (17.6.70)$$

注意到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_1 + \frac{\partial}{\partial y} B_2 + \frac{\partial}{\partial z} B_3 = 0, \quad (17.6.71)$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial y} B_2(0) + \frac{\partial}{\partial z} B_3(0) = - \frac{\partial}{\partial x} B_1(0). \quad (17.6.72)$$

将之代回第一个积分的表达式, 得

$$\begin{aligned} & \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} B_1(0) dy dz + \frac{\partial}{\partial x} B_2(0) dz dx + \frac{\partial}{\partial x} B_3(0) dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} B_1(0) \int dy dz + \frac{\partial}{\partial x} B_2(0) \int dz dx + \frac{\partial}{\partial x} B_3(0) \int dx dy. \end{aligned} \quad (17.6.73)$$

注意到

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i} dy dz + \mathbf{j} dz dx + \mathbf{k} dx dy = \mathbf{i} ds_1 + \mathbf{j} ds_2 + \mathbf{k} ds_3, \quad (17.6.74)$$

我们有

$$\int dy dz = s_1, \quad \int dz dx = s_2, \quad \int dx dy = s_3. \quad (17.6.75)$$

将之代回第一个积分的表达式, 得

$$\oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz = s_1 \frac{\partial}{\partial x} B_1(0) + s_2 \frac{\partial}{\partial x} B_2(0) + s_3 \frac{\partial}{\partial x} B_3(0). \quad (17.6.76)$$

考虑到  $s_1, s_2, s_3$  都是常量, 上式可以改写为

$$\begin{aligned} & \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dy - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (s_1 B_1) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \frac{\partial}{\partial x} (s_2 B_2) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \frac{\partial}{\partial x} (s_3 B_3) \Big|_{\mathbf{r}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \Big|_{\mathbf{r}=0}, \end{aligned} \quad (17.6.77)$$

其中,  $\mathbf{s}$  是小尺寸载流线圈的面积矢量。

其次, 对于第二个积分, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dz - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_3(0)] dx \\
 &= - \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} B_1(0) + \frac{\partial}{\partial z} B_3(0) \right] dz dx + \int \frac{\partial}{\partial y} B_3(0) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} B_1(0) dy dz \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial y} B_1(0) dy dz + \frac{\partial}{\partial y} B_2(0) dz dx + \frac{\partial}{\partial y} B_3(0) dx dy \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0}.
 \end{aligned} \tag{17.6.78}$$

最后, 对于第三个积分, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \oint [\mathbf{r} \cdot \nabla B_2(0)] dx - [\mathbf{r} \cdot \nabla B_1(0)] dy \\
 &= - \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} B_1(0) + \frac{\partial}{\partial y} B_2(0) \right] dx dy + \int \frac{\partial}{\partial z} B_1(0) dy dz + \frac{\partial}{\partial z} B_2(0) dz dx \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial z} B_1(0) dy dz + \frac{\partial}{\partial z} B_2(0) dz dx + \frac{\partial}{\partial z} B_3(0) dx dy \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0}.
 \end{aligned} \tag{17.6.79}$$

现在, 将这三个积分代入力  $\mathbf{F}$  的表达式, 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbf{i} I \left. \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{j} I \left. \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{k} I \left. \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \cdots \\
 &= \mathbf{i} \left. \frac{\partial}{\partial x} (I \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{j} \left. \frac{\partial}{\partial y} (I \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{k} \left. \frac{\partial}{\partial z} (I \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \cdots \\
 &= \mathbf{i} \left. \frac{\partial}{\partial x} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{j} \left. \frac{\partial}{\partial y} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{k} \left. \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \cdots \\
 &= \left. \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \right|_{\mathbf{r}=0} + \cdots,
 \end{aligned} \tag{17.6.80}$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}$  为小尺寸载流线圈的磁偶极矩,

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{s}. \tag{17.6.81}$$

上式右边第一项即磁偶极子在外磁场中所受之作用力,

$$\mathbf{f} = \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \tag{17.6.82}$$

此力有势

$$u = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \tag{17.6.83}$$

利用矢量分析公式(17.6.50), 我们有

$$\mathbf{f} = -\nabla u = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \tag{17.6.84}$$

最后, 小尺寸载流线圈在外场中所感受的力矩为

$$\mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (17.6.85)$$

将磁感应强度  $\mathbf{B}$  的Taylor展式(17.6.65)代入上式, 得

$$\mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times [I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(0)] + \cdots. \quad (17.6.86)$$

