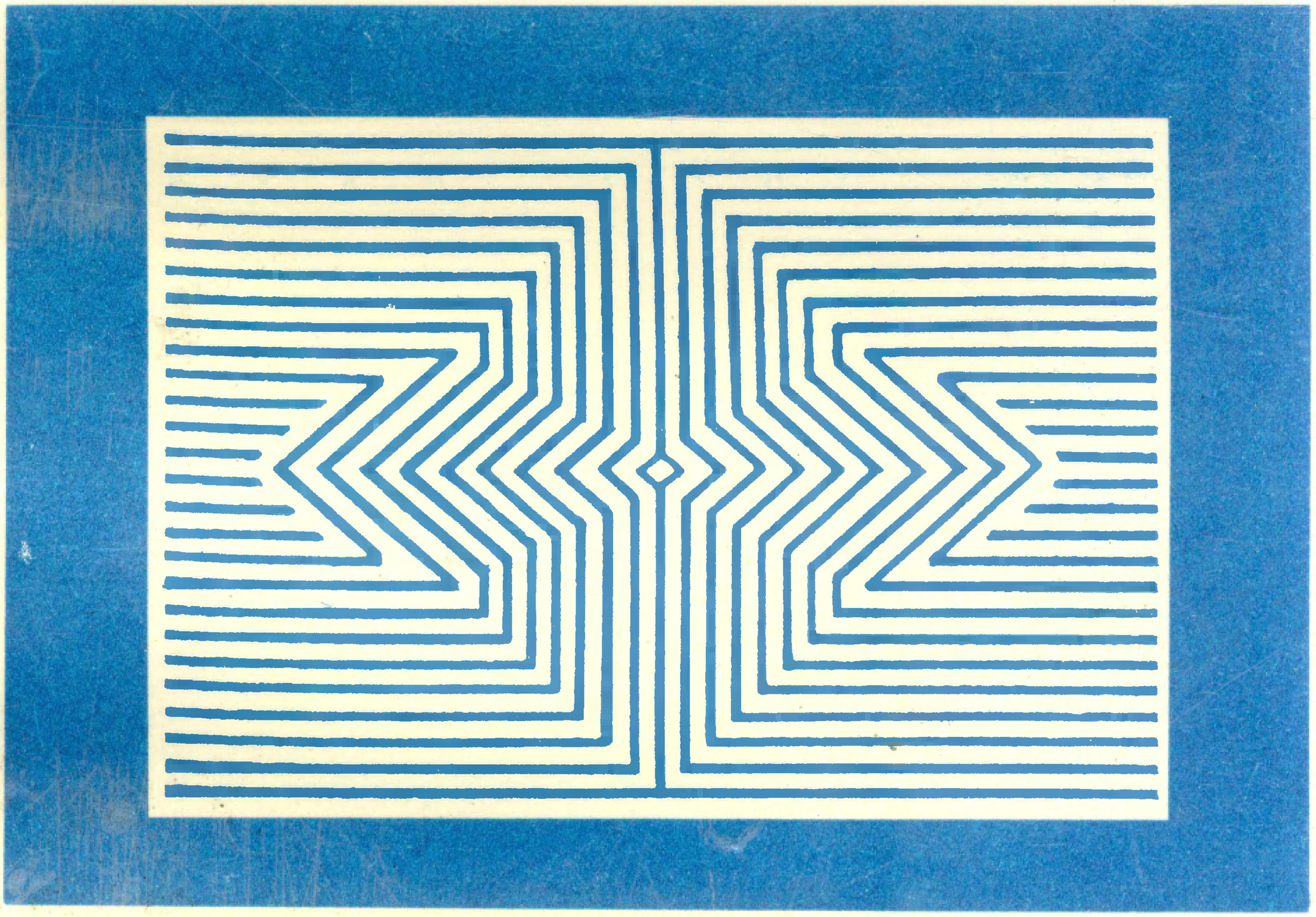
大学数学教程

第一册

罗亚平 等



南京大学出版社

大学数学教程

第一册

韩继昌　罗亚平　王巧玲
范克新　王芳贵　曹祥炎

南京大学出版社

1996·南　京

大学数学教程

（第一册）

罗亚平　等

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内　邮政编码：210093）

江苏省新华书店发行　　丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 16.875　字数 437 千

1996 年 9 月第 1 版　　1996 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—1 500

ISBN 7-305-02991-2/O·209

定价 21.50 元

（南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换）

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多。但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论(非数学)专业的本科与研究生课程中。南京大学基础型人才培养基地“强化部”，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础。为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材。内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离空间、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共20章，分三册出版。教材大纲在1990年由编者与强化部孙景李、卢德馨(二位物理学教授)共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定。全套教材已在强化部、天文系使用5次，第1～14章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时270；第15～20章为物理类专业的必选课，用90学时讲授。

在编写时注意如下几点：

1. 选材。内容取材贯彻少而精原则。传统高等数学的内容按教委(89)教高司字101号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第14章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥。

2. 加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨。注意加强逻辑非，“无穷小量”阶的估计，极限理论等训练。还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性。加强集合论基础知识，例如可

列集、基数，并引进流形上的微积分．大胆删去了传统高等数学中一些烦琐而用处不大的证明，在第 14～20 章中略去了一些很长或技巧性很高的证明．

3．结构编排．全书统一处理分析、几何、代数等多学科中的概念、方法、理论．各部分之间有很强的连续性，前后呼应，使之成为比较有机的整体，同时各学科内容又相对集中．

4．例题与习题．加强传统性计算训练．全书配备了大量启发性、典型性例题，并注意一题多解．每节后面都配有习题，在每册之后附有答案或提示．

5．力求深入浅出，少而精，在推理证明中尽力做到层次清楚，基本思路突出．

6．书中有部分内容用小字排印或打＊号，在教学中可酌情选讲．

参加编写工作的有韩继昌、王巧玲、罗亚平、范克新、曹祥炎、王芳贵等六位同志．作者都是长期从事教学工作的中老年教师，不仅有丰富的教学经验，而且注意了解国内外高等数学的教学动态及有关专业的教学要求．在编写过程中每章都由二人以上讨论定稿，由韩继昌教授统稿．因此，本书是集体智慧的结晶．

本书的出版，得到了强化部领导卢德馨、桑志芹同志的大力支持，在编写过程中得到了黄正中、孙景李、唐述钊、许绍溥、姜东平、朱乃谦、金宁等同志的帮助，在此向他们表示衷心的感谢．

限于水平，不妥之处在所难免，敬请读者和使用本教材的教师批评指教．

编者

1996 年 6 月

大学数学教程

第一册目录

1. 分析基础……（1）

§1.1 实数集 函数……（1）

1. 集合（1），2. 实数集（2），3. 数集的界与确界（3），4. 逻辑符号（4），5. 常用的等式与不等式（6），6. 映射 函数 数列（8），§1.1习题(13)

§1.2 极限的概念……（15）

1. 数列的极限(15)，2. 函数的极限(20)，3. 左极限 右极限(25)，4. 数列极限与函数极限的关系(27)，§1.2习题(29)

§1.3 极限的性质和运算法则……（30）

1. 存在有限极限的函数之局部性质(31)，2. 极限的四则运算(34)，3. 无穷小量及其性质(36)，4. 复合函数的极限(37)，§1.3 习题(41)

§1.4 极限的存在准则……（44）

1. 实数系的连续性(44)，2. 确界定理 单调有界定理(45)，3. 两个重要极限(48)，§1.4 习题(53)

§1.5 连续……（54）

1. 连续与间断(54)，2. 连续函数的局部性质与运算法则(57)，3. 严格单调连续函数的反函数的连续性(58)，4. 初等函数的连续性(60)，5. 闭区间上连续函数的性质(63)，§1.5 习题(68)。

§1.6 无穷小量的阶 不定型的极限……（70）

1. 无穷小(大)量的比较(70)，2. 无穷小量的阶(73)，3. 不定型的极限(76)，§1.6 习题(80)。

2. 一元函数的微分学……（82）

§2.1 导数与微分的概念……（82）

1．引出导数的例子(82)，2．导数的概念(83)，3．微分的概念(88)，§2.1 习题(90)。

§2.2 导数与微分的计算 ……(91)

1．导数与微分的四则运算(91)，2．复合函数的导数(93)，3．反函数的导数(96)，4．导数基本公式(98)，§2.2 习题(102)。

§2.3 高阶导数与高价微分 ……(103)

1．高阶导数(103)，2．高阶微分(106)，§2.3 习题(107)。

§2.4 微分中值定理 ……(108)

1．两个引理(108)2．中值定理(110)，§2.4 习题(113)。

§2.5 罗必达法则 ……(114)

1．求“$\frac{0}{0}$”型不定型极限的法则(114)，2．求“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定型极限的法则(117)，3．求其他五种不定型极限(118)，§2.5 习题(119)。

§2.6 泰勒公式 ……(120)

1．泰勒公式(120)，2．基本初等函数的麦克劳林公式(122)，

3．利用有限展开式求不定型极限(125)，§2.6 习题(127)。

§2.7 利用导数研究函数的性质 ……(127)

1．函数的增减性(127)，2．函数的极值(129)，3．最大值与最小值(131)，4．函数的凸性(133)，§2.7 习题(136)。

§2.8 利用导数作函数的图形 ……(137)

1．曲线的渐近线(137)，2．作函数的图形(139)，§2.8习题(143)。

§2.9 参数方程所确定的函数的导数 ……(144)

1．平面曲线的参数方程(144)，2．参数方程所确定的函数的导数及作图例(150)，§2.9 习题(153)。

§2.10 方程的近似解 ……(154)

§2.10 习题(156)。

3．一元函数的积分学 ……(157)

§3.1 定积分的概念 可积函数 ……(157)

1．引出定积分的两个例子(157)，2．定积分的定义(159)，

3．函数的R可积性(161)，§3.1 习题(166)。

§3.2 定积分的性质 ……(166)

§3.2 习题(171)。
§3.3 原函数与不定积分 ……(172)
1. 原函数(172),2. 变上限的积分(172),3. 不定积分(174),4. 牛顿-莱布尼兹公式(175),5. 基本积分公式(175), §3.3 习题(179)。
§3.4 换元积分法 ……(181)
1. 不定积分的凑微分法(182), 2. 不定积分的变量变换法(185), 3. 定积分的情况(187), §3.4 习题(189)。
§3.5 分部积分法 杂例 ……(191)
1. 分部积分法(191), 2. 杂例(195), §3.5 习题(199)。
§3.6 有理函数与三角函数有理式的积分 ……(199)
1. 有理函数的积分(199), 2. 三角函数有理式的积分(203), §3.6习题(207)。
§3.7 简单无理函数的积分及其他 ……(208)
1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型积分($ad-bc\neq 0$)(208),
2. $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$型积分(209),
*3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型积分 ($b^2-4ac\neq 0$) (209),
4. 其他(211), §3.7 习题(212)。
§3.8 定积分的近似计算 ……(213)
1. 梯形公式(213), 2. 辛普生公式(抛物线公式)(214), §3.8 习题(216)。
§3.9 定积分在几何上的应用 ……(217)
1. 平面图形的面积(217), 2. 已知横截面面积的立体体积(221), 3.平面曲线的弧长与弧微分(224), 4. 旋转面的面积(230), 5. 平面曲线的曲率(233), §3.9 习题(235)。
§3.10 定积分在物理上的应用 ……(236)
1. 质心坐标(236), 2. 变力作功(240), 3. 水压力(242), §3.10习题(244)。
4. 空间解析几何 向量 ……(245)
§4.1 向量 直角坐标 ……(245)
1. 向量的概念(245), 2. 向量的线性运算(246), 3. 向量在数轴

上的投影(249)，4．空间直角坐标系(250)，§4.1 习题(256)。
§4.2 向量的数量积 向量积 混合积 ……(257)
1．数量积(257)，2．向量积(261)，3．混合积(265)，
§4.2 习题(267)。
§4.3 平面 ……(268)
1．平面方程(268)，2．特殊位置的平面方程(270)，3．点到平面
的距离(271)，4．平面的相互位置(272)，§4.3 习题(274)。
§4.4 直线 ……(275)
1．直线的方程(275)，2．直线与平面的关系(278)，3．直线间的
关系(280)，4．距离(281)，5．有轴平面束(283)，§4.4 习题(285)。
§4.5 几种常见的曲面 ……(287)
1．曲面、曲线的方程(287)，2．柱面方程(290)，3．旋转面(292)，
4．锥面(294)，5．直角坐标变换 常用二次曲面的图形(296)，
§4.5习题(305)。
§4.6 向量函数与空间曲线的参数方程 ……(306)
1．空间曲线的参数方程(306)，2．向量函数的导数(307)，
3．向量函数导数的物理意义与几何意义(310)，*4．空间曲线论的
基本公式(313)，§4.6 习题(319)。
5．矩阵 行列式 线性代数方程组……(320)
§5.1 矩阵及其运称 ……(320)
1．矩阵的概念(320)，2．矩阵的线性运算(323)，3．矩阵的
乘法(324)，4．转置矩阵(330)，§5.1 习题(332)。
§5.2 矩阵的分块 ……(333)
§5.2 习题(340)。
§5.3 逆阵与初等变换 ……(341)
1．逆阵(341)，2．初等变换与初等阵(344)，3．矩阵可逆的
充要条件(351)，4．用初等变换求逆阵(352)，§5.3 习题(354)。
§5.4 行列式及其性质 ……(356)
1．n阶行列式(356)，2．行列式的性质(362)，§5.4 习题(366)。
§5.5 行列式按行(列)展开 ……(368)
1．行列式按一行(列)展开(368)，*2．拉普拉斯展开定理(375)，

§5.5习题(377)。
§5.6 用行列式求逆阵 克莱姆法则 ……(380)
1. 用行列式求逆阵(380)，2. 克莱姆法则(382)，
§5.6习题(386)。
§5.7 向量组的线性无关 ……(387)
1. n 维向量(387)，2. 线性相关与线性无关(388)，3. 等价向量组(393)，4. 向量组的极大无关组与秩(396)，§5.7习题(398)。
§5.8 矩阵的秩 ……(399)
1. 矩阵的行秩、列秩与秩(399)，2. 秩的求法(402)，§5.8习题(408)。
§5.9 线性代数方程组 ……(409)
1. 高斯消元法(409)，2. 线性代数方程组解的结构(413)，
§5.9习题(421)。
6. 多元函数的微分学……(424)
§6.1 多元函数 极限 连继 ……(424)
1. n 维欧几里得空间(424)，2. $R^n \to R^m$ 的映射(428)，3. 多元函数的极限(430)，4. 多元函数的连续性(437)，§6.1习题(439)。
§6.2 偏导数 全微分 ……(441)
1. 偏导数(441)，2. 全微分(444)，3. 复合函数微分法(449)，
4. 曲面的切平面与法线(452)，§6.2习题(454)。
§6.3 高阶偏导数 泰勒公式 ……(455)
1. 高阶偏导数(455)，2. 高阶微分(459)，3. 泰勒公式(461)，
§6.3习题(464)
§6.4 隐函数及其微分法 ……(464)
1. 由一个方程确定的隐函数(464)，2. 由方程组所确定的隐函数(向量值隐函数)(468)，3. 空间曲线的切线与法平面(474)，
§6.4习题(476)。
*§6.5 向量值函数的微分法 函数的相关性 ……(477)
1. 向量值函数的微分法(477)，2. 函数的相关性(482)，
§6.5习题(484)。
§6.6 二元函数的极值 ……(484)
1. 二元函数的极值(484)，2. 条件极值——拉格朗日乘数法(489)，

3．最大值与最小值(493)，4．最小二乘法(494)，§6.6 习题(498)．
§6.7　曲面的参数方程 ……(499)
1．曲面的参数方程(499)，2．切平面(502)，*3．曲面的第一、第二基本形式(504)，§6.7 习题(507)．

习题答案 ……(509)

1 分析基础

数学分析的主要内容是微积分以及它的基本理论——极限理论。微积分是在17世纪由牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)创立，并在19世纪由波尔查诺(Bolzano, B.)、柯西(Ciuchy, A.-L.)、维尔斯特拉斯(Weierstrass, K)等数学家奠定严格的理论基础，这一理论基础就是极限理论。而极限理论又建立在实数理论的基础上。我们在承认实数理论的基础上直接讨论极限理论。

§1.1 实数集 函数

本节内容以后经常要用到，先集中介绍。其中部分内容在中学里已经学过，还有部分内容将在今后陆续给出证明。

1. 集合

具有某种特殊性质的一切事物组成的一个整体称为**集**(或称为**集合**)，这些事物的每一个都称这个集合的**元素**。若 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，称 a 不属于 A，记为 $a\in A$ 或 $a\notin A$。若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，称 A 是 B 的**子集**，记为，$A\subset B$，当 $A\subset B$ 并且存在元素 $x\in B$，而 $x\notin A$ 时，称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneq B$。不含任何元素的集合种为**空集**，记为 $\varnothing$。集合通常可以表示为：

$$X=\{x\,|\,x \text{ 所满足的性质}\},$$

也可用将元素列举的方法表示集合。

若 A,B 是两个集合，由 A 中的元素以及 B 中的元素的全体所成的集合称为 A，B 的**并**，记为 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元素所组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元素所成的集称为 A 与 B 的**差**，记为 $A - B$ 或 $A \backslash B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \in B\}.$$

2. 实数集

我们不讨论实数的严格定义，它涉及到实数理论. 直观地说，一切正、负有限十进制小数、零及无限十进制小数统称为实数，实数的全体所成的集记为 R，

$$\mathrm{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

数轴是规定了原点，单位长度及正方向的直线.

