

目 录

目 录	1
第十八章 电磁感应	2
§18.1 法拉第电磁感应定律	2
18.1.1 法拉第电磁感应定律	2
18.1.2 动生电动势	4
18.1.3 感生电动势	10
18.1.4 Lenz定律	12
§18.2 互感与自感	13
§18.3 磁能	19

第 18 章 电磁感应

§18.1 法拉第电磁感应定律

§18.1.1 法拉第电磁感应定律

1831年, Faraday发现了电磁感应定律, 后经Neumann整理, 将其数学表达式写为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (18.1.1)$$

其中, ε 为任一闭合回路 C (它不一定是实际的电路) 的**电动势** (electromotive force, 简记为emf), t 为时间, Φ 为**磁通量** (magnetic flux),

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.2)$$

这里, S 是以前述闭合回路 C 为边界的任意曲面。就象Stokes公式那样, 式(18.1.1)中约定闭合回路 C 的正向与曲面 S 的正向满足右手螺旋定则 (right-hand screw rule)。电动势 ε 的正向与闭合回路 C 的正向一致, 即电动势 ε 增长的方向为闭合回路 C 的正向。虽然式(18.1.1) 为Neumann所得, 但人们仍称之为**法拉第电磁感应定律** (Faraday's law of induction)。

通常, 人们将电源的电动势写为

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}, \quad (18.1.3)$$

其中, $\mathbf{K}$ 是作用在单位电荷上的非静电力, 它同静电场有相同的量纲。一般地, 非静电力 $\mathbf{K}$ 是电源的一种性质, 它与具体电源有关, 例如: 化学电池, 非静电力来源于化学反应; 压电晶体, 非静电力来源于机械压力; 温差电偶, 非静电力来源于温度梯度; 如是等等。特别地, 这里的非静电力来源于磁通量的变化。注意到电源电动势一般地不为零,

$$\varepsilon \neq 0, \quad (18.1.4)$$

但

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (18.1.5)$$

其中, $\mathbf{E}$ 是静电场, 所以, $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{E}$ 是有差别的, 虽然二者量纲相同。这也就是称 $\mathbf{K}$ 为非静电力的原因。引用 $\mathbf{K}$, 法拉第电磁感应定律可以写为

$$\oint_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (18.1.6)$$

其中, C 与 S 的定向满足右手螺旋定则。

运用狭义相对论, 可以阐明, $\mathbf{K}$ 其实就是相对于回路静止的参照系下的感应电场 $\mathbf{E}'$ 。因此, 电动势 ε 就是感应电场 $\mathbf{E}'$ 沿回路 C 的积分,

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}. \quad (18.1.7)$$

这样, 法拉第电磁感应定律就是

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.8)$$

现在, 感应电场 $\mathbf{E}'$ 的环路积分可以等于零,

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (18.1.9)$$

也可以不等于零,

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad (18.1.10)$$

这取决于磁通量 Φ 的变化率。因此, 感应电场 $\mathbf{E}'$ 是静电场 $\mathbf{E}$ 的推广, 它的旋度可以等于零, 也可以不等于零。当感应电场 $\mathbf{E}'$ 的旋度不等于零时, 它就不再是保守场了。

在法拉第电磁感应定律中, 闭合回路可以是静止而不随时间变化的, 也可以是运动并随时间变化的, 例如平移、旋转、变形等等。磁场可以是静磁场, 也可以是随时间变化的动磁场, 例如变化电流激发的磁场、运动磁铁或运动螺线管激发的磁场, 等等。

所谓闭合回路, 其实就是空间中的一个闭合曲线, 它可以是一个实际的电路, 也可以不是一个实际的电路。如果它是一个实际的电路, 即此闭合曲线是由导体构成的, 那么, 回路中就会出现感应电流 (induced current)。如果导体只是闭合回路 (闭合曲线) 的一部分, 则导体上不会出现感应电流, 但可能出现非零的电动势,

$$\varepsilon' = \int \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}, \quad (18.1.11)$$

这里的积分是沿导体曲线进行的, 按照回路的定向, 从一端到另一端。

值得指出的是, 在法拉第电磁感应定律中, 磁通量 Φ 与曲面 S 的选取无关, 只要它以闭合回路 C 为边界, 并且在定向上与闭合回路 C 满足右手螺旋定则即可。这是因为, 假如 S_1, S_2 均是以闭合回路 C 为边界, 并且在定向上与 C 满足右手螺旋定则的曲面, 见图18.1.1和18.1.2, 则 S_1 与 $-S_2$ 所

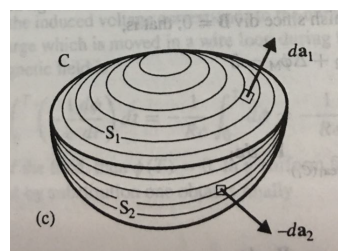
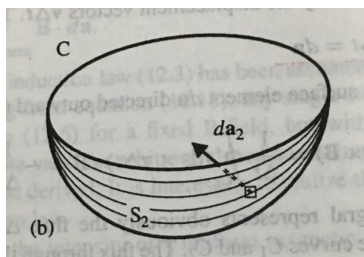
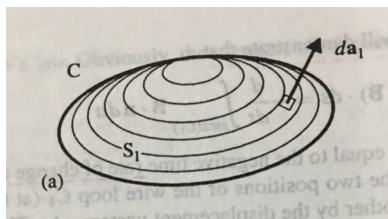