上式右边的第一项为线性项, 其它是高阶项。此线性项等价于均匀外磁场中的载流线圈所感受的力矩, 我们已经在前一小节讨论过, 把那里的结果拷贝过来即可。我们有

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}(0) + \cdots, \quad (17.6.87)$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}$  即小尺寸载流线圈的磁偶极矩。上式表明, 小尺寸载流线圈的磁偶极子在外磁场中所受的力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (17.6.88)$$

其中,  $\mathbf{B}$  为磁偶极子位置处的磁感应强度。

综上所述, 对于外磁场中的小尺寸载流线圈, 我们有

$$u = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (17.6.89)$$

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (17.6.90)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (17.6.91)$$

它们在形式上与式(17.6.61) - (17.6.63)完全一致。

## §17.7 磁场对电荷的作用力

### §17.7.1 洛伦兹力

设有一个点电荷, 按照17.3.4小节, 其电荷与电流密度分别为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]. \quad (17.7.1)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]\mathbf{v}(t), \quad (17.7.2)$$

其中,  $q$  为点电荷所携带的电量,  $\mathbf{r}'$  和  $\mathbf{v}$  分别为点电荷的位置和速度。

如果此点电荷处于静电场  $\mathbf{E}$  中, 则其所受之库伦力为

$$\mathbf{f} = \int \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}'). \quad (17.7.3)$$

这个当然是大家熟知的结果。

如果此点电荷处于静磁场  $\mathbf{B}$  中, 则其所受之安培力为

$$\mathbf{f} = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)] \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}'). \quad (17.7.4)$$

点电荷所受之安培力又称**洛伦兹力** (Lorentz force)。洛伦兹力的特点是永不做功, 这是因为

$$dw = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}dt = (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = 0. \quad (17.7.5)$$

如果空间中既存在静电场, 又存在静磁场, 那么, 根据力的矢量性质, 点电荷所感受到的场力应为上述库伦力和安培力之和,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (17.7.6)$$

这里, 我们已将点电荷的位置改记为  $\mathbf{r}$  了。此力亦称洛伦兹力, 它是广义的洛伦兹力, 前面那个, 即式(17.7.4)所描写的洛伦兹力, 是狭义的洛伦兹力, 也是原初的洛伦兹力。以后, 我们还会将洛伦兹力推广至动态含时的电磁场, 那是更广义的洛伦兹力, 也就是电动力学中所用的最一般的洛伦兹力了,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (17.7.7)$$

与此相应, 称

$$\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (17.7.8)$$

为**洛伦兹力密度**, 并称

$$\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r} \quad (17.7.9)$$

为**洛伦兹力微元**。上述两个公式既适用于离散分布的电荷, 也适用于连续分布的电荷。

### §17.7.2 回旋运动

现在, 让我们回到静场, 点电荷所受之洛伦兹力为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (17.7.10)$$

设点电荷的质量为  $m$ , 按照牛顿力学, 其运动方程为

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (17.7.11)$$

其中,  $\mathbf{a}$  是点电荷的角加速度。

如果没有磁场, 则

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E}. \quad (17.7.12)$$

可见, 点电荷在静电场中将作加速运动。如果静电场还是均匀的, 则点电荷作定向加速运动, 乃至直线加速运动。不管均匀与否, 静电力都是保守力, 这是因为功微元是一个完整微分,

$$dw = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q(-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) = -qd\varphi = -d(q\varphi), \quad (17.7.13)$$

其中,  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  是静电场的标量势。

上式表明,  $U = q\varphi(\mathbf{r})$  就是点电荷的机械势能。由此可见, 静电力不同于洛伦兹力, 静电力可以对点电荷做功, 而且所作之功为

$$\Delta w = -[U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)] = -q[\varphi(\mathbf{r}_f) - \varphi(\mathbf{r}_i)], \quad (17.7.14)$$

其中,  $\mathbf{r}_i$  为点电荷的起始位置,  $\mathbf{r}_f$  为点电荷的终点位置。

如果没有电场, 则

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (17.7.15)$$

此时, 点电荷的运动完全由洛伦兹力支配。由于洛伦兹力不做功, 因此, 依照功能原理, 点电荷的动能将是守恒的,

$$dT = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{w} = 0. \quad (17.7.16)$$

这就是说, 在静磁场中, 点电荷的运动速率将保持不变。虽然速率保持不变, 但加速度仍然是存在的, 不为零, 因此, 点电荷的加速度必定来源于速度方向的改变。换言之, 洛伦兹力在物理上仅仅起改变带电粒子速度方向的作用, 它老使粒子转向, 所谓**磁偏转** (magnetic deflection) 是也。这种偏转, 在一定条件下, 可以将带电粒子约束在空间中的某个小区域之内, 形成所谓的**磁禁闭** (magnetic confinement)。托卡马克 (Tokamak) 就是利用这种磁禁闭来实现热核聚变的。