从中学所学的平面解析几何知道，实数的全体与数轴上的点一一对应，即对任一个实数 x，在数轴上存在唯一的点与之对应，因此，今后常将“数 a”说成“点 a”.

实数集的下列子集在大学数学中是经常用到的：

非负实数集　$\mathrm{R}_+ = \{0 \leqslant x < +\infty\}$；

有理数集　$\mathrm{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \middle| q \neq 0,\ p、q \text{ 既约整数}\right\}$；

非负有理数集　$\mathrm{Q}_+ = \{x \mid x \in Q, x \geqslant 0\}$；

整数集　$\mathrm{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$；

非负整数集　$\mathrm{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$；

自然数集　$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$；

开区间　$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$；

闭区间　$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

左开右闭区间　$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$；

左闭右开区间　$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

无穷区间 $(-\infty, +\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,

$(-\infty, a)=\{x\mid -\infty<x<a\}$,

$(-\infty, a]=\{x\mid -\infty<x\leqslant a\}$,

$(a, +\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$,

$[a, +\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$.

a 的 r 邻域 $U(a, r)=\{x\mid |x-a|<r\}$,简记为 $U(a)$.

a 的右 r 邻域 $U_+(a, r)=\{x\mid 0\leqslant x-a<r\}$,简记为 $U_+(a)$.

a 的左 r 邻域 $U_-(a, r)=\{x\mid -r<x-a\leqslant 0\}$,简记为 $U_-(a)$.

注：上述各集合所使用的记号是本书的习惯用法.

3. 数集的界与确界

实数是有序的,即任意两个实数 a, b 必须满足下列三个关系之一:

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

由于实数有序,可以定义实数集的上、下界,最大、最小值与上、下确界的概念.

若 X 为一个数集,m,M 为两个实数,如果对任意 $x\in X$ 有

$$x\leqslant M\ (x\geqslant m),$$

则称 $M(m)$为数集 X 的**上界(下界)**,并称数集 X 是**有上界**的(**有下界**的),否则称 X **无上界(无下界)**. 如果数集 X 既有上界又有下界,则称数集 X 是**有界**的. 无上界、无下界的数集统称为**无界集**.

如果 $M(m)$是数集 X 的上界(下界)且 $M\in X(m\in X)$,则称 $M(m)$为数集 X 的最大值(最小值).

数集 X 的最小上界称为数集 X 的**上确界**,记为 $\sup\limits_{x\in X}\{x\}$ 或 $\sup X$;数集 X 的最大下界称为数集 X 的**下确界**,记为 $\inf\limits_{x\in X}\{x\}$ 或 $\inf X$.

M 为数集 X 的上确界等价于以下两个条件:

1° M 是数集 X 的一个上界，即对任意 $x\in X$ 有 $x\leqslant M$。

2° M 是数集 X 的上界中的最小者，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使得 $x'>M-\varepsilon$。

同理，m 为数集 X 的下确界等价于以下两个条件：

1° 对任意 $x\in X$，有 $x\geqslant m$。

2° 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使得 $x'<m+\varepsilon$。

4. 逻辑符号

为便于数学分析中许多概念、命题的描述与推导，一个较好的途径是使用数理逻辑中的量词概念与量词符号，将数学内容符号化。这也能为学习大学数学中的难点——极限理论减少一些学习困难。量词有两种：

全称量词 即“任意”，“全体”，“所有”，记为 $\forall$。符号 $\forall$ 是将拉丁字母 A(英文单词 Any 的头一个字母)上下倒过来写。

存在量词 即“存在某个”，“有些个”，记为 $\exists$。符号 $\exists$ 是将拉丁字母 E(英文单词 Existence 的头一个字母)左右反转过来写。

例如，“$\forall x\in\mathrm{R}$”表示任意实数 x 或所有实数。“$\exists x_0\in\mathrm{R}$”表示 R 中存在某个实数 x_0，此处的 x 和 x_0 称为**量词变量**。

除了量词符号 $\forall$，$\exists$ 外，还常用以下逻辑符号。

“$\Leftrightarrow$”：充要条件或等价。从 A 可推出 B，又可从 B 推出 A，称A是B的充分必要条件，简称**充要条件**，或称 A 与 B 是**等价**的。

利用逻辑符号，“数集 X 有上界”可简写为

$$\text{“}\exists M\in\mathrm{R},\ \forall x\in X,\ \text{有 } x\leqslant M\text{”},$$

它由三个短句构成，其中短句

$$\text{“}x\leqslant M\text{”}$$

是量词变量 M，x 所具有的性质。

“数集X无上界”与“数集X有上界”是相互否定的概念。若数集 X 无上界，则找不到 M，使性质

$$\text{“}\forall x\in X,\ \text{有 } x\leqslant M\text{”}$$

能成立，这相当于 $\forall M \in \mathrm{R}$，性质

$$\text{“}\forall x \in X,\ \text{有 } x \leqslant M\text{”}$$

都不成立，而性质“$\forall x \in X$，有 $x \leqslant M$”不成立，在肯定语气下可用

$$\text{“}\exists x' \in X,\ \text{使 } x' > M\text{”}$$

描述。注意，这时量词由“$\forall$”换成了“$\exists$”，而性质“$x \leqslant M$”改为否定，即“$\leqslant$”换成了“$>$”。于是，在肯定语气下，“数集 X 无上界”可简写为

$$\text{“}\forall M \in \mathrm{R},\ \exists x' \in X,\ \text{使 } x' > M\text{”}.$$

综上可得，在肯定语气下，有

数集 X 有上界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathrm{R},\ \forall x \in X,\ \text{有 } x \leqslant M$
数集 X 无上界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathrm{R},\ \exists x' \in X,\ \text{使 } x' > M$

类似地有

数集 X 有下界 $\Leftrightarrow \exists m \in \mathrm{R},\ \forall x \in X,\ \text{有 } x \geqslant m$
数集 X 无下界 $\Leftrightarrow \forall m \in \mathrm{R},\ \exists x' \in X,\ \text{使 } x' < m$

数集 X 有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathrm{R}_+,\ \forall x \in X,\ \text{有 } \lvert x \rvert \leqslant M$
数集 X 无界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathrm{R}_+,\ \exists x' \in X,\ \text{使 } \lvert x' \rvert > M$

从上述例子可知，有上界与无上界、有下界与无下界、有界与无界，都是相互否定的概念。要得到一个用量词符号描述的命题的否定命题时，可遵循如下的三条规则(在数理逻辑中，它可以给出证明)：

1° 不改变原命题中语句的次序。

2° 把原命题中量词符号“$\forall$”换成“$\exists$”，“$\exists$”换成“$\forall$”(量词对偶法则)。

3° 把原命题中所有量词变量所具有的性质改成否定，即将“$\leqslant$”、“$<$”、“$\geqslant$”、“$>$”、“$=$”、“$\neq$”分别换成“$>$”、“$\geqslant$”、“$<$”、“$\leqslant$”、“$\neq$”、“$=$”。

这种方法今后在分析描述中将反复使用。

5. 常用的等式与不等式

本章以及后面的一些章节中，常用到一些重要的等式与不等式，为使用方便，现列举部分如下，大部分只给出证明的提示，有兴趣的读者，不妨自行验证。

1) 等式

(1) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ （数学归纳法）。

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ （数学归纳法）。

(3) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ （可用(2)推出）。

(4) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ （数学归纳法）。

(5) $1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}(q\neq 1)$。

(6) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$

其中 C 称为欧拉(Euler)常数(见 §1.4 例 2)。

(7) $\sin\varphi=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}$。

(8) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $\left(\text{由}\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}\right)$

2) 不等式

(1) 柯西不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意两组实数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

（提示：由 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2\geqslant 0,\ \forall x\in\mathrm{R}$，再用二次三项式 $ax^2+2bx+c(a>0)$ 对任意 x 均取非负值 $\Leftrightarrow b^2-ac\leqslant 0$）。

(2) 伯努利(Bernoulli)不等式

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的实数，则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

特别，$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (x>-1)$ （数学归纳法）。

(3) 三角不等式

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

这里 x 取弧度。

证 图 1.1 中曲线 Γ 是单位圆周，从图看出

$\triangle OAB$ 的面积

$<$扇形 OAB 的面积

$<\triangle OAC$ 的面积，

所以，$\sin x<x<\operatorname{tg} x$。

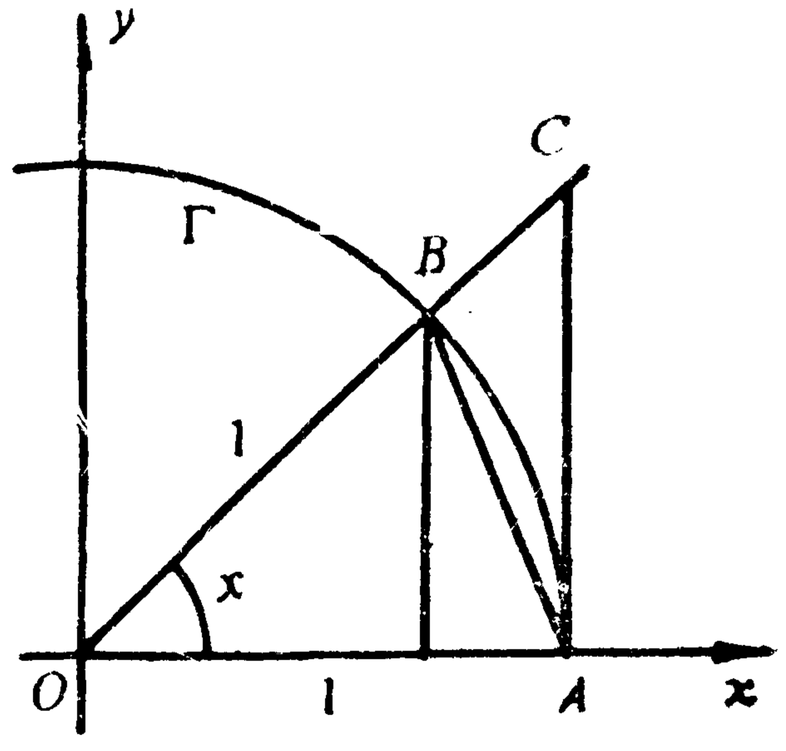


图 1.1

(4) 几何平均值≤算术平均值

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$，则

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A \quad (n\geqslant 2).$$

上式取等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时。

特别，$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$。

证明 不妨设 a_1，a_n 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小者和最大者，于是有 $a_1\leqslant A\leqslant a_n$，该式取等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，从而

$$A(a_1+a_n-A)-a_1a_n=(a_n-A)(A-a_1)\geqslant 0$$

即

$$A(a_1+a_n-A)\geqslant a_1a_n>0. \tag{1.1}$$

下面我们用数学归纳法来证明 $G\leqslant A$。

$n=2$时，$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$，显然成立。

设 $n-1$ 时成立，对 $n-1$ 个数 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_1+a_n-A$，有

$$\sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)}\leqslant\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_1+a_n-A}{n-1}$$

$$=\frac{nA-A}{n-1}=A,$$

即

$$a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)\leqslant A^{n-1}.$$

两边乘以 A，由(1.1)便得

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\leqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)A\leqslant A^n,$$

故 $G\leqslant A$ 对 $n\geqslant 2$ 成立，且该式取等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$.

(5) $(n!)^2\geqslant n^n$.

证 当 $n\geqslant k\geqslant 1$ 时，有 $(n-k)(k-1)\geqslant 0$，

即

$$k(n-k+1)\geqslant n,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

于是有

$$1\cdot n\geqslant n,\quad 2(n-1)\geqslant n,\ \cdots,n\cdot 1\geqslant n,$$

将上述 n 个不等式左右分别相乘即可得

$$(n!)^2\geqslant n^n.$$

(6) $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$. (§1.4 习题6)

(7) $$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

(本式取等号仅当 $n=1$ 时).

证 $n=1$ 时显然成立. $n>1$ 时，令

$$A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n},$$

由

$$A>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2n},$$

可得

$$A^2>\frac{1}{4n}\quad\text{即}\quad A>\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

再由

$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{(2n+1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{A}\frac{1}{(2n+1)}$$

可得

$$A^2<\frac{1}{(2n+1)}\quad\text{即}\quad A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

6. 映射　函数　数列

本段只介绍映射的部分概念，系统的讨论在第14章.

定义 1(映射) 设 X, Y 是两个非空集, D 是 X 中的子集, 若按照某一确定的法则 f, 对 D 上每一个元素 x, Y 中有**唯一**的元素 y 与 x 对应, 则称 f 是 D 到 Y 中的**映射**, 记为

$$f: D\to Y \quad 或 \quad x\mapsto f(x),\ x\in D\ (x\mapsto y=f(x),\ x\in D),$$

y 称为 x 在 f 下的**像**, x 称为 y 在 f 下的**原像**. 集合 D 称为映射 f 的定义域, 集合 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为映射 f 的值域. 如果 $f(D)=Y$, 则称 f 是**满映射**. 若对任意 x_1、$x_2\in D$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 是**单映射**, 若 f 既是满映射, 又是单映射, 则称 f 是**一一映射**.

函数是从实数集到实数集的映射, 详细定义如下:

定义 2(函数) 设 D 是非空实数集, 若按照某一确定的法则 f, 对 D 内每一个实数 x, 都有**唯一**实数 $y\in\mathrm{R}$ 与 x 对应, 则称 f **是定义在 D 上的**(一元实值)**函数**, 记为

$$f: D\to\mathrm{R} \quad 或 \quad x\mapsto f(x),\ x\in D\ (x\mapsto y=f(x),\ x\in D),$$

与数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**, 记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 数集 D 称为函数 f 的**定义域**, 函数值的集合称为函数的**值域**, 记为 $f(D)$, 即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}.$$

定义 2 所给出的函数都是指**单值函数**, 若与 D 中某些 x 对应的数值不止一个(甚至可能有无穷多个), 则称这样的函数为**多值函数**.

如果函数的定义域是自然数集 N, 对应法则为 f, 并且进一步将定义在自然数集 N 上的函数 $x_n=f(n)$ 中的因变量按自变量 n 增大的次序依次排列, 则得到数列.

定义 3(无穷数列) 按一定顺序排列的无穷个实数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n,\ x_{n+1},\ \cdots$$

称为**无穷数列**, 简称为**数列**, 记作 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为数列的**通项**, n 称为数列的下标. 若在数列 $\{x_n\}$ 中抽出无穷多项, 并按原来的**次序排列**, 构成一个新数列 $\{x_{n_k}\}$, 称 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的**子数列**.