图 18.1.1: 以 C 为边界的曲面 S_1

图 18.1.2: 以 C 为边界的曲面 S_2

图 18.1.3: 闭合曲面 $S_1 - S_2$

形成的联合曲面是一个封闭曲面, 其中, $-S_2$ 与 S_2 是同一个曲面, 但定向相反, 见图18.1.3。对此封闭曲面运用关于磁场的Gauss定律, 得

$$\oint_{S_1+(-S_2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (18.1.12)$$

注意到积分的分区可加性, 我们有

$$\oint_{S_1+(-S_2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (18.1.13)$$

于是, 得

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.14)$$

这就肯定了, 磁通量确实与曲面的选取无关。

从上面的证明还可以看出, 法拉第电磁感应定律与磁场的Gauss定律是相容的, 没有矛盾的。这一点很重要, 否则的话, 我们就必须对磁场的高斯定律或法拉第电磁感应定律加以修正了。以后, 当我们学过Maxwell位移电流学说之后, 就更能理解这一点了。

§18.1.2 动生电动势

当磁场为静磁场时, 如果闭合回路随时间运动变化, 那么, 回路中产生的电动势就称为**动生电动势** (motional emf)。

例18.1.1. 如图18.1.4所示, 一个矩形导体边框以匀速 $\mathbf{v}$ 向右运动, 均匀磁场 $\mathbf{B}$ 占布整个右半空

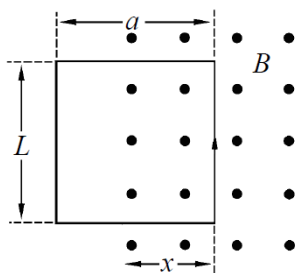


图 18.1.4: 运动边框的电动势

间, 其方向垂直页面朝外。当 $0 < x < a$ 时, (1) 求导体边框上的电动势 ε ; (2) 设边框的电阻为 R , 计算感应电流 I ; (3) 计算边框所感受到的洛伦兹力 $\mathbf{f}$; (4) 为保持边框运动, 外力必须做功, 计算外力的功率 P ; (5) 计算边框单位时间内所产生的焦耳热 Q ; (6) 证明 $P = Q$, 并说明它的意义。

解. (1) 取逆时针方向为边框的正方向。取边框所围成的长方形为曲面 S , 按右手定则, 曲面 S 的正向为垂直页面朝外的方向。于是,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^L dy \int_0^x dx B = BLx. \quad (18.1.15)$$

根据法拉第电磁感应定律,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BLv)}{dt} = -BLv. \quad (18.1.16)$$

可见, 电动势的大小为 BLv , 方向为顺时针方向。

(2)

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{BLv}{R}. \quad (18.1.17)$$

感应电流大小为 BLv/R , 方向为顺时针方向。

(3)

$$\mathbf{f} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \int_0^L I(\mathbf{j} dl) \times (\mathbf{k} B) = IBL\mathbf{i} = -\frac{B^2 L^2 v}{R} \mathbf{i}. \quad (18.1.18)$$

洛伦兹力的大小为 $B^2 L^2 v/R$, 方向朝左。

(4) 设外力为 $\mathbf{f}'$ 。为保持边框匀速运动, 必须

$$\mathbf{f}' + \mathbf{f} = 0. \quad (18.1.19)$$

这说明

$$\mathbf{f}' = -\mathbf{f} = \frac{B^2 L^2 v}{R} \mathbf{i}. \quad (18.1.20)$$

可见, 外力抵抗洛伦兹力, 方向朝右。其的功率为

$$P = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{B^2 L^2 v}{R} \mathbf{i} \right) \cdot (v \mathbf{i}) = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}. \quad (18.1.21)$$

(5) 边框单位时间内所产生的焦耳热为

$$Q = I^2 R = \left(-\frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}. \quad (18.1.22)$$

(6) 由 (4) 和 (5), 得

$$P = Q. \quad (18.1.23)$$

洛伦兹不做功, 外力做功, 所作之功全部转化为热量, 上式意义为能量守恒。 ■

例18.1.2. 交流发电机的基本原理。交流发电机也是动生电动势的典型例子, 图18.1.5为最简交流发电机的示意图, 我们用来说明一般交流发电机的基本原理。图中, $ABCD$ 是一个单匝金属线圈, 它可以绕固定的转轴在磁极 N, S 所激发的均匀磁场中转动。外部电路 (例如电灯) 通过电刷与金属线圈 $ABCD$ 相连。在外部汽轮机或水轮机等的带动下, 金属线圈 $ABCD$ 在磁场中匀速转动。由于磁通量的变化, 金属线圈中将产生动生电动势。如果外电路是闭合的, 则在线圈和外电路所组成的闭合回路中就会出现感应电流。

如图18.1.5(b)所示, 通过线圈 $ABCD$ 的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -BS \sin \theta = -BS \sin \omega t, \quad (18.1.24)$$

其中, ω 是金属线圈 $ABCD$ 绕定轴转动的角频率, S 是线圈 $ABCD$ 的面积。由法拉第电磁感应定律, 动生电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \cos \omega t. \quad (18.1.25)$$