要理解磁偏转和磁禁闭, 只须考虑均匀磁场即可。此时, 方程(17.7.15)可以写为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (17.7.17)$$

取直角坐标系, 使得  $z$  轴的方向与磁感应强度  $\mathbf{B}$  的方向一致, 即  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , 则上述运动方程可以分解为已下形式,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y, \quad (17.7.18)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x, \quad (17.7.19)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (17.7.20)$$

其中,  $v_x, v_y, v_z$  是速度的三个坐标分量。将第一个方程对时间  $t$  求导, 并代入第二个方程, 得

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x. \quad (17.7.21)$$

令

$$\omega = \frac{|q|B}{m} > 0, \quad (17.7.22)$$

则上方程的解为

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (17.7.23)$$

其中,  $v_0$  和  $\varphi_0$  是两个常数,  $v_0$  为振幅,  $\varphi_0$  为初位相。将此解代入原方程组的第一个方程, 得

$$v_y = -v_0 \operatorname{sgn}(q) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (17.7.24)$$

其中,  $\operatorname{sgn}$  是符号函数,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (17.7.25)$$

第三个运动方程很平庸，其解为

$$v_z = c, \quad (17.7.26)$$

其中， $c$  是一个常数。这样，我们就得到了带电粒子在均匀磁场中的速度，

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (17.7.27)$$

$$v_y = -v_0 \operatorname{sgn}(q) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (17.7.28)$$

$$v_z = c. \quad (17.7.29)$$

其中， $v_0, \varphi_0, c$  由带电粒子的初始速度决定。再积一次，我们就得到了带电粒子在均匀磁场中的轨迹，

$$x(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0) + x_0, \quad (17.7.30)$$

$$y(t) = R \operatorname{sgn}(q) \cos(\omega t + \varphi_0) + y_0, \quad (17.7.31)$$

$$z(t) = ct + z_0, \quad (17.7.32)$$

其中， $x_0, y_0, z_0$  是常数，由带电粒子的初始位置决定，

$$R = \frac{v_0}{\omega}. \quad (17.7.33)$$

容易看出，

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (17.7.34)$$

由是可知，当  $c = 0$  时，带电粒子将在一个与  $xy$  平面平行的平面内作周期性圆周（circle）运动；当  $c \neq 0$  时，带电粒子将在空间作圆柱螺线（helix）运动。从后者，我们看到了洛伦兹力的偏转作用，从前者，我们进一步看到了洛伦兹力的禁闭作用。

顺便提一句，这里所引进的角速率，

$$\omega = \frac{|q|B}{m}, \quad (17.7.35)$$

有时也叫做回旋频率（cyclotron frequency），引进的半径，

$$R = \frac{v}{\omega}, \quad (17.7.36)$$

也叫做回旋半径（cyclotron radius）。值得指出的是，回旋频率与回旋半径无关，后者由粒子的动量决定，

$$R = \frac{p}{qB}, \quad (17.7.37)$$

而前者则与粒子动量无关。事实上，人们往往利用这一点来测量带电粒子的动量，

$$p = qBR. \quad (17.7.38)$$

将带电粒子送入磁场已知的区域，测量粒子的轨道半径，通过上式就能获得粒子的动量。对于基本粒子，这是确定动量的标准方法。

### §17.7.3 轮转线运动

现在，让我们来考虑稍微复杂一点的情况。如图17.7.21所示，设除静磁场之外，空间中还存在静电场，它们相互垂直，一个沿  $x$  轴方向，一个沿  $z$  轴方向，即

$$\mathbf{B} = B \mathbf{i}, \quad \mathbf{E} = E \mathbf{k}. \quad (17.7.39)$$

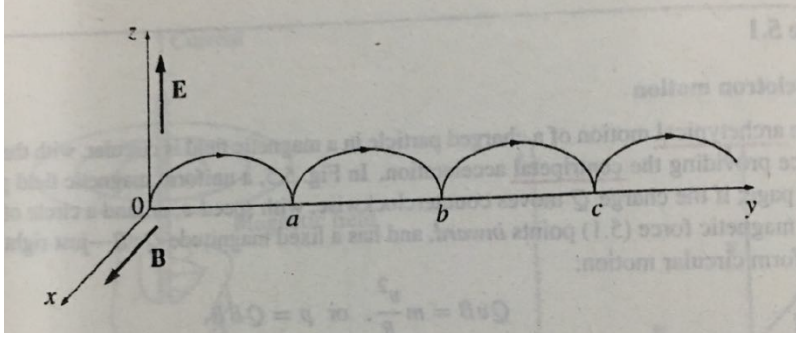


图 17.7.21. 轮转线运动

设在初始时刻  $t = 0$ ，将一个带电粒子从坐标原点以初速度  $\mathbf{v}_0 = 0$  释放，我们来考察该带电粒子的运动轨迹。为了方便，以下设粒子带正电  $q > 0$ 。