自然数列 1，2，3，……与常数数列 a，a，a，……就是两个特殊的数列。

定义 4（单调数列） 对于数列$\{x_n\}$，如果

1° $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots\cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots\cdots$，则称$\{x_n\}$**广义递增**（或不减）；

2° $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots\cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots\cdots$，则称$\{x_n\}$**广义递减**（或不增）。

统称为**广义单调数列**。如果 1°，2° 中都是严格的不等号，则分别称为严格增、减数列，统称为**严格单调数列**。广义单调数列与严格单调数列统称为**单调数列**。

例 1 证明 (1) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是严格增数列；

(2) $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$是严格增数列；

(3) $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$是严格减数列。

证 (1) 用几何平均值≤算术平均值证明。

$$x_n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}。$$

所以$\{x_n\}$是严格增数列。

$$(2)\ y_n=1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=y_{n+1},$$

所以$\{y_n\}$是严格增数列。

$$(3)\ z_n=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{y_{n+1}}。$$

因为$\{y_n\}$是严格增数列，所以$\{z_n\}$是严格减数列。 □

定义 5（单调函数） 设 f 是定义在实数集 D 上的函数，如果 $\forall x_1, x_2 \in D$，当 $x_2 > x_1$ 时，恒有

1° $f(x_2) \geqslant f(x_1)$，则称 f 在 D 上**广义递增**(或不减)。

2° $f(x_2) \leqslant f(x_1)$，则称 f 在 D 上**广义递减**(或不增)。

统称为**广义单调函数**。如果 1°，2° 中都是严格的不等号，则分别称为**严格增、减函数**。统称为**严格单调函数**。广义单调函数与严格单调函数统称为**单调函数**。

中学里学过下列知识：

1) 函数的表示方法

函数有三种表示法：**列表法，图示法，解析表示法**(用数学公式表示函数)。

注意，函数的解析表达式可以是分段表示的，称这样的函数为**分段函数**。例如，**符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

它是用三段表示的，如图 1.2 所示。它的定义域是 $(-\infty; +\infty)$，值域是 $\{-1, 0, 1\}$。

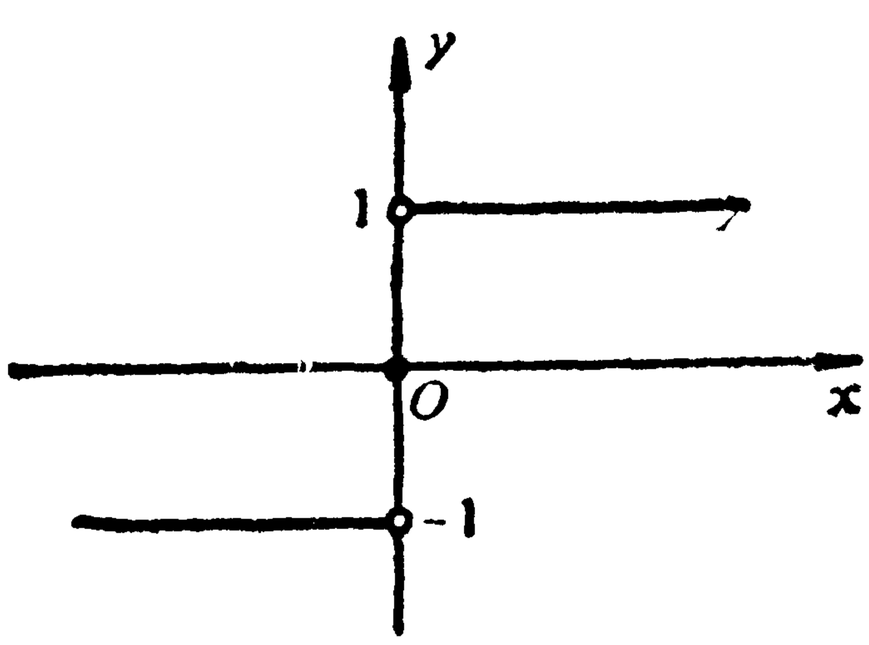


图 1.2

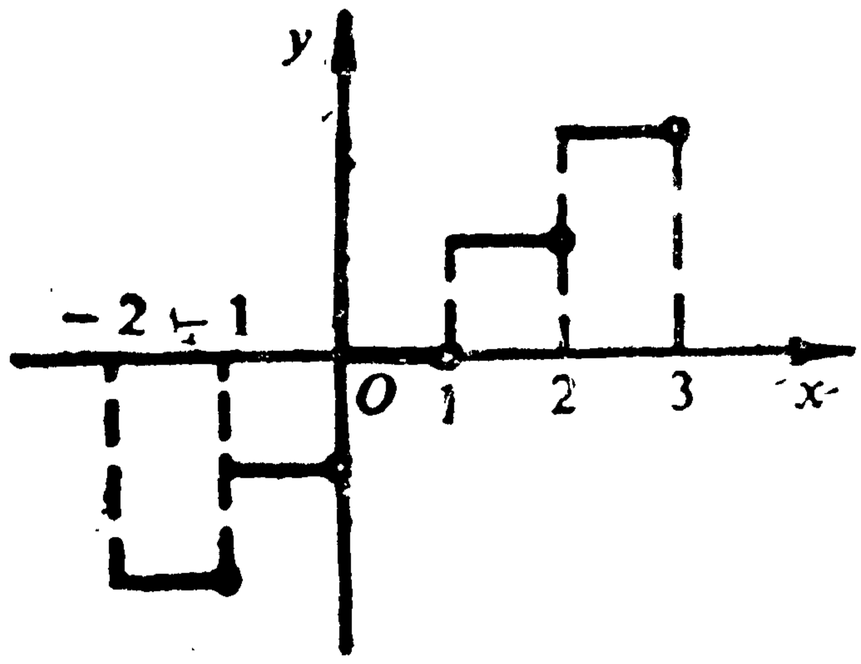


图 1.3

又如取整函数 $f(x) = [x]$，$[x]$ 表示 x 的整数部分，

$$y = [x] = n, \quad \text{当} \quad n \leqslant x < n+1 \quad (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots)$$

它的解析表达式不是有限个，如图 1.3 所示，其定义域是 $(-\infty,$

$+\infty)$，值域是 Z。

2) 复合函数

设有两个函数

$$\varphi: D \to U \qquad \text{和 } g: D_1 \to Y$$

$$x \mapsto u = \varphi(x),\ x \in D \qquad u \mapsto y = g(u),\ u \in D_1$$

如果 φ 的值域 $\varphi(D)$ 包含在 g 的定义域 D_1 中，即 $\varphi(D) \subset D_1$，则对于 D 上的每一个 x，通过中间变量 u，有唯一的实数 y 与 x 对应，这个对应关系称为 g 与 φ 的**复合函数**，记为 $g \circ \varphi$，即

$$g \circ \varphi: D \to Y$$

$$x \mapsto y = g \circ \varphi(x) = g(\varphi(x)),\ x \in D.$$

3) 反函数

设有函数 $f: D \to Y$，$x \mapsto y$，记 $V = f(D)$ 为 f 的值域，如果对每一个 $y \in V$，都存在唯一的 $x \in D$ 与 y 对应，则得到一个定义在 V 上以 y 为自变量，x 为因变量的新函数 φ，它的值域为 D，记为

$$\varphi: V \to D \qquad \text{或 } f^{-1}: V \to D$$

$$y \mapsto x = \varphi(y) \qquad y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

函数 f^{-1} 称为 f 的**反函数**。

注 这里所说的反函数都是指**单值的反函数**。如果对 V 中某些 y，有两个或两个以上的 $x \in D$ 与之对应，这时所得到的反函数是**多值反函数**。如无特别说明，凡提到函数与反函数都是指单值的。

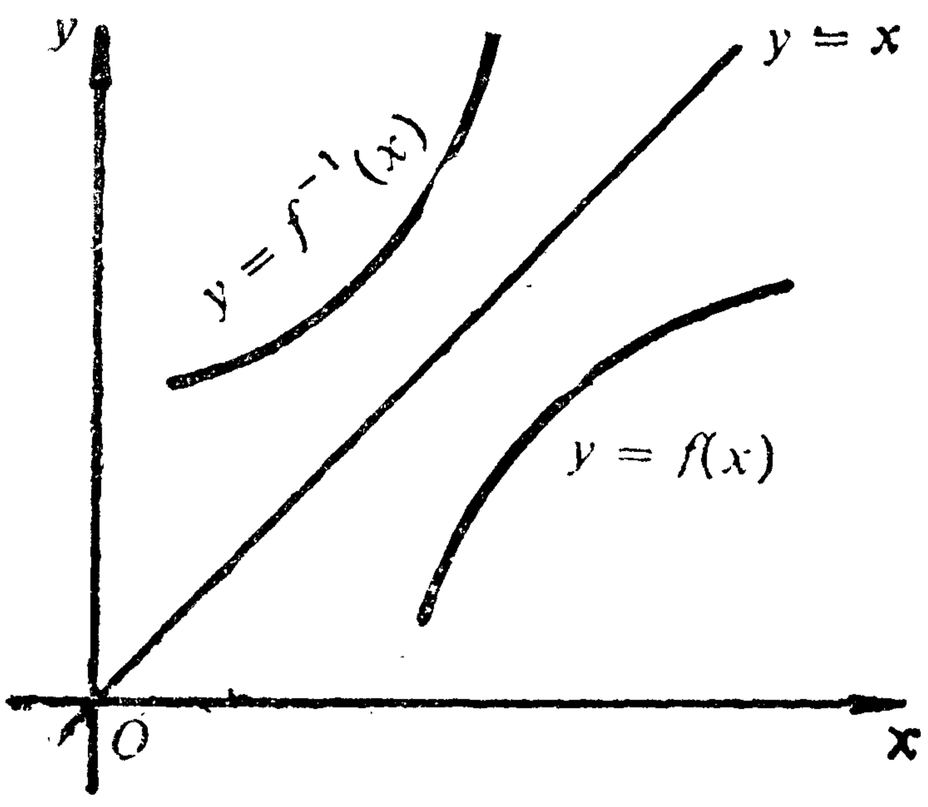


图 1.4

f 与它的反函数 f^{-1} 的图形对称于直线 $y = x$，如图 1.4 所示。

4) 基本初等函数、初等函数

常量函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数，称为**基本初等函数**。请

读者自己写出它们的解析表达式、定义域、值域，画出它们的草图，同时研究一下它们是否有对称性及周期性。

基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算得到的函数称为**初等函数**。

掌握函数与数列概念要注意以下几点：

(1) 函数有两个**要素**：**定义域**和**对应法则**。若两个函数的定义域与对应法则全部相同，这时不论记号如何，认为是同一个函数。如果两个函数的定义域或对应法则中有一个不同就认为是不同的函数。

(2) 数列与函数的概念是有区别的。数列可看做特殊的函数，但数列要求有一定的次序，即要求 x_n 按 n 增大的次序依次排列。

(3) 数列与集合概念也有区别。数列中的元素(即项)允许重复出现，集合中的元素不允许重复；数列中的元素有一定的次序，而集合中的元素是没有次序的。

(4) 许多常见教材及中学教材中称“y(或 $f(x)$)是x 的函数”，由于y(或 $f(x)$)也表示 x 处的函数值，这种定义方法有不足之处，它混淆了函数与函数值之间的区别。我们采用“**对应关系 f 是定义在数集 D 上的函数**”的说法，但今后为叙述方便，也常用“$f(x)$是定义在 D 上的函数”的说法，这时应理解为“f 在定义域 D 上的每一点 x 的值是 $f(x)$”。

§1.1 习　　题

1. 指出下列数集的上确界和下确界，最大值和最小值。

(1) $A=\left\{(-1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\,\middle|\,n\text{是自然数}\right\}$;

(2) $B=\left\{\dfrac{m}{n}\,\middle|\,n, n\text{是自然数}, n>m\right\}$;

(3) $C=\{x\,|\,x\in(0,1)\text{内的无理数}\}$;

(4) $D=[0,1]$;

(5) $E=\left\{\dfrac{1}{2^n}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}\right\}$;

(6) $F=\{\sin x$ 的值域集$\}$.

2. 用确界定义的两个等价条件严格证明第1题中各数集的确界.

3. 设下列的 $\inf\limits_{x\in X}\{x\}$, $\sup\limits_{x\in X}\{x\}$存在有限，求证：

(1) $\inf\limits_{x\in X}\{-x\}=-\sup\limits_{x\in X}\{x\}$;

(2) $\sup\limits_{x\in X}\{-x\}=-\inf\limits_{x\in X}\{x\}$;

(3) $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\{x+y\}=\sup\limits_{x\in X}\{x\}+\sup\limits_{y\in Y}\{y\}$;

(4) $\inf\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\{x\cdot y\}=\inf\limits_{x\in X}\{x\}\cdot\inf\limits_{y\in Y}\{y\}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

4. 证明：$\sup\limits_{x\in X}\{x\}\in X$ 的充要条件是 X 有最大值.

5. 试证下列等式.

(1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(2) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$;

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

6. 用数学归纳法证明伯努利不等式.

7. (1) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

(2) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$, 求 $f(x)$.

8. 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, 求 $f(g(x))$与 $g(f(x))$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$

求 $f(f(x))$与 $f(g(x))$.

10. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$; (2) $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$; (4) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

11. 求作下列函数的图形.

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$; (2) $y=|x-1|$;

(3) $y=-\dfrac{1}{2}x^3$; (4) $y=\sqrt[3]{x}$;

(5) $y=-x\cdot|x|$; (6) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

(7) $y=\operatorname{sgn}\sin x$。

12. 试作下列函数在原点 O 附近的图形。

(1) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{\sin x}{x}$。

13. 指出下列函数哪些有反函数？求出相应的反函数，并确定它们的定义域。

(1) $y=ax+b$；　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=(x-1)^3$；　　(4) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$。

§1.2　极限的概念

1. 数列的极限

数列极限主要讨论当自变量 n 无限增大时（记为 $n\to+\infty$ 或 $n\to\infty$），相应的因变量 x_n 的变化趋向。当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 可能无一定变化趋向，例如$\{(-1)^n\}$；可能无限增大，例如 $\{2^n\}$；也可能无限接近于某一定值 a，例如，

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\quad \left\{-\frac{1}{n}\right\},\quad \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\},\quad \left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\};$$

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\},\quad \left\{\frac{n-1}{n}\right\},\quad \left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\},\quad \left\{\frac{n+1+(-1)^n}{n}\right\}.$$

前面四个数列当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$无限接近于 0，后面四个数列当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$无限接近于1。当$n\to\infty$ 时，如果$\{x_n\}$无限接近于某定值，称$\{x_n\}$为**收敛数列**，否则称$\{x_n\}$为**发散数列**。用精确的数学语言描述，则有下面定义。

定义 1　（数列极限的 ε-N 定义）

设$\{x_n\}$是一个数列，如果有某一个实数 a，满足：对任给的正数 ε(不管多么小)，总存在自然数 N(N一般与 ε 有关)，使得

当 $n\in\mathrm{N}$，$n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，

则称$\{x_n\}$为收敛数列，且收敛于a，或称a是$\{x_n\}$的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a,\ n\to\infty .$$

不收敛于任何实数的数列称为发散数列。为了书写简便，将数列极限的“ε-N”定义简写为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ 有\ |x_n - a| < \varepsilon \tag{2.1}$$

这个定义只有四个短句，其中“$\forall\varepsilon>0$，有$|x_n-a|<\varepsilon$”刻划因变量x_n与a的**接近程度的任意性**。注意，切不可用一个确定的很小的数取代ε的任意性。而“$\exists N$，$\forall n>N$”却说明因变量x_n与a的任意接近是在n**充分大**之后实现的。不在乎何时开始实现$|x_n-a|<\varepsilon$，关键是这样的N必须存在。一般说来，ε愈小，N愈大。由

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow x_n \in U(a,\varepsilon)$$

可知式(2.1)的几何意义是：对任给的正数ε，$\exists N$，对大于N的一切n，x_n都在以a为心的ε邻域$U(a,\varepsilon)$中。如图1.5所示。

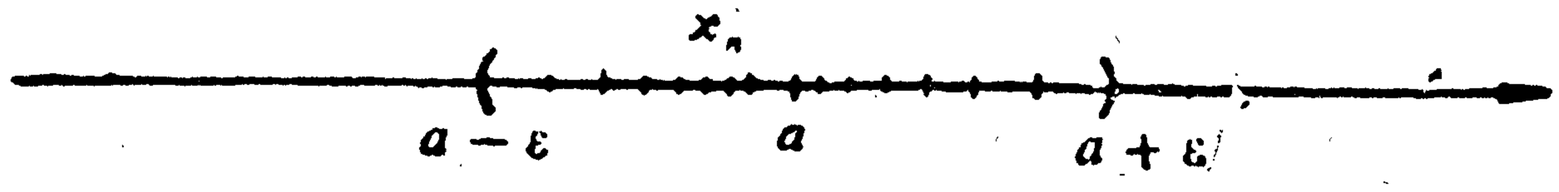


图 1.5

以零为极限的收敛数列特别重要，称之为**无穷小数列**。由式(2.1)易得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0 \tag{2.2}$$

即数列$\{x_n\}$以a为极限⇔数列$\{x_n-a\}$为无穷小数列⇔$\{|x_n-a|\}$为无穷小数列。

若$\{x_n\}$为发散数列，可能x_n无限增大发散到$+\infty$（称$\{x_n\}$为**正无穷大**），可能x_n无限减小发散到$-\infty$（称$\{x_n\}$为**负无穷大**），也

可能 x_n 的绝对值无限增大而发散到 ∞（称 $\{x_n\}$ 为**无穷大**），这三种发散情形，$\{x_n\}$ 都有一定的变化趋向，统称 $\{x_n\}$ 为**无穷大**. 还可能 $\{x_n\}$ 是没有一定变化趋向的振动情形，例如数列

$$\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots.$$

刻划变量 x_n 无限增大（减小）可用不等式

$$x_n > G, \quad (x_n < -G), \quad \forall G > 0,$$

其中 G 是不管多么大的正数. 因此，$\{x_n\}$ 为无穷大可用“G-N”语言表示为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall G>0, \exists N, \forall n>N, \text{有 } x_n>G \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall G>0, \exists N, \forall n>N, \text{有 } x_n<-G \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall G>0, \exists N, \forall n>N, \text{有 } |x_n|>G \tag{2.5}$$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n} = 1$.

证 任给 $\varepsilon>0$，欲

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

必须 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，因此，对任给 $\varepsilon>0$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1. \qquad \square$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，其中 $|q|<1$.

证 $q=0$ 时显然成立. 当 $q\neq 0$ 时，任给 $\varepsilon>0$，欲

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon,$$

必须要求

$$n \ln|q| < \ln\varepsilon,$$

由于 $\ln|q|<0$，故要求

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此，对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right|\right]$，当 $n>N$ 时有

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

即当 $|q|<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0. \qquad \square$$

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$(a>1)$.