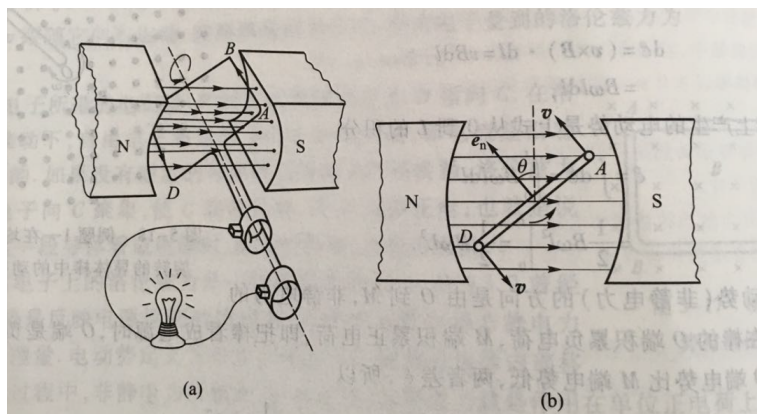


图 18.1.5: 交流发电机的基本原理

可见，动生电动势随时间 t 作余弦式周期变化， ω 为其角频率。这种电动势叫做简谐交变电动势，简称交流电。

设整个回路的电阻为 R 。当外电路闭合时，电路中电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R} \cos \omega t. \quad (18.1.26)$$

发电机的瞬时功率为

$$P = I^2 R = \frac{(BS\omega)^2}{R} \cos^2 \omega t. \quad (18.1.27)$$

最大功率为

$$P_{\max} = \frac{(BS\omega)^2}{R}. \quad (18.1.28)$$

平均功率为

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt, \quad (18.1.29)$$

其中， T 为交流电的周期，

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (18.1.30)$$

于是，

$$\langle P \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{(BS\omega)^2}{R} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \frac{(BS\omega)^2}{R} = \frac{1}{2} P_{\max}. \quad (18.1.31)$$

自然，发电机对外输出之功应该来源于汽轮机或水轮机所做的机械功。下面我们来验证它。载流线圈 $ABCD$ 在磁场中所受的力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (18.1.32)$$

其中， $\mathbf{m}$ 是载流线圈 $ABCD$ 的磁偶极矩，

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_n. \quad (18.1.33)$$

取水平向右的方向（即 $\mathbf{B}$ 的方向）为 x 轴的方向，竖直向上的方向为 y 轴的方向， z 轴的方向由 x 和 y 轴按标准关系决定。又，取 z 轴的方向为载流线圈 $ABCD$ 转轴的正方向。则

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z. \quad (18.1.34)$$

我们有

$$\boldsymbol{\tau} = -ISB \cos(\omega t) \mathbf{e}_z. \quad (18.1.35)$$

为了维持载流线圈 $ABCD$ 的匀速转动, 汽轮机或水轮机所施加的力矩必须满足

$$\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (18.1.36)$$

斯即力矩平衡也。这样,

$$\boldsymbol{\tau}' = -\boldsymbol{\tau} = ISB \cos(\omega t) \mathbf{e}_z. \quad (18.1.37)$$

汽轮机或水轮机输出的机械功率为

$$P' = \boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\omega} = ISB\omega \cos(\omega t). \quad (18.1.38)$$

将前面所算出的电流代入, 得

$$P' = \frac{(BS\omega)^2}{R} \cos^2 \omega t. \quad (18.1.39)$$

可见,

$$P' = P, \quad (18.1.40)$$

如所应当的。

动生电动势还有另一种计算方法, 它与磁场的洛伦兹力有关, 因而很直观:

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (18.1.41)$$

同前, 此处 C 是空间中一个闭合回路, ε 是该回路上的电动势, $d\mathbf{l}$ 是沿该回路的积分微元。回路 C 在空间中运动, 各处速度一般是不相等的, 其中 $\mathbf{v}$ 是微元 $d\mathbf{l}$ 处的运动速度。如果 C 是实际电路, 则电路中的电荷将随 C 一起运动。容易看出, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 正是作用在电路中单位电荷上的洛伦兹力, 它推动电路中的电荷沿电路运动而形成电流, 因此, 它就是电源的非静电力 $\mathbf{K}$, 即,

$$\mathbf{K} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (18.1.42)$$

这就是式(18.1.41)的直观解释。

下面, 我们来证明式(18.1.41)。图18.1.6画出了运动回路 C 在相邻时刻 t 和 $t + dt$ 的位形, 前者为Loop at time t , 后者为Loop at time $(t + dt)$ 。不妨取逆时针方向为此二线圈 (two loops) 的正向。任取一个以Loop at time t 为边界且与之满足右手定则的曲面 S 。再任取一个以前述两线圈为边的空间曲面, 其形如一个狭长的二维环带 (ribbon), 见图。显然, 此环带连接在曲面 S 上, 并以Loop at time t 为二者的交界。曲面 S 加上前述之环带构成了曲面 S' , 它正好以Loop at time $(t + dt)$ 为边界。将 S 的正向沿拓到 S' 上, 则 S' 正好与边界Loop at time $(t + dt)$ 满足右手定则。按此沿拓, 在环带上, 曲面正向与 $(\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{l}$ 的方向一致, 见图。这样, 我们就有两个曲面, 一个对应于时刻 t , 一