首先，刚开始时，粒子速度为零，洛伦兹力自然也为零，粒子只受电场静电力的作用，

$$\mathbf{f}_E = q\mathbf{E} = qE \mathbf{k}. \quad (17.7.40)$$

此时，静电力方向朝上，粒子向上加速。接着，粒子就获得了向上的速度，与此同时，它也感受到了磁场的洛伦兹力，

$$\mathbf{f}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB \mathbf{j}, \quad (17.7.41)$$

洛伦兹力方向朝右。于是，洛伦兹力将带电粒子偏转，使之向右运动。两者结合，可见粒子被释放后不久，它将朝向右上运动。此时，它不断地获得电场加速，速度越来越大，洛伦兹力也同时随之增长，粒子也就被偏转得越来越厉害，乃至最后粒子从最高点被偏转朝向右下运动去也。粒子向下的运动随即被电场的静电力拦阻，粒子向下的速度同时减小。粒子就这样继续朝右下方运动着，直至向下的速度最终被静电力减至零，于是，粒子就完全静止在  $y$  轴上的点  $a$  了。同前，它又可以重新开始，继续偏转朝右运动，至点  $b$ ，至点  $c$ ，如是循环，往复不已。这些当然是定性的分析，下面我们来进行定量的计算。

从定性分析，我们得知，带电粒子仅在  $yz$  平面上运动，

$$x = 0, \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (17.7.42)$$

相应地，粒子的速度以及加速度为

$$\mathbf{v} = \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}, \quad (17.7.43)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}. \quad (17.7.44)$$

于是, 粒子感受到的场力为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qB\dot{z}\mathbf{j} + (qE - qB\dot{y})\mathbf{k}. \quad (17.7.45)$$

按照牛顿第二定律, 我们有

$$m\ddot{y} = qB\dot{z}, \quad (17.7.46)$$

$$m\ddot{z} = qE - qB\dot{y}, \quad (17.7.47)$$

其中,  $m$  是带电粒子的质量。令

$$\omega = \frac{qB}{m} > 0, \quad (17.7.48)$$

则上述方程组可写为

$$\ddot{y} = \omega\dot{z}, \quad (17.7.49)$$

$$\ddot{z} = -\omega\left(\dot{y} - \frac{E}{B}\right). \quad (17.7.50)$$

将第一个方程对时间  $t$  求导, 得

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \omega\ddot{z}. \quad (17.7.51)$$

将第二个方程代入此方程的右边, 得

$$\frac{d^3y}{dt^3} = -\omega^2\left(\dot{y} - \frac{E}{B}\right). \quad (17.7.52)$$

令

$$\psi = \dot{y} - \frac{E}{B}, \quad (17.7.53)$$

则上方程化为

$$\ddot{\psi} = -\omega^2\psi. \quad (17.7.54)$$

如所周知, 此方程的通解为

$$\psi = A\cos(\omega t + \varphi), \quad (17.7.55)$$

其中,  $A, \varphi$  是两个待定的常数。将之代回式(17.7.53), 得

$$\dot{y} = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}. \quad (17.7.56)$$

积之, 得

$$y = R\sin(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}t + c_1, \quad (17.7.57)$$

其中,  $R = A/\omega$  可以代替  $A$  作为待定的常数。将之代入式(17.7.49), 得

$$\dot{z} = -R\omega\sin(\omega t + \varphi). \quad (17.7.58)$$

积之, 得

$$z = R\cos(\omega t + \varphi) + c_2. \quad (17.7.59)$$

这样,我们就得到了带电粒子运动方程的通解,

$$y = R \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}t + c_1, \quad (17.7.60)$$

$$z = R \cos(\omega t + \varphi) + c_2. \quad (17.7.61)$$

代入初值条件,

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad (17.7.62)$$

得

$$R \sin \varphi + c_1 = 0, \quad (17.7.63)$$

$$R \cos \varphi + c_2 = 0, \quad (17.7.64)$$

$$R\omega \cos \varphi + \frac{E}{B} = 0, \quad (17.7.65)$$

$$R\omega \sin \varphi = 0. \quad (17.7.66)$$

解之,得

$$R = \frac{E}{\omega B}, \quad \varphi = \pi, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{E}{\omega B}. \quad (17.7.67)$$