证 用例 1、例 2 的方法，对 $\forall\varepsilon>0$，可直接找到 N 证明本例。现介绍另一种方法，即将 $|\sqrt[n]{a}-1|$ 用不等式适当放大后再找 N。令 $d_n=\sqrt[n]{a}-1>0$，由二项式展开取两项，得

$$a=(1+d_n)^n>1+nd_n,$$

于是

$$|\sqrt[n]{a}-1|=d_n<\frac{a-1}{n}.$$

欲 $|\sqrt[n]{a}-1|>\varepsilon$，只须

$$\frac{a-1}{n}<\varepsilon \quad 即 \quad n>\frac{a-1}{\varepsilon},$$

所以对上面所给 $\varepsilon>0$，只须取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1). \qquad \square$$

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 因为

$$n=(\sqrt[n]{n})^n=(1+(\sqrt[n]{n}-1))^n>\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

其中取了二项式展开式的第三项，所以

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

要$\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$，只须$n>1+\frac{2}{\varepsilon^2}$．因此，任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$，当$n>N$时，就有

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$ □

根据§1.1节第4段的三条规则，可得到命题

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ 有|x_n-a|<\varepsilon \tag{2.1}$$

的否定命题：

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq a\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N,\exists n'>N,使|x_{n'}-a|\geqslant\varepsilon_0 \tag{2.1}'$$

例5 试证数列$\{(-1)^n\}$不以1为极限．

证 对$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，在邻域$U\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$外有$\{(-1)^n\}$的无穷多项$x_{2k+1}=-1$，$k=1,\ 2,\ \cdots$，因此，$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对$\forall N$，取$n'=2N+1>N$时有

$$|x_n-1|=|-1-1|=2>\frac{1}{2}.$$ □

例6 证明$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}+\infty, & q>1,\\ \infty, & q<-1.\end{cases}$

证 $q>1$．任给$G>0$，欲$q^n>G$，相当于

$$n\ln q>\ln G,$$

只须$n>\ln G/\ln q$即可．取$N=[\ln G/\ln q]$，则当$n>N$时，有$q^n>G$成立，故$\lim_{n\to\infty}q^n=+\infty$．

$q<-1$．仿上可知，对任给$\varepsilon>0$，取$N=[\ln G/\ln|q|]$，则当$n>N$时，有$|q|^n>G$成立，故$\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$． □

2. 函数的极限

函数的极限研究函数在自变量的某变化过程中相应的因变量的变化趋向。与数列极限不同的是，数列极限的自变量只有一种变化趋向，即 $n\to+\infty$，而函数极限的自变量有下列六种变化趋向：

(1) 自变量 x 无限接近于某有限数 a，记为 $x\to a$；

(2) 自变量 x 小于 a 无限接近于某个有限数 a，记为 $x\to a-0$；

(3) 自变量 x 大于 a 无限接近于某个有限数 a，记为 $x\to a+0$；

(4) 自变量 x 无限增大趋于 $+\infty$，记为 $x\to+\infty$；

(5) 自变量 x 无限减小趋于 $-\infty$，记为 $x\to-\infty$；

(6) 自变量 x 的绝对值无限增大趋于 $+\infty$，记为 $x\to\infty$。

与数列极限的情形一样，函数在每种自变量的变化过程中，相应的因变量 $f(x)$ 的变化状况有 5 种不同的情形，我们将它们分成三类。

(1) **存在有限极限**(简称**极限存在**)：$f(x)$ 无限接近于某定值 A。

以下两类都称为**发散**。

(2) **无穷大**

1° **正无穷大**：$f(x)$ 无限增大趋于 $+\infty$，称 $f(x)$ 发散到正无穷大或 $f(x)$ 以 $+\infty$ 为极限。

2° **负无穷大**：$f(x)$ 无限减小趋于 $-\infty$，称 $f(x)$ 发散到负无穷大或 $f(x)$ 以 $-\infty$ 为极限。

3° **无穷大**：$f(x)$ 的绝对值无限增大趋于 $+\infty$，称 $f(x)$ 发散到无穷大或 $f(x)$ 以 ∞ 为极限。

(3) **振动** $f(x)$ 无一定变化趋向。

由上面讨论可知，关于数列与函数的极限，单是 x_n 或 $f(x)$ 有一定变化趋向的就各有 4 种(数列)及 24 种(函数)情形，我们没有必要将它们一一进行讨论，只要仔细考察一下数列极限的 "ε-N"

和"G-N"语言，就会启发我们，刻划"变量 X 与定值 A 无限接近"可用不等式

$$|X-A|<\varepsilon \quad 或 \quad |X-A|<\delta,$$

其中 ε, δ 为任意小正数；而刻划"变量 X 无限增大(减小)"可用不等式

$$X>H(X<-H) \quad 或 \quad X>G(X<-G),$$

其中 H, G 为任意大正数。于是，我们可以得到用"ε-H"，"ε-δ"，"G-H"，…等语言描述 f 的上述24种类型极限的定义，今仅举三种定义，读者可以举一反三给出其它各种类型函数极限的定义。

先给出当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to A$(有限数)的极限定义。

定义 2 (函数极限的"ε-H"定义)

设 f 是定义在$(b, +\infty)$上的函数①，A 为某一个实数。如果对任给的正数 ε(不管多么小)，总存在正数 H(H一般与 ε 有关)，使得

$$当\ x>H\ 时，恒有\ |f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 $x\to+\infty$ 时**存在有限极限** A，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A,\ 当\ x\to+\infty.$$

简写为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists H>0,\ \forall x>H,\ 有|f(x)-A|<\varepsilon \tag{2.6}$$

它的否定命题可以写为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall H>0,\ \exists x'>H,\ 使|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0 \tag{2.6}'$$

再给出当 $x\to a$ 时 $f(x)\to A$(有限数)的极限定义。

---

① 如果对于实轴增加点$+\infty$，$-\infty$，记 $\mathrm{R}^*=\mathrm{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$，则称$\mathrm{R}^*$为广义数直线 $+\infty$，$-\infty$为广义实数，$(b,+\infty)$，$(-\infty,-b)$ 分别称为$+\infty$，$-\infty$ 的邻域。

定义 3（函数极限的“ε-δ”定义）

设 f 是定义在点 a 的某邻域(a 可能除外) 上的函数，A 为一个实数，如果对任给的正数 ε(不管多么小)，总存在正数δ(δ一般与 ε 有关)，使得

$$\text{当 } 0<|x-a|<\delta \text{ 时，恒有 } |f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 $x\to a$ 时**存在有限极限** A，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A, \quad \text{当 } x\to a.$$

简写为

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\\ &\quad 0<|x-a|<\delta, \ \text{有}\ |f(x)-A|<\varepsilon\end{aligned}} \tag{2.7}$$

它的否定命题为

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a} f(x)\neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\exists x',\\ &\text{虽}0<|x'-a|<\delta, \text{但}\ |f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0\end{aligned}} \tag{2.7}'$$

注意，在论及函数 f 在 $x\to a$ 的极限时，考虑的是点 a 附近的性质，与函数 f 在点 a 是否有定义是毫无关系的，因此，函数 f 在点 a 可以没有定义。

定义 3 的几何意义是：对任给的 $\varepsilon>0$，作两条平行的水平直线 $y=A+\varepsilon$，$y=A-\varepsilon$，一定可以找到以 a 为心的去心 δ 邻域 $U(a,\delta)-\{a\}$，当 x 落在这个去心邻域中时，相应的点$(x, f(x))$必落在上述两条水平平行线所界的宽为 2ε 的窄条中(如图 1.6 所示)。

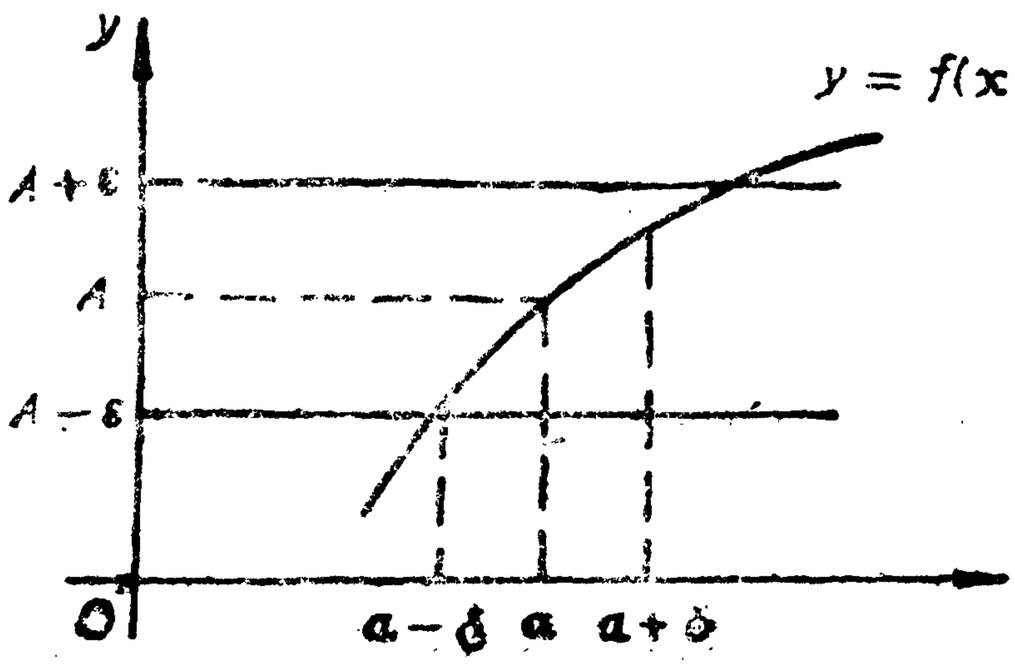


图 1.6

下面给出 $x\to a+0$ 时 $f(x)\to-\infty$ 的函数极限的定义。

定义 4 设 f 是定义在 a 的右邻域 $U_+(a)$ 上的

函数（点 a 可能除外），如果对任给正数 G（不论多么大），总存在正数 δ（δ 一般与 G 有关），使

$$\text{当 } 0<x-a<\delta \text{ 时，恒有 } f(x)<-G,$$

则称函数 f 当 $x\to a+0$ 时发散到 $-\infty$（有时也称 f 当 $x\to a+0$ 时以 $-\infty$ 为极限），记为

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to-\infty, \quad \text{当 } x\to a+0,$$

简记为

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\ \exists \delta>0,\\ &\qquad \forall x,\ 0<x-a<\delta,\ \text{有 } f(x)<-G\end{aligned}} \tag{2.8}$$

它的否定命题为

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a+0} f(x)\neq-\infty \Leftrightarrow \exists G>0,\ \forall \delta>0,\\ &\qquad \exists x',\ \text{虽 } 0<x'-a<\delta,\ \text{但 } f(x')\geqslant -G\end{aligned}} \tag{2.8}'$$

例 7 用“ε–δ”定义证明

(1) $\lim\limits_{x\to a} c=c$（c 为常数），　(2) $\lim\limits_{x\to a} x=a$，

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$，　(4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\dfrac{1}{10}$.

证 (1) 因为 $c-c=0$，故 $\forall\varepsilon>0$，任取一个 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，总有 $|c-c|=0<\varepsilon$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|x-a|<\delta=\varepsilon$.

(3) 函数 $\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，因而

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}\,|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

故对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{a}\,\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}\,|\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

(4) 因为 $x\to 5$，不妨设 $|x-5|<1$，即 $4<x<6$，而

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}\cdot\left|\frac{x-5}{x+5}\right|<\frac{|x-5|}{10(4+5)}=\frac{|x-5|}{90},$$

所以，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min(1,90\varepsilon)$，当 $0<|x-5|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|<\varepsilon.$$ □

例 8 用“ε-δ”定义证明

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1\quad(a>1)$.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，因为

$$|\sin x-\sin a|=\left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|<|x-a|$$

取 $\delta=\varepsilon$，故当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$(不妨取 $\varepsilon<1$)，要

$$|a^x-1|<\varepsilon,\quad 即\quad 1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

取 $\delta=\min(\log_a(1+\varepsilon),\ -\log_a(1-\varepsilon))$，故当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $|a^x-1|<\varepsilon$. □

例 9 用“ε-H”，“G-H”定义证明

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ +\infty, & a>1.\end{cases}$$

证 当 $0<a<1$，$\forall\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$)，要使

$$0<a^x<\varepsilon\quad 只要\quad x\ln a<\ln\varepsilon,$$

即 $x>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$. 取 $H=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，则当 $x>H$ 时有 $0<a^x<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=0.$$

当 $a>1$，$\forall G>0$，要 $a^x>G$，只要 $x>\log_a G$，取 $H=\log_a G$，则当 $x>H$ 时有 $a^x>G$，即

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$ □

3. 左极限　右极限

函数 f 当 $x\to a-0$、$x\to a+0$ 时存在有限极限 A 的情形特别重要，分别称为 f 在点 a 的左、右极限，统称为单侧极限.

定义 5（左、右极限）　设 f 是定义在 a 的左(右)邻域 $U_-(a)$ ($U_+(a)$)上的函数(点 a 可能除外)，A 为一个实数，如果对任给正数 ε(不论多么小)，总存在正数 δ，当 $-\delta<x-a<0(0<x-a<\delta)$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在点 a 存在**左(右)极限** A，记为

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A \quad 或 \quad f(a-0)=A \quad 或 \quad f(a-)=A,$$

$$(\lim_{x\to a+0} f(x)=A \quad 或 \quad f(a+0)=A \quad 或 f(a+)=A),$$

简写为

$$\boxed{\lim_{x\to a-0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ -\delta<x-a<0, 有\ |f(x)-A|<\varepsilon} \tag{2.9}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a+0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ 0<x-a<\delta, 有\ |f(x))-A|<\varepsilon} \tag{2.10}$$

定理 1（极限与单侧极限的关系）

函数 f 在点 a 存在有限极限 A 的充分必要条件是 f 在点 a 的左极限、右极限均存在，且都等于 A. 即

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow f(a-0)=f(a+0)=A} \tag{2.11}$$

证　"⇒"　设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 存在，则

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

而　　$0<|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta<x-a<0$　且　$0<x-a<\delta$，

因此有

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, -\delta<x-a<0$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, 0<x-a<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

故　$f(a-0)=A, f(a+0)=A$.

“$\Leftarrow$”　设 $f(a-0)=f(a+0)=A$，则

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall x, -\delta_1<x-a<0$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

$\exists \delta_2>0, \forall x, 0<x-a<\delta_2$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$，则

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, 0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

此即　$\lim\limits_{x \to a} f(x)=A$.　□

推论 1　若函数 f 在点 a 存在左、右极限但不相等，或者 f 在点 a 的左、右极限至少有一个不存在，则 f 在点 a 不存在极限.

请读者用反证法证明.

例 10　证明符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 当 $x \to 0$ 时极限不存在.

证　先证 $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)=1$. 事实上，对 $\forall \varepsilon>0$，取 δ 为任意正数，

则当 $0<x-0<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-1|=|1-1|=0<\varepsilon.$$

此即　$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)=1$.

类似可证 $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)=-1$，于是

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x),$$

故当 $x \to 0$ 时函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 的极限不存在.

例 11　证明取整函数 $f(x)=[x]$ 当 $x \to n(n \in Z)$ 时极限不存在.

证　先证 $\lim\limits_{x \to n+0} f(x)=n$. 事实上，对 $\forall \varepsilon>0$，取 δ 为小于 1 的任意正数，则当 $0<x-n<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-n| = |n-n| = 0 < \varepsilon,$$

此即 $\lim\limits_{x \to n+0} f(x) = n$.

类似可证 $\lim\limits_{x \to n-0} f(x) = n-1$，于是

$$\lim_{x \to n+0} f(a) \neq \lim_{x \to n-0} f(x),$$

故当 $x \to n$ 时函数 $f(x) = [x]$ 的极限不存在.

4. 数列极限与函数极限的关系

数列极限可以看成函数极限的特例，函数极限又可转化为数列极限来讨论，因为若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，**任意选取数列** $\{x_n\}$：$x_n \neq a$，$x_n \to a (n \to \infty)$，则有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

事实上，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x$，$0 < |x-a| < \delta$，有 $|f(x)-A| < \varepsilon$. 由 $x_n \to a (n \to \infty)$，$x_n \neq a$ 知，对上述 $\delta > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，有 $0 < |x_n - a| < \delta$，于是 $\forall n > N$，有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

上述命题的逆命题也是成立的. 因此我们有下面定理.

定理 2（数列极限与函数极限的关系）

设 f 是定义在 a 的某邻域（a 可能除外）上的函数，A 是一个实数，则有

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}: x_n \neq a, x_n \to a (n \to \infty), \text{有}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

证 “$\Rightarrow$”已在上面证得.