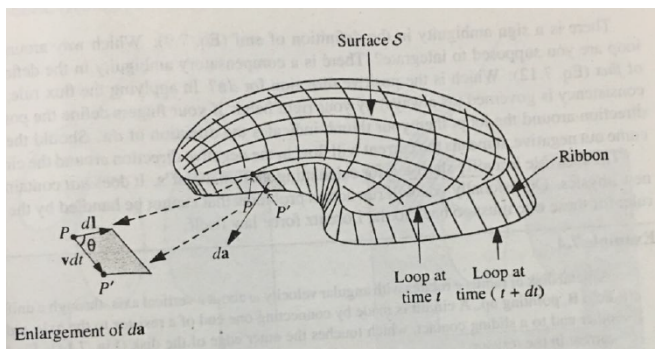


图 18.1.6: 动生电动势

个对应于时刻 $t + dt$ ，前者为 S ，后者为 S' 。于是，

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= \Phi(t + dt) - \Phi(t) \\
 &= \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} - \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\
 &= \int_{S' - S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\
 &= \int_{\text{ribbon}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.
 \end{aligned} \tag{18.1.43}$$

按照前面的约定，在环面上，

$$d\mathbf{s} = (\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt. \tag{18.1.44}$$

这样，我们得

$$d\Phi = \int_{\text{ribbon}} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt = \left[\oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \right] dt. \tag{18.1.45}$$

这说明

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}). \tag{18.1.46}$$

注意到

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \tag{18.1.47}$$

我们有

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \tag{18.1.48}$$

得证。

从式(18.1.41)可见，只有回路中运动的部分才对电动势有贡献，不运动的部分对电动势没有贡献。因此，在应用式(18.1.41)计算电动势时，只须对回路中运动的部分积分即可。

例18.1.3. 如图18.1.7所示，一个金属棒 CD 在一个固定的导体边框上向右匀速运动，速度为 $\mathbf{v}$ 。设金属棒 CD 长为 l ，求回路上的电动势 ε 。

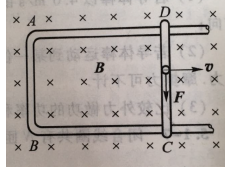


图 18.1.7: 平移金属棒上的动生电动势

解.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= Bvl.
 \end{aligned} \tag{18.1.49}$$

■

例18.1.4. 如图18.1.8所示, 一个长度为 L 的金属棒在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中匀速旋转, 角速率为 ω 。求此棒上的电动势 ε 。

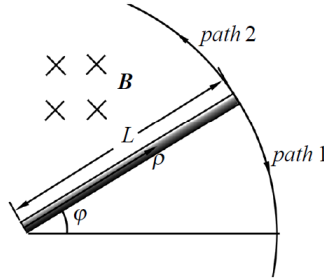


图 18.1.8: 旋转金属棒上的动生电动势

解.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \int_0^L \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_0^L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.
 \end{aligned} \tag{18.1.50}$$

取柱坐标系, 我们有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -B \mathbf{k}, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho, \tag{18.1.51}$$

以及

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = (\omega \mathbf{k}) \times (\rho \mathbf{e}_\rho) = \omega \rho \mathbf{e}_\varphi. \tag{18.1.52}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \int_0^L [(\omega \rho \mathbf{e}_\varphi) \times (-B \mathbf{k})] \cdot (\mathbf{e}_\rho d\rho) \\
 &= \int_0^L (-\omega B \rho \mathbf{e}_\rho) \cdot (\mathbf{e}_\rho d\rho) \\
 &= -\omega B \int_0^L \rho d\rho \\
 &= -\frac{1}{2} \omega B L^2.
 \end{aligned} \tag{18.1.53}$$

■

本题也可以加辅助曲线构成回路进行计算, 例如取图18.1.8右下的扇形边界。注意到回路中只有金属棒在运动, 也只有金属棒上才有电动势, 我们有

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \tag{18.1.54}$$

对于扇形, 我们有

$$d\mathbf{s} = \mathbf{k} \rho d\rho d\varphi = \mathbf{k} \omega \rho d\rho dt, \tag{18.1.55}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int (-B \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \omega \rho d\rho dt) \\
 &= -B \omega \int \rho d\rho dt \\
 &= -\frac{1}{2} \omega B L^2 t.
 \end{aligned} \tag{18.1.56}$$

代入电动势的表达式, 得

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \omega B L^2. \tag{18.1.57}$$

注意到前一解法中, 金属棒段的正向为 $\mathbf{e}_\rho$, 本解法中, 金属棒段的正向为 $-\mathbf{e}_\rho$, 二者定向约定相反, 是故, 两结果并无差别, 而是完全一致的。

§18.1.3 感生电动势

当回路固定不动而磁场随时间变化时, 闭合回路上出现的电动势称为**感生电动势** (induced emf)。

由于回路现在是固定不动的, 因此, 相对于回路静止的参照系其实就是实验室系。于是, 感应电场 $\mathbf{E}'$ 就是实验室系观测到的电场, 见18.1.1节。此时, 为了方便, 人们通常将感应电场 $\mathbf{E}'$ 改记为 $\mathbf{E}$, 这样, 法拉第电磁感应定律的形式就是