这样,我们就得到了系统的定解,

$$y = -\frac{E}{\omega B} \sin(\omega t) + \frac{E}{B}t, \quad (17.7.68)$$

$$z = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + \frac{E}{\omega B}. \quad (17.7.69)$$

它就是带电粒子的轨道方程。为了看清轨道的几何性质,让我们令

$$u = \frac{E}{B}, \quad \rho = \frac{E}{\omega B}, \quad (17.7.70)$$

然后利用

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1, \quad (17.7.71)$$

消去正弦函数和余弦函数,得

$$(y - ut)^2 + (z - \rho)^2 = \rho^2. \quad (17.7.72)$$

显然,它是  $yz$  平面上一个半径为  $\rho$  的圆,不过其圆心  $(ut, \rho)$  不是固定点,而是沿着  $y$  轴以速度  $u$  作匀速直线运动。现在回头再看粒子的轨道方程(17.7.68)和(17.7.69)就明白了,原来,粒子的运动是两个运动的合成:一个是绕圆心的匀速圆周运动,角速度为  $\omega$ ;一个是圆心的匀速直线运动,线速度为  $u$ 。直观上,我们可以将这个合成运动对应为一个车轮(wheel)沿直线作匀速无滑滚动:车轮轮芯的平移速度为  $u$ ,绕轮芯的转速为  $\omega$ 。按照无滑滚动(纯滚动)的要求,车轮的半径为  $r = u/\omega$ 。注意到圆周(17.7.72)的半径为  $\rho$ ,它恰好等于车轮的半径  $r$ ,因此,带电粒子正好可以对应为车轮边沿(rim)上的一点,它随车轮的滚动而运动。当车轮沿直线作匀速无滑滚动时,其边沿上的任意一点所产生

的轨迹在几何上谓之**轮转线** (cycloid)。这就是人们将带电粒子的上述运动称为**轮转线运动** (cycloid motion) 的原因。

读者还不难看出, 当带电粒子的初速度不为零, 但仍沿  $yz$  平面时, 也就是当初值满足如下条件时,

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0; \quad \dot{y}(0) \neq 0, \quad \dot{z}(0) \neq 0, \quad (17.7.73)$$

带电粒子仍然只能在  $yz$  平面内作平面运动, 式(17.7.60)和(17.7.61)仍是系统的通解。将坐标原点在  $yz$  平面内作适当的平移, 通解总可以写为如下之形式,

$$y = R \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}t, \quad (17.7.74)$$

$$z = R \cos(\omega t + \varphi) + R. \quad (17.7.75)$$

同前, 令

$$u = \frac{E}{B}, \quad (17.7.76)$$

则我们有

$$y = R \sin(\omega t + \varphi) + ut, \quad (17.7.77)$$

$$z = R \cos(\omega t + \varphi) + R. \quad (17.7.78)$$

如果消去正弦函数和余弦函数, 则

$$(y - ut)^2 + (z - R)^2 = R^2. \quad (17.7.79)$$

容易看出, 粒子的运动仍旧是两个运动的合成: 一个是绕圆心的匀速圆周运动, 角速度为  $\omega$ ; 一个是圆心的匀速直线运动, 线速度为  $u$ 。若要将此运动对应为车轮沿直线作匀速无滑滚动, 车轮的半径  $r$  应该为  $u/\omega$ , 即  $r = u/\omega$ , 如前所述, 这是无滑滚动 (纯滚动) 的要求。但是, 现在圆周(17.7.79)的半径  $R$  不一定能够满足条件  $R = r$ , 因此, 粒子现在可能位于车轮边沿之内, 当  $R < r$  时; 也可能位于车轮边沿之外, 当  $R > r$  时。当车轮沿直线作匀速无滑滚动之时, 边沿之内的点所产生的轨迹谓之**缩短的轮转线** (curtate cycloid), 边沿之外的点所产生的轨迹谓之**偏长的轮转线** (prolate cycloid), 前面那种恰好位于边沿之上的点所产生的轨迹则谓之**正规轮转线** (normal cycloid), 这三种轮转线的形状, 见图17.7.22。