“$\Leftarrow$” 用反证法. 设 $\forall \{x_n\}$：$x_n \neq a$，$x_n \to a (n \to \infty)$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$，由 $(2.7)'$，$\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists x'$，虽 $0 < |x' - a| < \delta$，但 $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0$，于是，对每个 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$，$n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n' \neq a$，虽 $0 < |x_n' - a| < \dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n') - A| \geqslant \varepsilon_0$，因此，找到数列 $\{x_n'\}$：$x_n' \neq a$，$x_n' \to a (n \to \infty)$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') \neq A$. 与假设矛盾，故

有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$。 □

于是，函数极限可以用“数列语言”定义。

定义 6（函数极限的数列语言）

设函数 f 是定义在邻域 $U(a)$ 上（a 可能除外）的函数，A 为一个实数。如果对任意数列 $\{x_n\}$：$x_n\in U(a)$，$x_n\neq a$，$x_n\to a(n\to\infty)$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则称 f 当 $x\to a$ 时以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A。$$

注 对 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，以及 A 为 $+\infty$，$-\infty$，∞ 都有与定理2、定义 6 相应的定理与定义。

由定理 2 可得下面推论。

推论 2 设 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$ 是两个包含在 a 的去心邻域中且都收敛于 a 的数列，则当 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(x'_n)\}$ 极限存在但不相等，或其中至少有一个极限不存在时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在。

推论 2 为证明函数的极限不存在提供了简便的方法。

例 12 证明 $\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在。

证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$，$\{x'_n\}=\left\{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\}$，则 $x_n\neq 0$，$x_n\to 0(n\to\infty)$，$x'_n\neq 0$，$x'_n\to 0(n\to\infty)$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$，

于是，$\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在。 □

函数极限的数列语言定义也是一些理论证明的重要工具。

视数列为特殊的函数有下面推论。

推论 3 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A\Leftrightarrow\{x_n\}$ 的任一子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都以 A 为极限。

推论 3 也可以直接证明。

§1.2 习　　题

. 用"ε-N"定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} 0.99\cdots9\cdots=1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{2n^2+1}=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} e^n=+\infty$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a n=\begin{cases}+\infty, & \text{若 } a>1,\\ -\infty, & \text{若 } 0<a<1;\end{cases}$

*(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$, (提示: 利用不等式$(n!)^2\geqslant n^n$);

*(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$;

*(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.

2. 用函数极限的定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0+}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to0-}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, & \text{若 } a>1,\\ +\infty, & \text{若 } 0<a<1;\end{cases}$

(4) $\lim\limits_{x\to0+}\log_a x=\begin{cases}-\infty, & \text{若 } a>1,\\ +\infty, & \text{若 } 0<a<1;\end{cases}$

(5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=0$;

(7) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$;　　(8) $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$;

*(9) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;　　*(10) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{4x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$;

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

3. 用逻辑符号写出下列命题(表达式).

(1) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\infty$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq 2$;　　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\neq+\infty$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

求证 (1) 当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在；

(2) 当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

*5. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall x_n: x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty.$$

6. 证明：无界数列$\{x_n\}$必存在子数列$\{x_{n_k}\}$使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty$.

7. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}=a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=a$ 同时成立.

*8. 用"ε-N"语言证明推论 3：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Leftrightarrow \{x_n\}$的任一子数列都以 A 为极限.

*9. 函数 f 定义在$(0,1)$内为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ \dfrac{p}{q} \text{是最简分式.} \end{cases}$$

证明：若 $a\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

§1.3　极限的性质和运算法则

当函数或数列存在有限极限时，极限具有唯一性、保序性、夹逼性、函数的局部有界性(收敛数列的有界性)四条性质. 同时，极限运算还可与四则运算交换次序. 必须指出的是上述性质及运算法则对函数极限在其自变量 x 的六种极限过程及数列极限在 $n\to\infty$的极限过程都是同样成立的. 为节省篇幅，对极限的四条性质，有些仅就极限过程 $x\to a$(有限)和 $n\to\infty$ 叙述，并就一种或两种情形证明. 对其余极限过程的叙述和证明，有兴趣的读者可自行练习.

1. 存在有限极限的函数之局部性质

以下为统一写法，用 X，Y 代表因变量 x_n 或 $f(x)$，而“lim”代表某同一过程的极限.

定理 1（极限的唯一性） 设 $\lim X=A$，$\lim X=B$，A，B 为有限数，则 $A=B$.

证 就 $X=f(x)$，$x\to a$ 的情形用反证法证明. 若 $A\neq B$，不妨设 $A<B$，则对 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\exists\delta_1>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta_1$，有 $f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{B+A}{2}$；由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$，$\exists\delta_2>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta_2$，有 $f(x)>B-\varepsilon=\dfrac{B+A}{2}$，令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，于是，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta$，有

$$\frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}\quad\text{矛盾.}\qquad\square$$

定义 1（函数的有界性） 设 f 是定义在实数集 $D\subset R$ 上的函数，若存在常数 $K(L)$，使 $f(x)\leqslant K(\geqslant L)$，$\forall x\in D$，则称函数 f 在 D 上**有上界**(有下界)，否则称 f 在 D 上**无上界**(无下界)，若

$$L\leqslant f(x)\leqslant K,\quad\forall x\in D,$$

则称函数 f 在 D 上**有界**，记为 $f(x)=O(1)$，$x\in D$. 函数 f 在 D 上有界等价于存在实数 $M\geqslant 0$，使

$$|f(x)|\leqslant M,\quad\forall x\in D,$$

否则称 f 在 D 上**无界**，简写为

$$\boxed{f\text{ 在 }D\text{ 上有界}\Leftrightarrow\exists M\geqslant 0,\forall x\in D,\text{有}|f(x)|\leqslant M}\qquad(3.1)$$

$$\boxed{f\text{ 在}D\text{上无界}\Leftrightarrow\forall M\geqslant 0,\exists x'\in D,\text{使}|f(x')|>M}\qquad(3.2)$$

若存在 a 的一个 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 使 f 在 $U(a,\delta)$（f 在 a 可能无定义，故 a 可能除外）上有界，称函数 f 在 **a 点附近有界.**

定义 2（有界数列） 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果存在实数 $M>$

0，使

$$|x_n|\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**有界数列**.

定理 2（局部有界性） 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$（有限数），则函数$f$在$a$点附近有界.

证 对$\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta$，有$|f(x)-A|<1$，由此有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,\quad \forall x\in U(a,\delta)-\{a\}$$

故f在点a附近有界. □

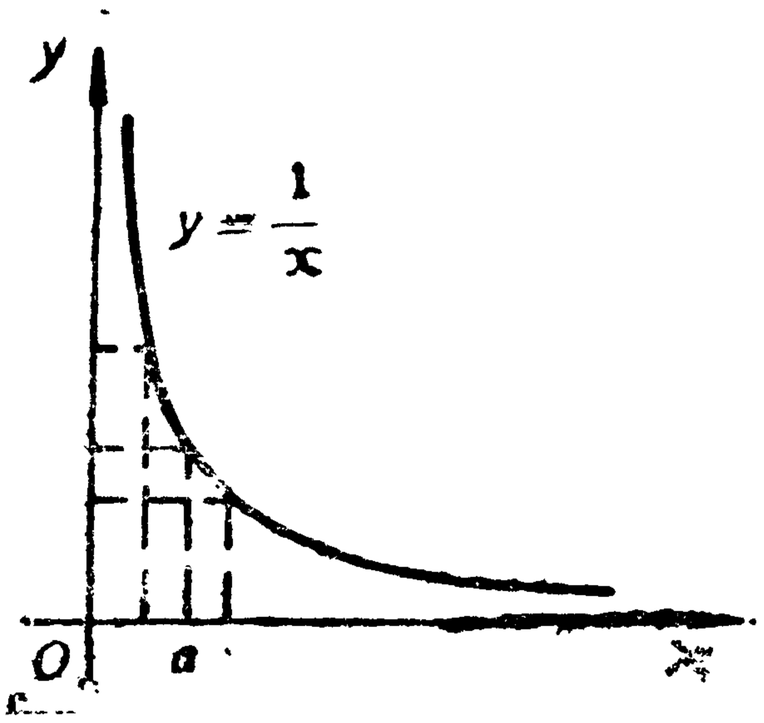


图 1.7

注意，由$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$不能推出函数$f$在其定义域上是有界的.例如函数$f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$上的任一点$a$存在有限极限$\frac{1}{a}$，因此函数$f(x)=\frac{1}{x}$在任何一点$a>0$的某个邻域内是有界的，但它在$(0,+\infty)$内是无界的(如图 1.7 所示).

定理 2′（收敛数列的有界性） 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$存在有限，则$\{x_n\}$是有界数列.

证 对$\varepsilon=1$，$\exists N$，$\forall n>N$，有$|x_n-a|<1$，由此有

$$|x_n|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|,\ \forall n>N.$$

令$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则有

$$|x_n|\leqslant M,\ n=1,2,\cdots,$$

故$\{x_n\}$是有界数列. □

定理 3（保序性） 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，$A$，$B$为有限数.

1° 若$A<B$，则存在a的某去心δ邻域$U(a,\delta)-\{a\}$，在

该邻域内有 $f(x)<g(x)$.

2° 若在 a 的某去心 δ 邻域内有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$.

证 1° 类似于定理 1 的证明，取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$ 则 $\exists\delta>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta$，有

$$|f(x)-A|<\frac{B-A}{2},\quad |g(x)-B|<\frac{B-A}{2},$$

即

$$f(x)<A+\frac{B-A}{2}=\frac{B+A}{2}=B-\frac{B-A}{2}<g(x),$$

故对 $\forall x\in U(a,\delta)-\{a\}$，有

$$f(x)<g(x).$$

2° 利用反证法及 1° 即可证得. □

注意，2° 中即使 $f(x)<g(x)$ 也不能推出 $A<B$. 例如，对函数 x^2 与 x^4，有 $x^4<x^2$，$\forall x\in U(0,1)-\{0\}$，但 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^4=0$.

推论 1（保号性质） 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（有限）.

1° 若 $A>C(A<C)$，则存在 a 的邻域 $U(a,\delta)$，当 $x\in U(a,\delta)-\{a\}$ 时，$f(x)>C(f(x)<C)$.

2° 若对一切 $x\in U(a,\delta)-\{a\}$，有 $f(x)\geqslant C(f(x)\leqslant C)$，则 $A\geqslant C(A\leqslant C)$.

证 在定理 3 中取 $g(x)=C$，即得证. □

定理 3′（保号性质） 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>p(A<q)$，则存在 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>p(x_n<q)$.

请读者自行证明.

注 定理 2，定理 3 对 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$ 同样成立.

定理 4（夹逼法则） 设 $X\leqslant Z\leqslant Y$，如果 $\lim X=\lim Y=A$，则 $\lim Z=A$.

2. 极限的四则运算

定理 5（收敛数列的四则运算） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, a, b, c 为有限数，则

1° $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$,

2° $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = ca$,

3° $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$,

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

证 1° 仅证“+”情况。由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1,\ \forall n > N_1,\ \text{有}\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists N_2,\ \forall n > N_2,\ \text{有}\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, $\forall n > N$, 有

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2° 若 $c = 0$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} (0 \cdot x_n) = 0 \cdot a = 0$.

若 $c \neq 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$ 有 $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$, 于是, $\forall n > N$, 有 $|cx_n - ca| = |c|\,|x_n - a| < \varepsilon$, 故

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = ca.$$

3° $0 \leqslant |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab|$

$$\leqslant |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|.$$

由 $\{y_n\}$ 收敛知 $\{y_n\}$ 有界，即存在常数 $M > 0$, 使得 $|y_n| \leqslant M (n = 1, 2, \cdots)$, 于是

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M |x_n - a| + |a|\,|y_n - b|.$$

由式(2.2)，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}|y_n-b|=0$，再由2°，1°及夹逼法则得到

$$\lim_{n\to\infty}|x_ny_n-ab|=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab.$$

4° $$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|x_nb-ab+ab-ay_n|}{|b\cdot y_n|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|by_n|}(|b||x_n-a|+|a||y_n-b|).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}by_n=b^2$，即对 $\varepsilon_0=\frac{b^2}{2}>0$，存在$N$，当$n>N$时，有 $by_n>b^2-\frac{b^2}{2}=\frac{b^2}{2}$，从而当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{2}{b^2}(|b||x_n-a|+|a||y_n-b|)\to0\quad(n\to\infty),$$

由夹逼法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}.$$ □

定理 6（函数极限的四则运算） 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，A，B，C 为有限数，则

1。 $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B$，

2° $\lim(C\cdot f(x))=CA$，

3° $\lim(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$，

4° $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0)$。

证 就极限过程 $x\to a$ 的情形用函数极限的数列语言定义证明 4°，其余可以类似证明。

由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ 知，对任意数列 $\{x_n\}$：$x_n\neq a$，$x_n\to a(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=B$。由定理 5 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B}$，于是，对函数 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，$\forall\{x_n\}$：$x_n\neq a$，$x_n\to$

$a(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)=\dfrac{A}{B}$，再对函数 h 当 $x\to a$ 时的极限用数列语言定义得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$ □

注 1 定理 6 对 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$时可类似证明.

注 2 定理 5，定理 6 说明，存在有限极限时，极限运算与四则运算可以交换运算次序.

3. 无穷小量及其性质

存在有限极限的变量中，有一种类型特别重要，即以零为极限的变量，称之为无穷小量.

定义 3（无穷小量） 在某一极限过程中，以零为极限的变量 X（数列或函数）称为该极限过程中的**无穷小量**，常称为无穷小，记为 $X=o(1)$. 例如，

$$x_n=o(1),\quad n\to\infty,\quad 指\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

$$f(x)=o(1),\quad x\to a,\quad 指\lim_{x\to a}f(x)=0,$$

$$f(x)=o(1),\quad x\to+\infty,\quad 指\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

定理 7 在同一极限过程中，下列关系是成立的.

1° 变量 X 以数 A 为极限的充要条件是 $X-A$ 为无穷小量，因此

$$\boxed{\lim X=A\Leftrightarrow X=A+Y,\quad \lim Y=0}\qquad(3.3)$$

2° 无穷大量的倒数是无穷小量.

3° 非零无穷小量的倒数是无穷大量.

4° 两个(从而有限个)无穷小量的代数和是无穷小量.

5° 两个(从而有限个)无穷小量的积是无穷小量.

6° 无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量.

证 仅以 $X=f(x)$，$x\to a$ 的情形证明 3°、6°。

3° 设 $X=f(x)$，$x\to a$ 时为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，欲证 X 的倒数 $Y=\dfrac{1}{X}=\dfrac{1}{f(x)}$ 当 $x\to a$ 时为无穷大量。对 $\forall G>0$，因 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，则对 $\varepsilon=\dfrac{1}{G}$，$\exists\delta>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta$，有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

由 $f(x)\neq 0$ 知 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有定义，因此，

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=G,\quad \text{即}\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

6° 设 $x\to a$ 时，f 为无穷小量，g 是在 a 的某去心邻域 U 上的有界函数。欲证 $f\cdot g$ 当 $x\to a$ 时为无穷小量。

事实上，由于 g 是在 a 的某去心邻域 U 上的有界函数，$\exists r>0$，$M>0$，当 $0<|x-a|<r$ 时，有 $|g(x)|\leqslant M$。对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\exists\delta_1>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta_1$，有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min(r,\delta_1)$，于是，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)g(x)|=|f(x)|\,|g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{x\to k} f(x)g(x)=0.\qquad\square$$

由定理 7 的 1° 可知，存在有限极限的变量与无穷小量都可归结为无穷小量来讨论，以后要学习的微分、积分，无穷级数等概念也都与无穷小量密切相关，因此，分析学有时也称为无穷小分析。

4. 复合函数的极限

本段介绍极限中的变量替换，即复合函数的极限。

定理 8（复合函数的极限） 若函数 $y=g(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 在点 a 的邻域（a 可能除外）能构成复合函数：

$f=g\circ\varphi$：$f(x)=(g\circ\varphi)(x)=g(\varphi(x))$，$x\in U(a)-\{a\}$，

设

1° $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$，且 $x\neq a$ 时 $\varphi(x)\neq b$，

2° $\lim\limits_{u\to b}g(u)=A$ （有限），

则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(\varphi(x))$存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(\varphi(x))=\lim_{u\to b}g(u).$$

证 任给 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{u\to b}g(u)=A$ 知

$$\exists\delta_1>0,\ \forall u,\ 0<|u-b|<\delta_1,\ \text{有}\ |g(u)-A|<\varepsilon.$$

由 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$，则对上述 δ_1，

$$\exists\delta>0,\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta,\ \text{有}\ |\varphi(x)-b|<\delta_1.$$

因此，由条件当 $x\neq a$ 时 $\varphi(x)\neq b$ 知，

$$\forall x,\ 0<|x-a|<\delta,\ \text{有}\ 0<|\varphi(x)-b|=|u-b|<\delta_1,$$

从而 $|g(u)-A|<\varepsilon$. 于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x$，$0<|x-a|<\delta$，

有 $|g(u)-A|<\varepsilon$，即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$ □

注 定理 8 中若 $A=+\infty(-\infty)$也是成立的.

例 1 用极限运算法则求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$ $(a>0)$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ $(a_n,\ b_m\neq0)$.