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \tag{18.1.58}$$

因为回路是固定不动，所以任一个以它为边界的曲面也是固定不动的。这意味着 $d\mathbf{s}$ 与时间 t 无关，于是，我们可以交换上式右边求导与积分的次序，

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.59)$$

这样，我们得

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.60)$$

相应的微分版本是

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (18.1.61)$$

通常，人们将上式说为，变化的磁场可以激发涡旋的电场。这是比较深刻的，以前我们涉及的都用源（电荷源、电流源）激发场，这里是场激发场。Maxwell敏锐地觉察到了这一点，上述感应电场就是他最先提出的。通过引入位移电流，他还发现，变化的电场可以激发涡旋的磁场。于是，变化的磁场激发涡旋的电场，变化的电场又激发涡旋的磁场，如此循环往复，电场和磁场可以相互激发，而不必借助于电荷源和电流源了。这蕴含着，电磁场可以脱离电荷源和电流源而独立存在，它们本具自性，自身就是物理实在。电磁场的这种相互激发可以形成真空中的电磁波，它是Maxwell的伟大预言之一。Maxwell还预言，光就是一种电磁波，这样，他就将光与电磁场统一了起来。可谓目光如炬，贡献非凡！

Maxwell提出的感应电场是静电场的推广，当

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad (18.1.62)$$

时，我们有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (18.1.63)$$

感应电场退回静电场。

例18.1.5. 如图18.1.9所示，在一个半径为 R 的圆柱形区域内分布有一个均匀磁场 $\mathbf{B}$ ，它随时间而变化，即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ 。设此磁场变化的速率为 $d\mathbf{B}/dt$ ，求空间上的感应电场 $\mathbf{E}$ 。

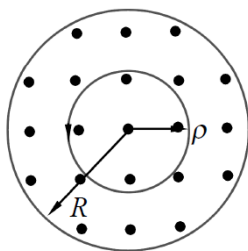


图 18.1.9: 感应电场

解. 取柱坐标系, 由对称性, 我们有

$$\begin{aligned} 2\pi\rho E_\varphi &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \begin{cases} -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}, & \rho < R \\ -\pi R^2 \frac{dB}{dt}, & \rho \geq R. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.1.64)$$

由是, 我们得

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho \frac{dB}{dt} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < R \\ -\frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho} \frac{dB}{dt} \mathbf{e}_\varphi, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (18.1.65)$$

■

我们知道, 当电流是稳恒电流的时候, 磁场可以通过Biot-Sarvart定律或安培环路定理进行计算。当电流的变化不是很快的时候, 即所谓准静态 (quasi-static) 的情形, Biot-Sarvart定律和安培环路定理仍是近似成立的, 我们仍可以用它们来计算变化的电流所激发的变化的磁场。在研究电磁感应现象时, 准静态情形起着很重要的作用。

例18.1.6. 一个半径为 R 的螺线管载有准静态变化的电流, $I = I(t)$ 。设单位长度上的扎数为 n , 求螺线管内外的感应电场 $\mathbf{E}$ 。

解. 由安培环路定律, 我们得螺线管内的磁场,

$$\mathbf{B}_{in} = \mu_0 n I(t) \mathbf{e}_z. \quad (18.1.66)$$

取柱坐标系, 利用对称性, 我们有

$$\begin{aligned} 2\pi\rho E_\varphi &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \begin{cases} -\pi\rho^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}, & \rho < R \\ -\pi R^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}, & \rho \geq R. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.1.67)$$

于是, 我们得

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho \mu_0 n \frac{dI}{dt} \mathbf{e}_\varphi, & \rho < R \\ -\frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \mathbf{e}_\varphi, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (18.1.68)$$

■

为了方便, 在讨论电磁感应现象时, 本章以下涉及到的时变电流都是准静态的, 我们就不再一一说明了。

§18.1.4 Lenz定律

Lenz定律是法拉第电磁感应定律的推论:

在闭合电路中, 感应电流出现的方向, 总是阻碍产生它的磁通量的变化。

还有人形象地将它说为:

自然界讨厌磁通量的变化。

设闭合电路的电阻为 R ，则其电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \oint_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.1.69)$$

根据定向的要求，回路 C 的正向与曲面 S 的正向成右手关系。按照上式，电流 I 定向与回路 C 一致。又，由安培环路定理易知，电流同它激发的磁场成右手关系，这说明，电流 I 激发的磁场方向与曲面 S 的正向一致。但上式右边有一负号，这意味着电流 I 激发的磁场将减少通过曲面 S 的磁通量，也就是抵抗诱生电流 I 的磁通量的增长速率。其实，若计入负号，则可以简单地说，磁通量变化激发的电流满足左手定则，而电流激发的磁场则满足右手定则，是故，感应电流激发的磁场，总是阻碍诱生它的磁通量的变化。这就是Lenz定律的物理内容。