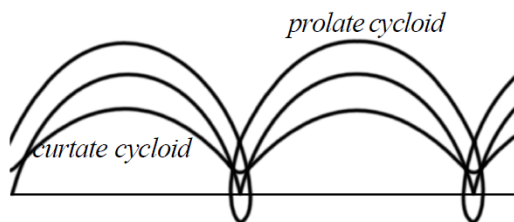


图 17.7.22. 三种轮转线

总而言之,在一般的情况下,带电粒子的轨道可以是正规的轮转线,也可以是缩短的轮转线,也可以是偏长的轮转线,它依赖于粒子的初始条件。

顺便指出,这里出现了一个匀速直线运动,因而,值得我们伽利略变换的角度来考察一下上面出现的那些轮转线运动。

考虑到这里出现的匀速直线运动是沿  $y$  轴的,我们记

$$\mathbf{u} = u\mathbf{j} = \frac{E}{B}\mathbf{j}. \quad (17.7.80)$$

将目前所使用的惯性参照系记为  $S$ , 并取  $S'$  系,使得它相对于  $S$  系的速度为  $\mathbf{u}$ 。

设带电粒子相对于  $S'$  系的速度为  $\mathbf{v}'$ , 则粒子在  $S$  系的速度为

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'. \quad (17.7.81)$$

在  $S$  系,粒子的动力学方程是

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (17.7.82)$$

将式(17.7.81)代入,得

$$m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}' + \mathbf{u}) = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v}' + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}] \quad (17.7.83)$$

注意到

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0, \quad (17.7.84)$$

并且

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (17.7.85)$$

我们有

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}. \quad (17.7.86)$$

这正是粒子在  $S'$  系中的动力学方程。从上小节知道,在  $S'$  中,粒子的轨道或是圆柱螺线(helix),或是圆周(circle)。圆柱螺线是空间运动,圆周是平面运动。当粒子作圆周运动时,此圆周一定位于  $yz$  平面,因为磁场  $\mathbf{B}$  平行于  $x$  轴,而圆周轨道总是垂直于磁场的。又因为  $S'$  系沿  $y$  轴运动,所以,当粒子在  $S'$  系作平面圆周运动时,在  $S$  系看来,粒子的运动也将是一个平面运动,而且是一个复合平面运动:旋转加平移。与我们前面所得结论一致。

明显地,旋转运动的角速度  $\omega$  应为  $S'$  系中粒子的回旋频率,  $\omega = qB/m$ , 平移线速率自然是  $u = E/B$ 。设  $S'$  系中粒子的回旋半径为  $R$ , 上节业已指出,带电粒子在磁场中的回旋半径与回旋频率无关,它是一个独立于回旋频率的量,因此。这三个量,  $\omega, u, R$ , 它们之间的关系不是完全确定的,而是存在三种可能性: 1.  $R < u/\omega$ , 2.  $R = u/\omega$ , 3.  $R > u/\omega$ , 这取决于粒子的动量或速度,因为  $R = p'/qB = v'/\omega \geq 0$ 。因此,当带电粒子在  $S'$  系作平面圆周运动时,在  $S$  系看来,粒子运动所产生的轨迹亦有三种可能性:

1. 当  $R < u/\omega$  时,轨迹为curtate cycloid。特别地,当  $R = 0$  时,轨迹退化为直线。

2. 当  $R = u/\omega$  时, 轨迹为normal cycloid。

3. 当  $R > u/\omega$  时, 轨迹为prolate cycloid。

这里, 我们从另外一个侧面看到了轨道分类的物理原因。

如果带电粒子在  $S'$  系作圆柱螺线运动, 则粒子在  $S$  系的复合运动将更为复杂, 它是一个空间运动, 可以视为  $yz$  平面上的cycloid motion再加沿  $x$  轴的匀速直线运动。

对于相互垂直的均匀静电场和均匀静磁场而言, 带电粒子的运动形态就只有这么多了。这是因为, 我们总可以选取坐标系使得

$$\mathbf{E} = E \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B \mathbf{i}, \quad (17.7.87)$$

并且进一步取

$$\mathbf{u} = \frac{E}{B} \mathbf{j}, \quad (17.7.88)$$

作坐标变换, 使得在  $S'$  系中仅仅保留静磁场而完全消去静电场, 从而粒子的运动方程化为

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}. \quad (17.7.89)$$

在  $S'$  系中, 粒子的运动是完全清楚的, 它要么是圆柱螺线运动, 要么是圆周运动。这样, 通过坐标变换, 我们就将复杂的运动分解为一些简单的运动了。这是坐标变换的众多好处之一。

最后指出,  $S$  系和  $S'$  系是不等价的, 即两系的运动方程不满足伽利略等价性原理, 这是因为洛伦兹力没有不变性, 在伽利略变换下将发生变化。这里是在经典意义上讨论带电粒子的运动, 当然的是一种近似, 严格地说, 带电粒子在电磁场下的运动应该用狭义相对论讨论才行。

#### §17.7.4 霍尔效应

如图17.7.23所示, 将一块导体平板放在磁场之中, 并且让它与磁场垂直。当电流  $I$  流过导体平板时, 在平行于电流方向的两侧  $A, A'$  之间会产生一个电势差  $U$ 。这种现象叫做霍尔效应 (Hall effect)。