解 (1)因为

$$\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}},$$

$$\therefore\quad \text{原式}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2^n}}}=2.$$

(2) 若 $0<a<1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+1)}=0;$$

若 $a=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{1}{2}$;

若 $a>1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a^n}}=1$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n-m}\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}$

$$=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

例 2 用夹逼法则求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}$, 其中 k 是确定正整数, $a_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,k$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 (1) 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(2) 记 $C=\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, 则有

$$\sqrt[n]{C^n} < \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{kC^n} = C\sqrt[n]{k}\,.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} C\sqrt[n]{k} = C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = C$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = C.$$

(3) 因为

$$\begin{aligned}
&\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right| \leqslant \frac{2}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x > 1,
\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$（§1.2 习题 2-(11)），所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0.$$

例 3 设$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}| \leqslant q|x_n|$，$n \geqslant n_0$，其中$0<q<1$，$n_0$是某固定的正整数，特别，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = r < 1$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；并利用此结果计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n$ $(|a|<1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ (a是常数)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\mu}{a^n}$ ($a>1$，$\mu>0$是常数)。

证 对任意 $n \geqslant n_0$，有 $n = n_0 + k$，因此，$n\to\infty$相当于 $k\to\infty$。

而

$$0 < |x_n| \leqslant q|x_{n_0+k-1}| \leqslant q^2|x_{n_0+k-2}| \leqslant \cdots\cdots \leqslant q^k|x_{n_0}|,$$

因为 $0<q<1$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$，因此 $\lim\limits_{k\to\infty} q^k|x_{n_0}| = 0$，

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

特别，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=r<1$，则 $\forall\varepsilon,0<\varepsilon<1-r,\exists n_0>0,\ \forall n>n_0$，有 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|<r+\varepsilon=q<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

计算：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(n+1)a^{n+1}|}{|na^n|}=|a|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$。

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\dfrac{n!}{a^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|}{n+1}=0<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

(3) 当 μ 为正整数时，由极限的四则运算法则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^\mu}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^\mu}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu=\frac{1}{a}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\mu}{a^n}=0.$$

当 $\mu>0$ 非正整数时，取 $k=[\mu]+1$，则

$$0<\frac{n^\mu}{a^n}<\frac{n^k}{a^n},$$

用夹逼法则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\mu}{a^n}=0.$$ □

§1.3 习　　题

1. 下列变量中哪些是无穷大量？哪些是无穷小量？哪些两者都不是？

(1) $(-1)^n n,\ n\to\infty$；　　(2) $n^{(-1)^n},\ n\to+\infty$；

(3) $\dfrac{1+(-1)^n}{2},\ n\to\infty$；　　(4) $q^n,\ n\to+\infty$，q 为实数；

(5) $x\sin\dfrac{1}{x},\ x\to0$；　　(6) $e^x\sin x,\ x\to\pm\infty$；

(7) $e^x(2+\sin x),\ x\to+\infty$。

2. 求下列单侧极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{|x|}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0\pm}e^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$;

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0\pm}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}f(x)$, 并画出 $f(x)$的草图.

3. 下列极限是否存在？若极限存在，求出极限值；若极限不存在，说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

4. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}((1+r)(1+r^2)(1+r^4)\cdots\cdot(1+r^{2^n}))$, $|r|<1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

5. 用夹逼法则和数列极限的运算法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2n\pi}{3n+1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cos n!}{n^{3/2}+1}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+(-1)^n n}{6n^2+n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\sqrt{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$ $(a>0, a\neq 1)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0 n^k+a_1 n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0 n^m+b_1 n^{m-1}+\cdots+b_m}$ $(a_0, b_0\neq 0, k, m$ 为自然数且 $k\leqslant m)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt[3]{x}-x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$ (n 为正整数)；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (m, n 为正整数)；

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

*7. 设 $a>1$，试证：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{a^x}=0(\mu>0)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\mu}=0(\mu>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}x^\beta\log_a x=0(\beta>0)$.

*8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，且 A, B 为有限数，试证 $A=B$.

*9. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (有限)，试证存在 $+\infty$ 的邻域 $(b, +\infty)$，使函数 f 在 $(b, +\infty)$ 上有界.

*10. 试证定理 3′：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>p$，则存在 N，当 $n>N$ 时 $x_n>p$.

*11. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$(有限)，且存在 N，当 $n>N$ 时有 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$.

*12. 试就点 a 的右极限情形叙述并证明夹逼法则.

*13. 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=A$（有限），且$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，$x\in(-\infty,-b)$，试证 $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=A$。

*14. 若 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a-0}g(x)=B$，$A$，$B$为有限数，试证

$$\lim_{x\to a-0}(f(x)+g(x))=A+B,\ \lim_{x\to a-0}(f(x)g(x))=AB。$$

§1.4 极限的存在准则

1. 实数系的连续性

实数集与数轴是一一对应的，而数轴是一条没有空隙的连续的直线，因此可以认为有序的实数集所成的实数系也是连续的，这是实数系连续性的几何直观描述．但它不能为分析学的推演提供逻辑工具．由于任何实数都是有限和无限十进小数，因此，每一个实数 a 都可用一列不断增加而又小于a的有限小数数列$\{a_n\}$逼近，同时还可用一列不断减少而又大于 a 的有限小数数列$\{b_n\}$逼近．即每一个实数 a 都可用两个有理数列左右逼近．例如，$\sqrt{2}$ 可用它的不断增加的不足近似有限小数数列与不断减少的过剩近似有限小数数列

$\{a_n\}$：1，1.4，1.41，1.414，1.4142，…，

$\{b_n\}$：2，1.5，1.42，1.415，1.4143，…，

左右逼近．一般说，每个实数可用两个实数数列左右逼近．这个思想可以叙述为下面的实数系连续性原理：

实数系连续性原理 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个实数数列，满足下列条件：

1° $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots$，

$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant b_{n+1}\geqslant\cdots$，

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，即 a_n 与 b_n 不断逼近，

则存在唯一的实数 c，使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$，即$\{a_n\}$与$\{b_n\}$分别从

左右逼近 c。

实数系连续性原理可以写成下面的区间套定理。

定理 1（区间套定理） 设$\{[a_n, b_n]\}$是一列闭区间，满足条件：

1° $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$，

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则存在唯一实数 c，$c \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

满足条件 1°，2° 的一列闭区间称为**闭区间套**。区间套定理的几何直观意义是：一列长度趋于零的闭区间套$\{[a_n, b_n]\}$必存在唯一的公共点 c。

注 在区间套定理中，若把闭区间列改为开区间列，其余条件不变，结论不一定成立。例如，对开区间列$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$并不存在属于一切开区间$\left(0, \frac{1}{n}\right)(n = 1, 2, \cdots)$的公共点。

区间套定理用分析语言描述了实数系的连续性，它反映了实数轴是没有洞(空隙)的。现代分析中称之为**完备性**。完备性是使求极限这一分析运算能封闭的必备条件。如果我们在实数轴上挖去一点 x_0，这时极限运算的封闭性就不能保证。例如，数列$\left\{a_n = x_0 + \frac{1}{n}\right\}$，$\left\{b_n = x_0 - \frac{1}{n}\right\}$的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 就不存在，因为此时极限值 $x_0 \in \mathrm{R} - \{x_0\}$。除区间套定理外，数学分析中刻划实数系连续性的等价定理还有确界定理、数列的单调有界定理、柯西收敛原理、狄德金定理。本节先介绍确界定理与单调有界定理，而柯西收敛原理将在 §7.2 第 3 段引进。

2. 确界定理　单调有界定理

在§1.1第 3 段已介绍了数集 A 的上确界和下确界的概念，下面用区间套定理证明用分析语言描述实数系连续性(完备性)的另

一等价定理。

定理 2（上确界存在定理） 非空有上界的数集 A 必有上确界。

***证** 用区间套定理证明。设数集A有上界b_1，由 A 非空，任取 $a_1 \in A$，将区间$[a_1, b_1]$二等分，分点为 c_1，如果 c_1 也是 A 的上界，将区间$[a_1, c_1]$记为$[a_2, b_2]$，如果c_1不是A的上界，将区间$[c_1, b_1]$记为$[a_2, b_2]$，不论那一种情况，$[a_2, b_2]$中必含有A中的数，并且右端点b_2是A的一个上界。再将$[a_2, b_2]$二等分，分点c_2，c_2 也有两种可能，重复上面的步骤，得$[a_3, b_3]$，$[a_3, b_3]$ 中必含有 A 中的数，并且右端点 b_3 是 A的一个上界。

将这个步骤继续下去，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，满足：

1° $[a_n, b_n]$中有 A 的数，并且右端点 b_n 是 A 的一个上界，$(n=1, 2, \cdots)$；

2° $\{[a_n, b_n]\}$满足区间套定理条件，

故存在唯一的实数 c，使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

下证 c 就是A的上确界。事实上，由1°，对一切 $n=1, 2, \cdots, b_n$ 都是 A 的一个上界，因此

$$x \leqslant b_n, \quad \forall x \in A,$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ 及极限的保序性，有

$$x \leqslant c, \quad \forall x \in A, \tag{4.1}$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$，故对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists a_{n_0} > c - \varepsilon$，但$[a_{n_0}, b_{n_0}]$中必有 A的数，设它为 x_{n_0}，即 $x_{n_0} \in [a_{n_0}, b_{n_0}] \cap A$，于是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_{n_0} \in A, \text{使 } x_{n_0} \geqslant a_{n_0} > c - \varepsilon, \tag{4.2}$$

由式(4.1)，(4.2)可得 $c = \sup A$。 □

注 1 非空有下界的数集必有下确界。

注 2 若非空数集A无上界(无下界)，约定A的上确界为 $+\infty$ (下确界为 $-\infty$)。

定理 3（数列的单调有界定理） 单调有界数列必存在有限极限：

1° 单调递增有上界数列必存在有限极限；

2° 单调递减有下界数列必存在有限极限。

证 仅证 1°. 设$\{x_n\}$是单调递增且有上界的数列，由确界定理知，数集 $A=\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$必存在上确界 C，下证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = C.$$

由上确界的定义知，(1) $x_n \leqslant C(n=1,2,\cdots)$；(2) 对任给 $\varepsilon>0$，$\exists x_N \in A$，使得 $C-\varepsilon<x_N$，再由$\{x_n\}$是单调递增的，知 $\forall n>N$，有 $x_N \leqslant x_n$，从而有

$$C-\varepsilon<x_N \leqslant x_n \leqslant C<C+\varepsilon, \quad \forall n>N,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = C. \qquad \square$$

记 I为R上的一个或开或闭或半开半闭或有限或无穷的区间。

定理 4（函数的单调有界定理） 设 f 是定义在区间 I 上的单调有界函数，则 f 在 I 上的任一点都存在有限的单侧极限（左端点存在右极限，右端点存在左极限）。

证 对区间 I 内部的任一点 a，定理需分两类四种情形证明。

(1) 函数 f 在 I 上单调递增，则 f 在点 a 的左、右极限都存在有限，且

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup_{\substack{x<a \\ x\in I}} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{\substack{x>a \\ x\in I}} f(x).$$

(2) 函数 f 在 I 上单调递减，则 f 在点 a 的左、右极限都存在有限，且

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \inf_{\substack{x<a \\ x\in I}} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \sup_{\substack{x>a \\ x\in I}} f(x).$$

仅就函数 f 在 I 上单调递增，在点 a 的左极限情形证明

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup_{\substack{x<a \\ x\in I}} f(x).$$

事实上，因为 f 在 I 上有界，必有上界，因而数集

$$A=\{f(x) \mid x<a,\ x\in I\}$$

非空有上界。由上确界定理，A 有上确界，记 $\beta=\sup\limits_{\substack{x<a \\ x\in I}} f(x)$，则

$$f(x)\leqslant\beta,\quad \forall x\in I,\text{ 且 } x<a.$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\bar{x}\in I$ 且 $\bar{x}<a$，使 $f(\bar{x})>\beta-\varepsilon$.

由于 f 单调递增，当 $\bar{x}<x<a$ 时有 $\beta-\varepsilon<f(\bar{x})\leqslant f(x)$，令 $\delta=a-\bar{x}$，则当 $-\delta<x-a<0$ 时有

$$\beta-\varepsilon<f(x)\leqslant\beta<\beta+\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\beta.$$

对区间 I 的端点可类似讨论. □

3. 两个重要极限

下面两个重要极限将在推导基本初等函数导数公式时用到.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$x$ 是弧度. (4.3)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 或 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. (4.4)

证(1) 由不等式

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

可得

$$\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>\frac{\cos x}{\sin x},$$

即

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

因为

$$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}\to0\quad(x\to0),$$

所以，$\lim\limits_{x\to0+}\cos x=1$，由夹逼法则得

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

而

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证(2) 1° 先利用数列的单调有界定理证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

存在有限极限. 事实上,记

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由 §1.1 第 6 段例 1 可知,$\{x_n\}$ 是严格增数列,$\{z_n\}$是严格减数列;又因为

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=z_n<z_1=4,\ n=1,2,\cdots,$$

故$\{x_n\}$是有界数列.

由数列的单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在有限极限，我们用拉丁字母 e 来表示这个极限,即

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2° 下面证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

对任何 $x>1$,总存在正整数 n 使 $n\leqslant x<n+1$,所以

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\mathrm{e},$$

及 $x\to+\infty$ 当且仅当 $n\to+\infty$，再用夹逼法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.\tag{4.5}$$

3° 再考虑$x\to-\infty$的情形，令 $x=-y$，则 $x\to-\infty$时，$y\to+\infty$，于是

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=\mathrm{e}. \tag{4.6}$$

由式(4.5)，(4.6) 可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

如果令 $x=\frac{1}{t}$，即得

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}. \qquad \square$$

式(4.4)中的极限数值 e 就是自然对数的底，可以证明 e 是一个无理数，其近似值为 2.718281828459045…。以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$ 和对数函数 $y=\ln x$ 在微积分的许多公式中显得比较简单。

例 2 设 $\{x_n\}$：$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，试证：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在有限，通常记为 C，称为**欧拉常数**，可证 $C=0.577215664\cdots$。由此有

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n$，$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$。

证(1) 由$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$严格递增趋于e，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格递减趋于 e，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

取对数得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \tag{4.7}$$

先证$\{x_n\}$是严格递减数列. 事实上,由式(4.7),

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.$$

次证$\{x_n\}$有下界. 因$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 故

$$1>\ln 2,\ \frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

将以上不等式各边相加,得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\ln n,$$

所以

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0.$$

故$\{x_n\}$是单调递减有下界的数列,必有极限,记为C,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=C,$$

因此有

$$x_n=C+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0. \qquad \square$$

证 (2) 因为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n$, 两边取极限,即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n+C+\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=+\infty. \qquad \square$$

例 3 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

证 (1) 当$x=0,\pi,2\pi$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x=0$.

(2) 当$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$,因为$0<\sin x<x$,所以

$$0<\underbrace{\sin\sin\cdots\cdots\sin}_{n\text{个}}x=x_n<x_{n-1}=\underbrace{\sin\sin\cdots\cdots\sin}_{(n-1)\text{个}}x,$$

$$n=2,3,\cdots,$$

故此数列单调递减有下界，必有极限 a，$0\leqslant a<1$．在等式

$$x_n=\sin x_{n-1},\quad n=2,3,\cdots,$$

中令 $n\to\infty$ 得 $a=\sin a$，所以 $a=0$．

(3) 当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，因 $\sin x=\sin(\pi-x)=\sin y$，这里 $0<y<\frac{\pi}{2}$，从而也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\cdots\sin}_{n\text{个}}x=0$．

(4) 当 $\pi<x<2\pi$，因 $\sin x=-\sin(2\pi-x)=-\sin z$，这里 $0<z<\pi$，由(1)，(2)，(3)得

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\cdots\sin}_{n\text{个}}x=0.$$ □

例 4 求下列极限．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}(\varphi\neq 0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$．

解 (1) 因为

$$\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\sin\frac{\varphi}{2^2}$$

$$=\cdots=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

§1.4 习　题

1. 设有一开区间套$\{(a_n, b_n)\}$，满足不等式

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，证明存在唯一点$C$，使得对一切$n$,有

$$a_n<C<b_n.$$

*2. 试用区间套定理证明：任何非空有下界的数集必有下确界。

3. 设$\sup\limits_{x\in X}\{x\}=\beta$，试证从$X$中可选取数列$\{x_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$。

4. 设数集X上方无界，试证从X中可选取数列$\{x_n\}$,使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

5. 设$\{x_n\}$为单调上升数列，$\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的子数列，若$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

6. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

7. 试证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

8. 设$b_1>a_1>0$，$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在有限，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

9. 证明下列数列极限存在有限，并求其值。

(1) 设$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$；

(2) 设$x_1=\sqrt{c}$($c>0$，常数)，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$；

(3) 设$x_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{k}{a}\right)$($a>0$，$k>0$)，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{k}{x_n}\right)$。

10. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$($b\neq 0$)；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg}x$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\arcsin x}{2x+\operatorname{arc\,tg}x}$.