从上面的讨论还可以看出，Lenz定律就是法拉第电磁感应定律中，

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (18.1.70)$$

负号的体现，或者说，它就是法拉第电磁感应定律中出现负号的注脚。

另一方面，Lenz定律也是能量守恒的反映：假若感应电流不是阻碍而是加强诱生它的磁通量的变化的话，这样的变化必然再次诱生更大的感应电流，同前，这样的电流又一次地加强增大诱生它的磁通量的变化，如此循环往复，这样的正反馈（positive feedback）必将使得感应电流越来越大，所产生的焦耳热也越来越多，乃至无穷，取之不尽，用之不竭也。利用此无穷无尽之焦耳热，不难造出第一种永动机。所谓第一种永动机，它是一种热机，可以无需能量的输入，而却可以输出无穷无尽的能量。这明显地破坏了能量守恒，自然是不可能的了。

在实际中，Lenz定律主要用于判断感应电流的方向，见图18.1.10。

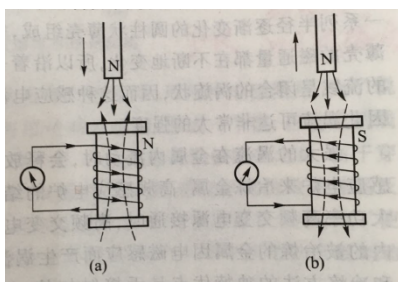


图 18.1.10: 感应电流的方向

§18.2 互感与自感

由于电磁感应，在一个实际的电路中，各个电流回路之间存在相互感应和自我感应——**互感** (mutual inductance) 和 **自感** (self-inductance)。

如图18.2.11所示，设有两个闭合回路 C_1 和 C_2 ，其电流分别为 I_1 和 I_2 。显然，电流 I_2 激发的磁场

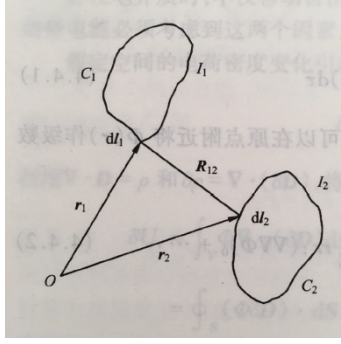


图 18.2.11: 两个闭合回路之间的互感, 其中, $R_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$

穿过回路 C_1 , 同样地, 电流 I_1 激发的磁场也穿过回路 C_2 。现在, 我们来分别计算穿过回路 C_1 和 C_2 的磁通量。首先, 我们考虑 C_1 。有

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{s}_1, \quad (18.2.1)$$

其中, S_1 是一个以 C_1 为边的曲面, 二者在定向上满足右手关系。

利用Stokes公式, 我们有

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (18.2.2)$$

其中, $\mathbf{A}$ 是矢量势。可见, 穿过一个曲面的磁通量也可以用矢量势沿该曲面边界的回路积分进行计算。这是一个计算磁通量的常用公式。

这样, 我们有

$$\Phi_{12} = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{l}_1, \quad (18.2.3)$$

其中, $\mathbf{A}_2$ 是电流 I_2 的矢量势。我们知道,

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}. \quad (18.2.4)$$

将之代入 Φ_{12} 的表达式, 得

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (18.2.5)$$

可见, 穿过闭合回路 C_1 的磁通量与闭合回路 C_2 的电流成正比,

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2, \quad (18.2.6)$$

其中, M_{12} 是比例系数,

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (18.2.7)$$

上式表明, M_{12} 是一个几何量, 它只与回路 C_1 和 C_2 的几何构形有关, 例如, 两回路自身的大小、方向以及相互之间的距离等等。通常称量 M_{12} 为两回路 C_1 和 C_2 的互感 (mutual inductance)。互感的单位是亨利 (H, henry)。

同样地, 不难得知, 穿过闭合回路 C_2 的磁通量为

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1, \quad (18.2.8)$$

其中,

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (18.2.9)$$

显然,

$$M_{21} = M_{12}, \quad (18.2.10)$$

即, C_1 和 C_2 之间的两个互感是相等的。

其实, C_1 上电流 I_1 所激发的磁场也穿过闭合回路 C_1 自身, 因此,

$$\Phi_{11} = \oint_{C_1} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{l}_1, \quad (18.2.11)$$

其中, $\mathbf{A}_1$ 是电流 I_1 的矢量势,

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \quad (18.2.12)$$

由此易得

$$\Phi_{11} = M_{11} I_1, \quad (18.2.13)$$

其中,

$$M_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|}. \quad (18.2.14)$$

通常, 将 M_{11} 记为 L_1 , 并称之为闭合回路 C_1 的**自感** (self-inductance)。自感的单位与互感相同, 也是亨利。

对于闭合回路 C_2 , 也有同样的结果,

$$\Phi_{22} = M_{22} I_2 = L_2 I_2, \quad (18.2.15)$$

其中, L_2 为 C_2 的自感,

$$L_2 = M_{22} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}'_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|}. \quad (18.2.16)$$

显然, 通过闭合回路 C_1 的总磁通为

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{l}_1 \\ &= \oint_{C_1} [\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1)] \cdot d\mathbf{l}_1 \\ &= \Psi_{11} + \Psi_{12} \\ &= L_1 I_1 + M_{12} I_2. \end{aligned} \quad (18.2.17)$$

等式右边第一项是自家磁场的贡献, 第二项为 C_2 磁场的贡献。同样地,

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = M_{21} I_1 + L_2 I_2. \quad (18.2.18)$$