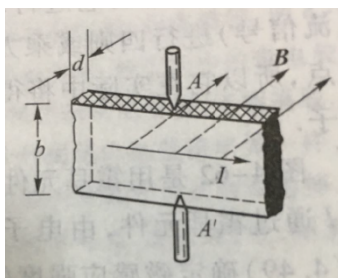


图 17.7.23. 霍尔效应

实验表明, 当磁场不太强时, 横向电势差  $U$  与电流强度  $I$  以及磁感应强度  $B$  成正比, 与平板厚度  $d$  成反比, 即

$$U = K \frac{IB}{d}, \quad (17.7.90)$$

其中, 系数  $K$  是一个常数, 称作霍尔系数 (Hall coefficient)。

霍尔效应可以用洛伦兹力来说明。按照目前电流的方向，洛伦兹力将指向平板的上侧，

$$d\mathbf{f}_L = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (17.7.91)$$

这使得导体中可以移动的电荷（也称载流子，carrier）将向上偏转移动，它们最后会到达并集中在平板的上侧面。由于导体本身是电中性的，因此，平板的下侧面必然集中了等量的异号电荷。这样，就会在平板的上下两个侧面之间建立一个横向电场。如果载流子的电荷  $q > 0$ ，则上侧带正电，下侧带负电，电场的方向从上指向下；相反，如果载流子的电荷  $q < 0$ ，则上侧带负电，下侧带正电，电场的方向从下指向上，见图17.7.24。我们还不难看出，不管横向电场  $\mathbf{E}$  的方向如何，它带来的库仑力，

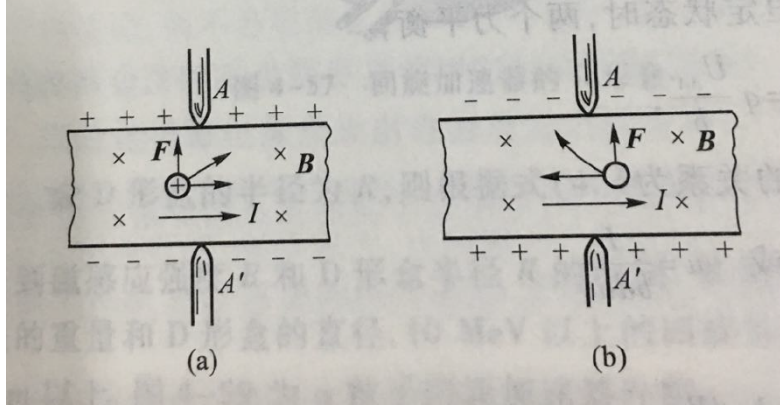


图 17.7.24. 载流子的横向移动

$$\mathbf{f}_c = q\mathbf{E}, \quad (17.7.92)$$

总是从上指向下，正好抵抗洛伦兹力。在刚开始的时候，两侧集中的电荷尚少，横向电场较弱，它产生的库仑力自然也较弱，不能抗拒洛伦兹力，载流子还会不断地向平板上侧面集中。随着两侧积累的电荷增加，横向电场增强，它产生的库仑力随之增强，但只要库仑力小于洛伦兹力，载流子就会向平板上侧面集中，这种集中又同时增大了横向电场。于是，容易看出，系统最终必然到达一种平衡，在此平衡之下，磁场的洛伦兹力与横向电场的库仑力大小相等，方向相反，即

$$q\mathbf{E} = -q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}, \quad (17.7.93)$$

其中， $\mathbf{v}_d$  是载流子的定向速度（也称漂移速度，drift velocity）上式表明，在系统到达平衡后，横向电场与磁场的关系为

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \quad (17.7.94)$$

横向电场也称霍尔电场（Hall electric field），下面，我们把它记作  $\mathbf{E}_H$ ，这样，我们有

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \quad (17.7.95)$$

这是霍尔效应的基本方程。

显然，横向电压  $U$  由霍尔电场决定，

$$U = E_H b = v_d B b, \quad (17.7.96)$$

其中,  $b$  是导体平板的横向宽度。

设载流子体密度为  $n$ , 则电流  $I$  可表为

$$I = qn(bdv_d) = (qnv_d)bd = bdnqv_d. \quad (17.7.97)$$

从上式解出漂移速度, 得

$$v_d = \frac{I}{bdnq}. \quad (17.7.98)$$

将之代入式(17.7.96), 得

$$U = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d}. \quad (17.7.99)$$

这样, 我们就解释了实验结果(17.7.90), 并求得了霍尔系数,

$$K = \frac{1}{nq}. \quad (17.7.100)$$

上式表明,  $K$  与载流子的体密度成反比, 因此通过测量霍尔系数, 可以确定导体内载流子的体密度。半导体内载流子的体密度远比金属的小, 因此, 半导体的霍尔系数要比金属的大得多。另外, 半导体内载流子的体密度很容易受到温度、杂质以及其它因素的影响, 因此, 霍尔系数为研究半导体载流子的变化提供了重要的方法。