§1.5 连　续

函数的连续性是分析学中的一个非常重要的概念，它与我们所讨论过的极限的概念有着密切的联系。连续函数是数学分析中一类最重要的函数之一。

1. 连续与间断

定义1（函数在点a连续与间断）　设函数f在点a的某邻域上有定义，如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，则称$f$在点$a$**连续**，否则称$f$在点$a$**间断**。若$f(a-0)=f(a)$，即$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$，则称$f$在点$a$**左连续**；若$f(a+0)=f(a)$，即$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$，则称$f$在点$a$**右连续**。

显然，f在点a连续的充要条件是

$$f(a-0)=f(a)=f(a+0).$$

设函数f在区间I上有定义，如果f在I上每一点都连续（当I包含端点时，只要求f在左端点处右连续，在右端点处左连续），则称f在I上连续。区间I上的连续函数的全体所成的集合记为$C(I)$。f在I上连续则记为$f\in C(I)$。

为应用上的方便，f在一点a连续，常使用下列等价说法。

(1) 增量说法　记$\Delta x=x-a$，称为自变量的增量，相应的因变量增量为$\Delta f=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$，则有

f在点a连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(a+\Delta x)=f(a)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$。

(2) "$\varepsilon-\delta$"语言

f 在点 a 连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, |x-a|<\delta$，有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon。$$

(3) 数列说法

f 在点 a 连续 $\Leftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\to a(n\to\infty)$，有 $f(x_n)\to f(a)$。

(4) 邻域说法

f 在点 a 连续 $\Leftrightarrow$ 对 $f(a)$的任何 ε 邻域 $V=V(f(a),\varepsilon)$，存在点 a 的 δ 邻域 $U=U(a,\delta)$，有 $f(U)\subset V$。

注意到函数 f 在点 a 连续要求 f 满足下面三个条件：

1° f 在点 a 有定义.

2。 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在有限，

3° $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

若三个条件有一个不满足，函数 f 就在点 a 间断。间断点可按函数 f 在点 a 的左、右极限的状态分为下面二类：①

间断点类型	$f(a+0)$与 $f(a-0)$	说　　明
第Ⅰ类间断点	**存在**且相等，极限值为 A	也称为**可去间断点**，因 f 在点 a无定义或$A\neq f(a)$引起间断
	存在但不相等	也称**跳跃型间断点**
第Ⅱ类间断点	至少有一个是无穷大	也称**无穷型间断点**
	至少有一个不存在	

例 1　设

① 有的教材将间断点分为三类：可去间断点，第Ⅰ类间断点（即跃跳型间断点）及第Ⅱ类间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases};\quad g(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\neq 0,$$

讨论 f 与 g 在点 $x=0$ 的连续性。

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，虽然 f 在点 $x=0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，因此，$x=0$ 是 f 的可去间断点；而 g 在点 $x=0$ 本来就没有定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 是存在的，因此，点 $x=0$ 也是 g 的可去间断点。

例 2 讨论函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}\quad g(x)=\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的连续性。

解 由 $f(0+)=1$，$f(0-)=-1$，有 $f(0+)\neq f(0-)$；

$g(0+)=\dfrac{\pi}{2}$，$g(0-)=-\dfrac{\pi}{2}$，有 $g(0+)\neq g(0-)$。

故 $x=0$ 是 f 与 g 的第Ⅰ类(跳跃型)间断点。

例 3 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 的连续性。

解 由 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-\infty$，知 $f(0+)$、$f(0-)$ 均不存在，故 $x=0$ 是函数 f 的第Ⅱ类间断点，且 $x=0$ 是函数 f 的无穷型间断点。

例 4 讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

的连续性.

解 任取$a\in(-\infty,+\infty)$，取有理数列r_n：$r_n\to a+0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}D(r_n)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

取无理数列q_n：$q_n\to a+0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}D(q_n)=\lim 0=0.$$

因$0\neq1$，所以$\lim\limits_{x\to a+0}D(x)$不存在，因此，$a$是函数$D(x)$的第Ⅱ类间断点. 由$a$在$(-\infty,+\infty)$上的任意性，可知狄利克雷函数在$(-\infty,+\infty)$上点点不连续.

2. 连续函数的局部性质与运算法则

若函数f在点a连续，根据存在有限极限的函数的局部性质与运算法则，立即可得下列定理.

定理1（局部有界性） 若函数f在点a连续，则函数f在点a的某邻域内有界.

定理2（局部保号性） 若函数f在点a连续，且$f(a)\neq0$，则函数f在点a的某邻域U内与$f(a)$同号.

又若$f(a)>p(<q)$，则存在a的某邻域U，在U内有

$$f(x)>p(<q).$$

这个性质以后在一些定理证明中要用到.

定理3（四则运算） 若函数f,g都在点a连续，则它们的和、差、积、商

$$f\pm g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}(g(a)\neq0)$$

也都在点a连续.

证 根据函数连续的定义及函数极限的四则运算法则立即可得.

定理4（复合函数的连续性） 设函数$y=g(u)$与$u=\varphi(x)$

在点 a 的邻域能构成复合函数

$$g\circ\varphi:\ (g\circ\varphi)(x)=g(\varphi(x)),\ x\in U(a),$$

且函数 φ 在点 a 连续，函数 g 在点 $b=\varphi(a)$ 连续，则复合函数 $g\circ\varphi$ 在点 a 连续.

证 由假设知

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a),\quad \text{即}\ \lim_{x\to a}u=b$$

及

$$\lim_{u\to b}g(u)=g(b),$$

利用复合函数求极限的法则知

$$\lim_{x\to a}g(\varphi(x))\xlongequal{令u=\varphi(x)}\lim_{u\to b}g(u)=g(b)=g(\varphi(a)).$$

因此，$g\circ\varphi$ 在点 a 连续. □

3. 严格单调连续函数的反函数的连续性

记 I 为或开、或闭、或半开半闭、或有限、或无穷的区间.

定理 5（严格单调的函数有反函数） 设 f 在区间 I 上严格递增(严格递减)，则在函数 f 的值域 $f(I)$ 上必存在单值的反函数，且其反函数也严格递增(严格递减).

证 就严格递增情形证明. 先证反函数存在.

由 f 在 I 上严格递增，对 $\forall x_1,\ x_2\in I,\ x_2>x_1$，有 $f(x_2)>f(x_1)$，这就是说，$x_2\neq x_1$ 有 $f(x_2)\neq f(x_1)$，因此，对 $\forall y\in f(I)$，有且只有唯一的 $x\in I$ 使 $f(x)=y$，即对 $\forall y\in f(I)$ 有且只有唯一的 $x\in I$ 与 y 对应，因此，存在定义在 $f(I)$ 上的单值反函数 $x=f^{-1}(y)$.

下面用反证法证明反函数 f^{-1} 严格递增. 若 $\exists y_1,\ y_2\in f(I)$，$y_2>y_1$ 有 $x_2=f^{-1}(y_2)\leqslant f^{-1}(y_1)=x_1$，由 f 严格递增，有 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$，即 $y_2\leqslant y_1$，矛盾. □

定理 6（严格单调连续函数的反函数连续） 设 f 是定义在闭区间 $[a,\ b]$ 上的严格递增（递减）的连续函数，则存在定义在

$[f(a), f(b)]([f(b), f(a)])$ 上的严格递增(递减)的连续的反函数.

证 以严格递增为例证明. 由定理5, 存在定义在 f 的值域 $f([a, b])$ 上的严格递增的反函数 f^{-1}. 由于 f 在$[a, b]$上严格递增, 所以 $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$. 下面分两步证明.

第一步. 证 f^{-1} 的定义域填满区间$[f(a), f(b)]$, 即证 f 的值域填满 $[f(a), f(b)]$.

在$(f(a), f(b))$上任取一点 y_0, 今证必有唯一的点 $x_0 \in [a, b]$使 $f(x_0) = y_0$. 先证存在性, 事实上,将 $[a, b]$ 等分为二个区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 若 $f(c) = y_0$, 则结论得证; 否则, $f(c) > y_0$ 时取 c 为 b_1, a 为 a_1; 在 $f(c) < y_0$ 时取 c 为 a_1, b 为 b_1, 从而得

1° $[a_1, b_1] \subset [a, b]$;

2° $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$;

3° $y_0 \in (f(a_1), f(b_1))$.

继续对$[a_1, b_1]$不断重复上述步骤, 或结论得证, 或得一区间套, 它满足

1° $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$;

2° $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$;

3° $y_0 \in (f(a_n), f(b_n))$.

由区间套定理知, 存在一点 x_0, 它属于所有的$[a_n, b_n]$, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

又由 f 的连续性, 得

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0), \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0),$$

但

$$f(a_n) < y_0 < f(b_n),$$

由夹逼法得 $f(x_0) = y_0$. 最后因为 f 是严格递增的, 所以只有一个 x_0 使

$$f(x_0) = y_0.$$

第二步, 证明反函数 f^{-1} 连续, 即证 f^{-1} 在 $[f(a), f(b)]$ 上每一点连续. 任取 $y_0 \in (f(a), f(b))$, 由第一步证明知, 存在唯一的 $x_0 \in (a, b)$ 使 $x_0 = f^{-1}(y_0)$. 对于任给 $\varepsilon > 0$, 可要求 ε 如此小, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, 记 $J = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, 由第一步知, f^{-1} 在 J 上有定义, 且对 $\forall y \in J$,

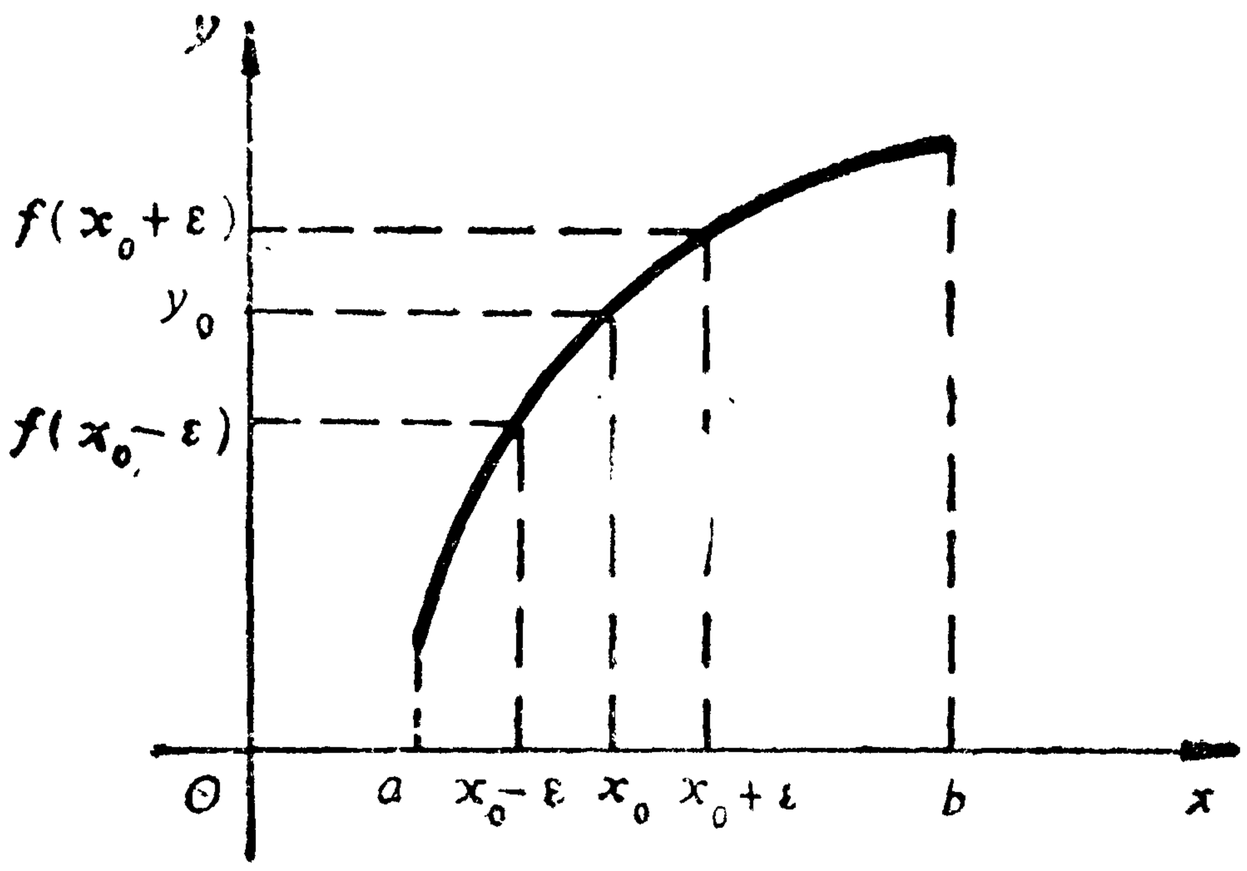


图 1.8

存在唯一的 $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$，使 $x=f^{-1}(y)$。欲使

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon,\text{即 } x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon,$$

只要

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon),$$

亦即要

$$f(x_0-\varepsilon)-y_0<y-y_0<f(x_0+\varepsilon)-y_0.$$

于是，对任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\{y_0-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-y_0\}$，$\forall y$，$|y-y_0|<\delta$，有 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$。

由 y_0 的任意性知 $f^{-1}(y)$在开区间$(f(a),\ f(b))$上连续。对于$y_0=f(a)$，$f(b)$，可以用类似的方法证明 $f^{-1}(y)$在 $f(a)$右连续，在 $f(b)$左连续。 □

4. 初等函数的连续性

先证明六类基本初等函数：常量函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数在其自然定义域上是连续的。

1) 常量函数

$$y=C$$

在$(-\infty, +\infty)$上连续。这可由 $\Delta y=C-C=0$，因此当 $\Delta x\to 0$ 时有 $\Delta y\to 0$ 得到。

2) 三角函数

$$\sin x,\ \cos x,\ \mathrm{tg}\,x,\ \mathrm{ctg}\,x,\ \sec x,\ \csc x$$

在各自的定义域内连续。这是因为在§1.2例8已证明

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a,\quad \forall a\in(-\infty,+\infty),$$

故 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续。其余五个三角函数的连续性可从 $\sin x$ 的连续性，再利用复合函数连续性以及连续函数的四则运算得到。例如，

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,$$

等等。

3）反三角函数

$$\arcsin x,\quad \arccos x,\quad \operatorname{arctg}x,\quad \cdots$$

等在各自定义域内是连续的。这可由定理6“严格单调连续函数的反函数连续”得到。例如，$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，$\sin y$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上严格递增连续，值域为$[-1,1]$，故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上连续。

4）指数函数

$$y=a^x\quad (a>0,\ a\neq1)$$

在$(-\infty,+\infty)$内连续。

§1.2例8已证得 $\lim_{x\to0}a^x=1(a>1)$，对 $0<a<1$，令 $b=\frac{1}{a}>1$ 也有

$$\lim_{x\to0}a^x=\lim_{x\to0}\frac{1}{b^x}=\frac{1}{\lim b^x}=\frac{1}{b^0}=a^0=1,$$

故

$$\lim_{x\to0}a^x=a^0=1\quad (a>0,\ a\neq1)。$$

即 $y=a^x$ 在 $x=0$ 连续。下证 $y=a^x$ 在任何点 $x\in(-\infty,+\infty)$连续。因为

$$a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)\to0,\ \Delta x\to0,$$

故有

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{x+\Delta x}=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1),$$

即 a^x 在$(-\infty,\ +\infty)$上连续.

5) 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

在$(0,\ +\infty)$内连续. 由 $x=a^y(a>0,\ a\neq 1)$是$(-\infty,\ +\infty)$上的严格单调的连续函数及定理 6 得到 $x=a^y$ 的反函数 $\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$在$(0,\ +\infty)$内连续.

6) 幂函数

$$y=x^\alpha \quad (\alpha \text{ 任意实数})$$

在$(0,\ +\infty)$内连续.

因为 $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ 是由 $y=e^u$, $u=\alpha\ln x$ 复合而成, 而 $u=\alpha\ln x$ 在$(0,\ +\infty)$内连续,其值域为 $J=(-\infty,\ +\infty)$,e^u 在 J 内连续,由复合函数连续性得 $y=x^\alpha$ 在$(0,\ +\infty)$内连续.

因为初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算得出的函数,由连续函数的运算性质立即可得下面定理.

定理 7 初等函数在其自然定义域内是连续的.

例 5 求下列极限.