上二式可以合写为

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^2 M_{ij} I_j, \quad i = 1, 2, \quad (18.2.19)$$

其中,

$$M_{ii} = L_i. \quad (18.2.20)$$

由上式可知, 如果 I_1 和 I_2 是时变电流,

$$I_1 = I_1(t), \quad I_2 = I_2(t), \quad (18.2.21)$$

则磁通量 Ψ_1 和 Ψ_2 也是时变的,

$$\Psi_1 = \Psi_1(t), \quad \Psi_2 = \Psi_2(t), \quad (18.2.22)$$

由法拉第电磁感应定律, 两闭合回路 C_1 和 C_2 中必然存在感应电动势,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^2 M_{ij} \frac{dI_j}{dt}, \quad i = 1, 2. \quad (18.2.23)$$

此式亦可以视为电感的操作性定义, 因为感应电动势 ε_i 和电流变化率 dI_i/dt 都是实验室便于测量的量。例如, 一个导体线圈的自感可以表为

$$L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt}, \quad (18.2.24)$$

实验上, 测得 ε 和 dI/dt 即得 L 。

上面的结果不难推至 n 个闭合回路的系统,

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j, \quad (18.2.25)$$

$$\varepsilon_i = -\sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{dI_j}{dt}, \quad (18.2.26)$$

其中,

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (18.2.27)$$

特别地, 对角元 M_{ii} 皆为自感,

$$M_{ii} = L_i. \quad (18.2.28)$$

例18.2.1. 一个半径为 R 长度为 l 的螺线管, 单位长度上绕有 n 扎金属线, 求螺线管的自感 L 。

解. 设螺线管的载流为 I 。

由安培环路定律, 螺线管内的磁场为

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{e}_z. \quad (18.2.29)$$

通过螺线管的磁通量为

$$\Phi = N\phi = NBS = (nl)(\mu_0 n I)(\pi R^2) = \mu_0 n^2 V I, \quad (18.2.30)$$

其中, N 是总扎数, ϕ 为通过单扎的磁通, $V = \pi R^2 l$ 为螺线管的体积。

由自感之定义, 得

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n^2 V. \quad (18.2.31)$$

可见, 螺线管的自感与扎线密度的平方成正比, 也与自身的体积成正比。■

例18.2.2. 如图18.2.12所示, 一个长度为 l 的同轴电缆, 其内外半径分别为 R_1 和 R_2 。求此同轴电缆的自感 L 。

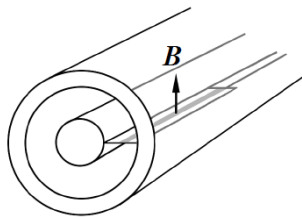


图 18.2.12: 同轴电缆的自感

解. 设同轴电缆内芯载有电流 I 。由安培回路定律, 我们有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi, \quad R_1 < \rho < R_2. \quad (18.2.32)$$

磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_0^l dz \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (18.2.33)$$

自感为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (18.2.34)$$

■

例18.2.3. 如图18.2.13所示, 将一个短小螺线管(半径 a , 长度 l , 单位长度上的扎数 n_1)放置在一个长大的螺线管(半径 b , 单位长度上的扎数 n_2)的内部。(1) 求此二螺线管之间的互感 M 。(2) 当小螺线管载有电流 I 时, 通过大螺线管的磁通量 Φ 是多少?

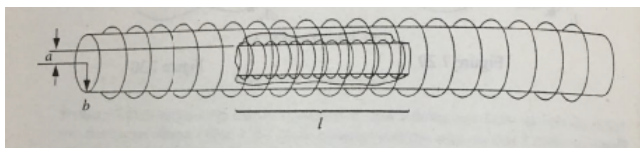


图 18.2.13: 螺线管间的互感

解. (a) 设大螺线管载有电流 I_b , 则其内部磁场为

$$\mathbf{B}_b = \mu_0 n_2 I_b. \quad (18.2.35)$$

穿过小螺线管的磁通量为

$$\Phi_{ab} = N_a B_b S_a = (ln_1)(\mu_0 n_2 I_b)(\pi a^2) = \pi \mu_0 n_1 n_2 l a^2 I_b. \quad (18.2.36)$$

互感为

$$M = \frac{\Phi_b}{I_b} = \pi \mu_0 n_1 n_2 l a^2. \quad (18.2.37)$$

(b) 通过大螺线管的磁通量为

$$\Phi = MI = \pi \mu_0 n_1 n_2 l a^2 I. \quad (18.2.38)$$

■

在实际应用中, 一般要将多个自感元件(例如螺线管)连接起来。这时, 往往一个自感元件的磁场可能穿过另一个自感元件的回路, 于是, 这些自感元件之间还会产生互感, 这使得整个系统的性能品质难以控制。所以, 在实际应用中, 必须尽量减少自感元件之间互感耦合。当互感耦合可以忽略不计时, 整个系统的性能就容易控制了, 因为无论是串联还是并联, 系统的总自感都是清楚的。

当两个自感 L_1 和 L_2 串联时, 其电流是相等的

$$I_1 = I_2 = I. \quad (18.2.39)$$

对于串联电路, 感应电动势是相加的,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (18.2.40)$$

由于

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad (18.2.41)$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (18.2.42)$$