此外, 如上所述, 霍尔电场的方向与载流子所带电荷的正负有关, 因此, 也可以用霍尔效应来判断导体材料内载流子所带电荷的类型, 例如, 掺杂半导体分为  $p$  型半导体和  $n$  型半导体,  $p$  型半导体中载流子为空穴, 带正电,  $n$  型半导体中载流子为电子, 带负电。因此, 通过测量霍尔电场, 就能判别一块具体的掺杂半导体材料到底属于那种类型。

关于霍尔效应, 除了**正常电导** (normal conductivity)  $\sigma_{xx}$  之外,

$$\sigma_{xx} = \frac{j_x}{E_x}, \quad (17.7.101)$$

它描写纵向的电流与纵向电场之间的关系, 还可定义**霍尔电导** (Hall conductivity),

$$\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_H}. \quad (17.7.102)$$

注意到

$$j_x = \frac{I}{bd} = nqv_d, \quad E_H = v_d B, \quad (17.7.103)$$

我们有

$$\sigma_{xy} = \frac{nq}{B}. \quad (17.7.104)$$

可见, **霍尔电导** 与外磁场成反比。自然, 也可以定义**霍尔电阻** (Hall resistance),

$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{1}{nq} \frac{B}{d}. \quad (17.7.105)$$

前面涉及的都是三维材料。对于二维材料, 例如,  $pn$  结中的反型层, 霍尔电阻可写为

$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{U}{jb} = \frac{E_H}{j} = \frac{1}{\sigma_{xy}}, \quad (17.7.106)$$

其中,  $j$  是面电流密度。1980年, Klaus von Klitzing在二维材料中发现了整数量子霍尔效应 (integral quantized Hall effect)。此时, 在  $R_H - B$  曲线中出现了很多的平台, 见图17.7.25,

$$R_H = \frac{h}{ne^2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (17.7.107)$$

其中,  $h$  是普朗克常数 (Planck constant),  $e$  是电子的电量的绝对值。

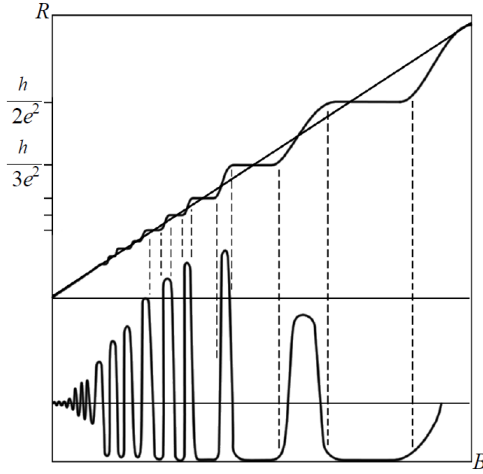


图 17.7.25. 整数量子霍尔效应

整数量子霍尔效应有很多用途, 例如, 确定精细结构常数 (fine structure constant), 它是量子电动力学中的一个重要常数。再如, 作标准电阻, 现在国际上已将如下的 von Klitzing constant 取作标准的电阻单位,

$$\frac{h}{e^2} = 25812.807572(95) \Omega. \quad (17.7.108)$$

后来, 在1982年, D. C. Tsui 等人还发现了分数量子霍尔效应 (fractional quantized Hall effect)。

## §17.8 运动电荷的电磁场\*

对于运动的点电荷  $q$ , 如前所述, 其电荷与电流密度分别为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)], \quad (17.8.1)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]\mathbf{v}(t). \quad (17.8.2)$$

利用场公式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}'', t) d\mathbf{r}'' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3}, \quad (17.8.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}'', t) d\mathbf{r}'' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3}, \quad (17.8.4)$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}'' q\delta[\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'(t)] \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3}, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)|^3},\end{aligned}\quad (17.8.5)$$

以及

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4} \int d\mathbf{r}'' q\delta[\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'(t)] \mathbf{v}(t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3}, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v}(t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)|^3}.\end{aligned}\quad (17.8.6)$$

总之, 我们有

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)|^3}, \quad (17.8.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v}(t) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (17.8.8)$$

这就是运动电荷所激发的电磁场, 不过, 这两个场公式只能应用于经典情形, 即  $v \ll c$  的情形。在高速情形下, 公式(17.8.3)和公式(17.8.4)均不成立, 需要用相对论的相应公式才行。等以后有机会再说吧。