因此,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \\ &= -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} \\ &= -(L_1 + L_2) \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (18.2.43)$$

这意味着, 两串联自感的总自感为

$$L = -\frac{\varepsilon}{\frac{dI}{dt}} = L_1 + L_2. \quad (18.2.44)$$

即, 自感串联时, 总自感为各自感之和。

对于并联电路, 感应电动势是相等的, 总电流则是相加的,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon. \quad (18.2.45)$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (18.2.46)$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \\ &= -\frac{\varepsilon_1}{L_1} - \frac{\varepsilon_2}{L_2} \\ &= -\frac{\varepsilon}{L_1} - \frac{\varepsilon}{L_2} \\ &= -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\varepsilon. \end{aligned} \quad (18.2.47)$$

这说明两个自感并联后的总自感为

$$L = -\frac{\varepsilon}{\frac{dI}{dt}} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (18.2.48)$$

上式也可写为

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}. \quad (18.2.49)$$

即, 自感并联时, 总自感之倒数为各自感倒数之和。通常讲的电感即指自感, 电感器件即自感器件, 以上所述即通常所谓的电感串、并联问题。

§18.3 磁能

要在一个自感器件 (inductor, 例如螺线管) 上建立电流 I , 电源必须抵抗自感器件上的感应电动势作功, 这是因为, 电流不可能一步跳变至 I , 而是必须从零连续地升至 I 。前面已经指出, 时变电流必然导致自感器件产生感应电动势,

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}, \quad (18.3.1)$$

其中, L 是器件的自感。电源必须抵抗此电动势作功才能使得电流从零连续地升至 I , 相应的功率为

$$P = -\varepsilon I. \quad (18.3.2)$$

因此, 电源的功微元为

$$dW = P dt = -\varepsilon I dt. \quad (18.3.3)$$

代入前面的感应电动势, 得

$$dW = LI dI. \quad (18.3.4)$$

积之, 得

$$W = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (18.3.5)$$

功能转换, 上式右边即自感器件所贮存的能量, 通常记为

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2L}\Phi^2, \quad (18.3.6)$$

其中, Φ 是自感的磁通量,

$$\Phi = LI. \quad (18.3.7)$$

自感器件所贮存的能量 U_m 本质上属于磁能, 由磁场所荷载。为了看到这一点, 我们注意到

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (18.3.8)$$

于是,

$$U_m = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2} \oint \mathbf{A} \cdot (I d\mathbf{l}). \quad (18.3.9)$$

利用代换

$$I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{j} dv, \quad (18.3.10)$$

可以将上式的积分表示写为

$$U_m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) dv. \quad (18.3.11)$$

利用安培定律的微分形式,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (18.3.12)$$

上式还可以写为如下之形式,

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dv. \quad (18.3.13)$$

由矢量分析公式,

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (18.3.14)$$

我们有

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (18.3.15)$$

将之代入 U_m 的表达式, 得

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dv - \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dv \quad (18.3.16)$$

利用高斯公式, 我们有

$$\int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dv = \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (18.3.17)$$

上式左边的积分显然要包括磁场分布的一切空间区域, 将它扩展至全空间也是可以的, 因此, 右边积分的曲面可以取在无穷远处。物理上, 在无穷远处, 磁场应该趋于零, 于是,

$$\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (18.3.18)$$

这样, 我们就有

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dv. \quad (18.3.19)$$

这就证得了，自感所贮存的能量确实是磁能。通常称

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (18.3.20)$$

为磁场的能量密度。

对于螺线管，见例18.2.1，我们有

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad B = \mu_0 n I. \quad (18.3.21)$$

因此，

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 V) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = u_m V. \quad (18.3.22)$$

这是上述磁能公式的一个例证。

对于同轴电缆，见例18.2.2，我们有

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho}. \quad (18.3.23)$$

于是，

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (18.3.24)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dv &= \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \right)^2 dv \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \int_0^l dl \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \ln \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (18.3.25)$$

因此，

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dv. \quad (18.3.26)$$

这是上述磁能公式的另一个例证。

有时，也可以利用磁能求自感，

$$L = \frac{2U_m}{I^2}. \quad (18.3.27)$$

对于一般的情形，电源必须抵抗每一个闭合回路的感应电动势而做功，

$$dW = \sum_{i=1}^n (-\varepsilon_i I_i) dt. \quad (18.3.28)$$

由于

$$\varepsilon_i = - \sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{dI_j}{dt}, \quad (18.3.29)$$

因此，

$$dW = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i dI_j. \quad (18.3.30)$$

上式可以写为

$$\begin{aligned}
 \mathrm{d}W &= \sum_{i \neq j}^n M_{ij} I_i \mathrm{d}I_j + \sum_{i=1}^n L_i I_i \mathrm{d}I_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n M_{ij} (I_i \mathrm{d}I_j + I_j \mathrm{d}I_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i \mathrm{d}I_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n M_{ij} \mathrm{d}(I_i I_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i \mathrm{d}I_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \mathrm{d}(I_i I_j). \tag{18.3.31}
 \end{aligned}$$

积之，得

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij} I_i I_j, \tag{18.3.32}$$

或者，

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i. \tag{18.3.33}$$

这就是具有 n 个闭合回路的系统所贮存的磁能。