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x (a\neq 0),\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{3}{x}}.$$

解 (1) 令 $u(x)=\dfrac{x}{a}$, $v=g(u)=\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u$, $f(v)=v^a$,则有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a=e^a.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{3}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}\times 3}}=\frac{1}{e^{-3}}=e^3.$$

例 6 试证

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

证　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})$

$$=\ln e=1.$$

(2) 令 $y=e^x-1$，则 $x=\ln(1+y)$，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

(3) 令 $y=(1+x)^\mu-1$，则 $\ln(1+y)=\mu\ln(1+x)$，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\mu\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\mu.\ \square$$

5. 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些很重要的性质，它是研究可微函数与可积函数的基本工具。由于证明起来比较困难，先在本段熟悉其含义，并学会运用它们，严格的证明将在第十四章中阐述。

设 f 是闭区间$[a,\ b]$上的连续函数，那么从几何直观上，$y=f(x)$的图形就是从点 $A(a,\ f(a))$到点 $B(b,\ f(b))$ 的一段连续不断开的曲线(它能一笔画成)。从图 1.9 可以看到：

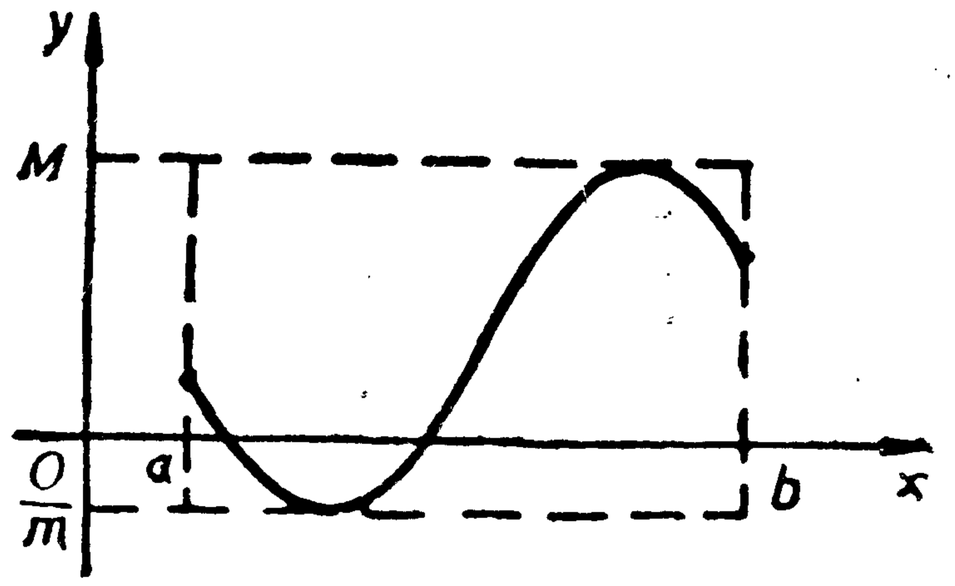


图 1.9

(1) 整段曲线能包含在一个矩形 $a\leqslant x\leqslant b,\ m\leqslant y\leqslant M$ 内，因此函数 f 是有界的。

(2) 曲线段有最高点与最低点，即函数 f 能取到最大值 M，也能取到最小值 m。

(3) 当曲线从 $A(a, f(a))$ 连续变到 $B(b, f(b))$ 时，对于介于函数 f 的最大值 M 与最小值 m 之间的任一值 μ，则曲线与水平直线 $y=\mu$ 至少有一个交点 (ξ, μ)，其中 $\xi \in [a, b]$（图 1.10）。

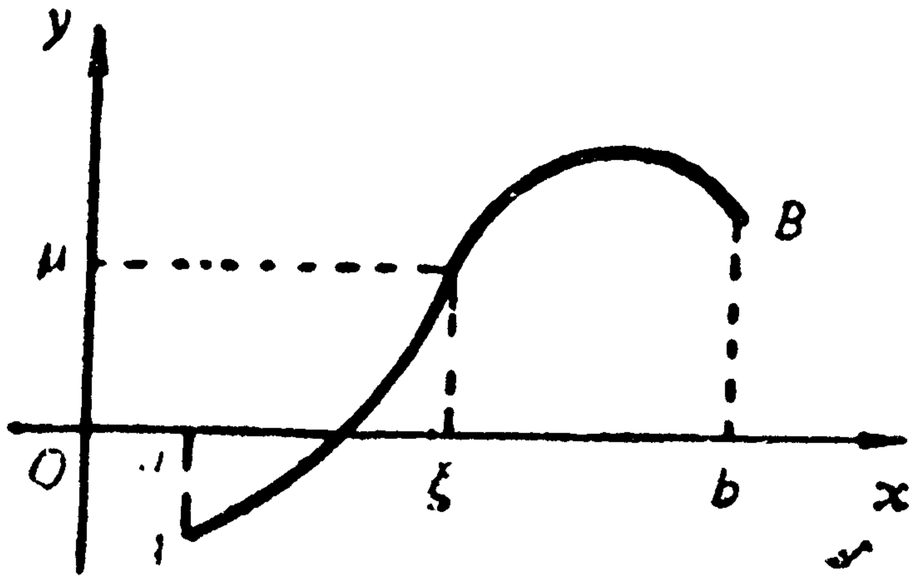


图 1.10

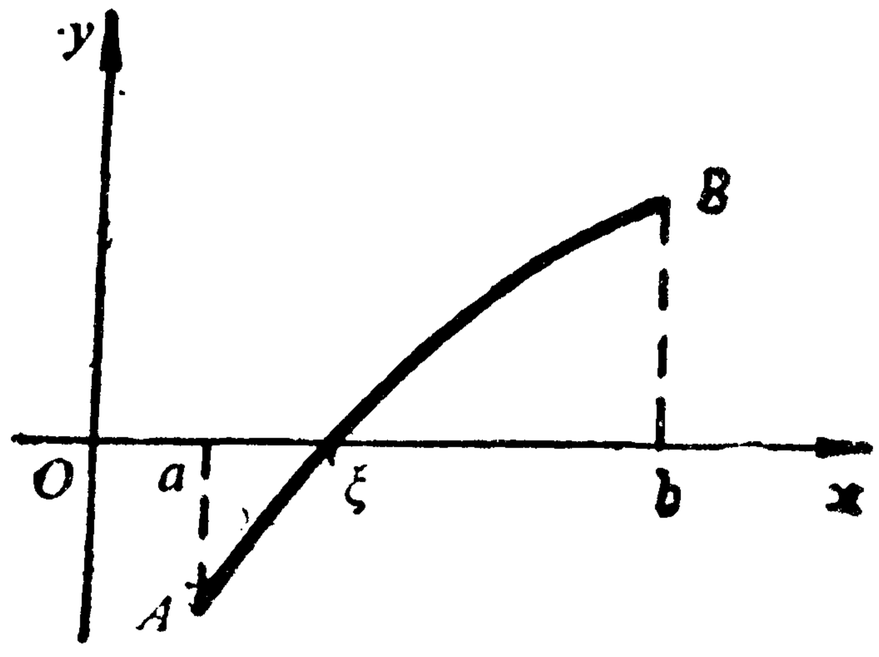


图 1.11

特别，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，即 A、B 位于 x 轴的不同侧时，曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 至少与 x 轴有一个交点 $(\xi, 0)$（见图 1.11）。

以上性质用分析语言描述有下列定理：

定理 8（有界性定理） 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 f 在闭区间 $[a, b]$ 上有界，即

$$\exists m, M \quad \text{使} \quad m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a, b].$$

定理 9（最大值、最小值定理） 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 f 在闭区间 $[a, b]$ 上取到最大值、最小值，即

$$\exists x_1 \in [a, b] \quad \text{使} \quad f(x) \geqslant f(x_1), \forall x \in [a, b],$$

$$\exists x_2 \in [a, b] \quad \text{使} \quad f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in [a, b],$$

其中 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 分别为函数 f 在 $[a, b]$ 上的最小值、最大值。

定理 10（零值定理） 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a, b) 内必存在点 ξ，使 $f(\xi)=0$（称 ξ 为 f 的零点）。

定理 11（介值定理） 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，记 $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，则 f 取到介于 m，M 之间的一切值 μ，

即 $\forall \mu, m<\mu<M$，必存在点 $\xi \in(a, b)$，使 $f(\xi)=\mu$。

连续函数的上述性质刻划的是连续函数的**整体性质**，使用这些性质时必须注意以下几点：

(1) 函数必须在区间上连续，而不是在个别的点连续。

(2) 有界性定理与最大、小值定理中函数的连续区间必须是有界闭区间。例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x>0$ 上连续，但它在无界区间 $x>0$ 上无界，且没有最大值。它在有界开区间 $(0, 1)$ 上连续，但它在 $(0, 1)$ 上也无界，且没有最大值。

(3) 介值定理在任意类型的区间上成立。

定理 12（介值定理） 设 f 在区间 I 上连续，记 $m=\inf\limits_{x \in I} f(x)$，$M=\sup\limits_{x \in I} f(x)$，则 f 取到介于 m 与 M 之间的一切值 μ，即 $\forall \mu, m<\mu<M$，必存在点 $\xi \in I$，使 $f(\xi)=\mu$。

例 7 证明方程 $x^7-5x+1=0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个根。

证 令 $f(x)=x^7-5x+1$，则 f 在闭区间 $[1, 2]$ 上连续，又

$$f(1)=1-5+1=-3<0,$$

$$f(2)=2^7-10+1=119>0,$$

$f(1)$ 与 $f(2)$ 异号，由零值定理知，在 $(1, 2)$ 内必存在 ξ 使得

$$f(\xi)=\xi^7-5\xi+1=0$$

即 ξ 是方程 $x^7-5x+1=0$ 的一个根。 □

闭区间上连续函数的另一重要整体性质就是一致连续性。函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续指 f 在 I 上每一点 x 连续。按 f 在点 x 连续的“ε-δ”说法，即

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon, x), \forall x', |x'-x|<\delta$，有 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$，

δ 一般与点 x 有关。例如 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。用“ε-δ”说法证明 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上任意一个固定点 x 的连续性。

由 $x>0$，不妨事先假定

$$|x'-x|<\frac{x}{2} \quad \text{即} \quad \frac{x}{2}<x'<\frac{3}{2}x,$$

欲

$$|f(x')-f(x)|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right|=\frac{|x'-x|}{|x'x|}<\frac{2}{x^2}|x'-x|<\varepsilon,$$

只需

$$|x'-x|<\frac{x^2}{2}\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}\varepsilon\right)$，可见$\delta$是与 x 有关的．能否找到与 x 无关的 δ 呢？由于对函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 是在区间$(0,+\infty)$上考虑其连续性，当 x 愈小要求 $\delta=\min\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}\varepsilon\right)$ 也愈小，找不到与 x 无关的对$(0,+\infty)$上一切 x 都一致适用的 δ．从图 1.12 看，函数 $y=\frac{1}{x}$ 随 x 愈接近点 $x=0$，因变量 $\frac{1}{x}$ 变化愈快，也就是说，因变量 $\frac{1}{x}$ 随 x 变化的快慢在$(0,+\infty)$上是无法一致的．如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，且能找到与 $x\in I$ 无关的 δ，则称 f 在 I 上是一致连续的．

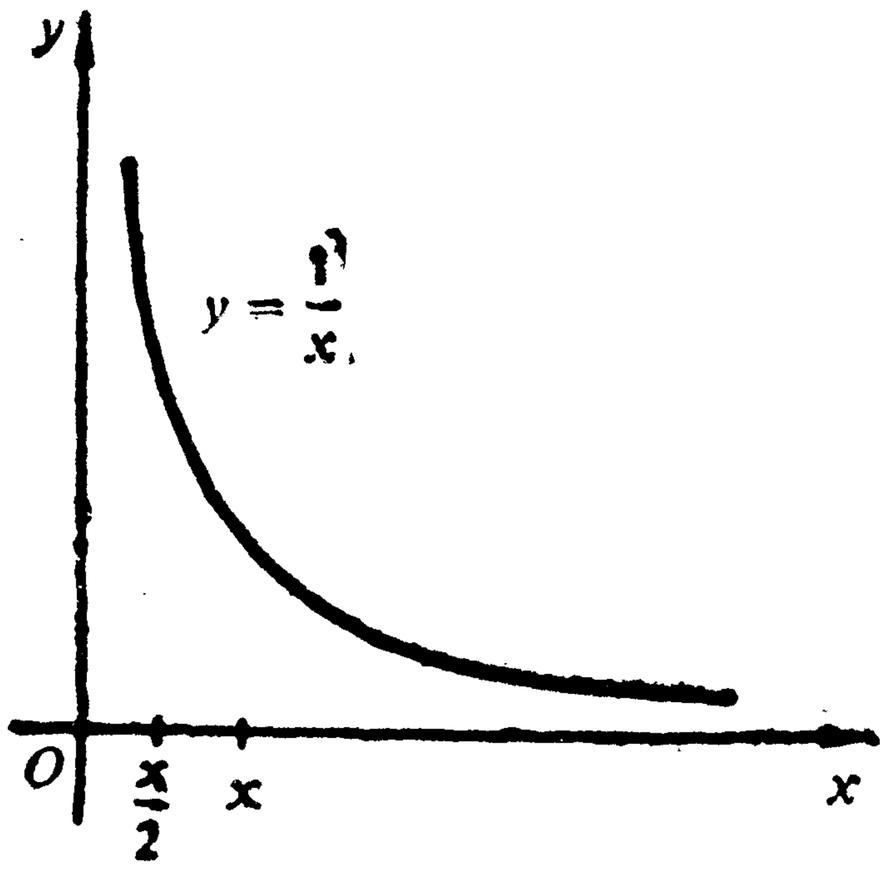


图 1.12

定义 3（一致连续） 设函数 f 在区间 I 上定义，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对任何 $x', x\in I$，当 $|x'-x|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$，则称 f 在区间 I 上**一致连续**．否则说 f 在 I 上非一致连续．简写为

$$\begin{aligned}&f\text{ 在 }I\text{ 上一致连续}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x',\\&\quad x\in I,|x'-x|<\delta,\text{ 有 }|f(x')-f(x)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

否定命题是

f 在 I 上非一致连续 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists x', x\in I,$ $|x'-x|<\delta$，但 $|f(x')-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$.

显然，若函数 f 在区间 I 上一致连续，则 f 在 I 上必连续.

例 8 试证 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

证 $|\sin x'-\sin x|=2\left|\cos\frac{x'+x}{2}\right|\left|\sin\frac{x'-x}{2}\right|\leqslant|x'-x|$,

因此，对任意的 $\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon, \forall x', x\in(-\infty, +\infty)$，$|x'-x|<\delta$，有 $|\sin x'-\sin x|<\varepsilon$，故 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。 □

例 9 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，试证：

(1) $f(x)$ 在 $[d, +\infty)(d>0)$ 上一致连续；

(2) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

证 (1) $\forall x', x\in[d, +\infty)$

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x'x}|x'-x|\leqslant\frac{1}{d^2}|x'-x|,$$

因此，对任意 $\varepsilon>0, \exists\delta=d^2\varepsilon, \forall x', x\in[d, +\infty), |x'-x|<\delta$，有 $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$，故 $\frac{1}{x}$ 在 $[d, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对 $\forall\delta>0$，存在 $n>\frac{1}{2\delta}$，取 $x'=\frac{1}{2n}, x=\frac{1}{n}$，

则 $x', x\in(0, +\infty)$，

$$|x'-x|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{2n}<\delta,$$

但 $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right|=n>\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续。 □

对于闭区间上的连续函数，有

定理 13 (康托尔 (Cantor) 定理) 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.

§1.5 习 题

1. 用定义证明下列函数在定义域内连续。

(1) $f(x)=x^2$,　　(2) $f(x)=e^{2x}$

2. 选择怎样的参数，补充下列所给函数 f 的定义，能使 f 成为连续函数。

(1) $f(x)=\begin{cases} ax, & x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x+b, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ x+a, & x\geqslant 0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3, \\ A, & x=3. \end{cases}$

3. 指出下列函数的间断点，并确定其类型。

(1) $f(x)=\dfrac{|3x-4|}{3x-4}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$;　　(4) $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$;

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$;

(6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & -\infty<x<-1, \\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty; \end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x=\dfrac{\pi}{4}, \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}<x\leqslant\pi; \end{cases}$

(8) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}$。

4. 设 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，$g(x)=1+x^2$，研究函数 $f(g(x))$和 $g(f(x))$ 的连续性。

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n}{x-n}\right)^{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+nx)^{\frac{1}{n}}$　(n为整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$　(m、k均为正整数)；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc}\sin(\sqrt{x^2+x}-x)$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$。

6. 用有界性定理证明：

(1) 设f在(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-}f(x)=B$有限，则$f$在$(a,b)$上有界。

(2) 设f在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=C$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=D$有限，则$f$在$(-\infty,+\infty)$上有界。

7. 试证：

(1) 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内有一点$x$，使得$x=\cos x$，

(2) 在$(0,1)$内有一点x使得$x\cdot 2^x=1$，

(3) $x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}=0$在R内至少有一个实根($n\in\mathrm{N}$)，

(4) $x^3+px+q=0(p>0)$有且仅有一个实根，

(5) $x=a\sin x+b$，$0<a<1$，$b>0$，在$(0,a+b]$上至少有一个根。

(6) $\sin x=\dfrac{1}{x}$在R内有无穷多个根。

8. 设函数f在区间I上连续，且当$x\in I$时，$f(x)\neq 0$，则f在I上或者都大于零，或者都小于零。

9. 设函数f在$[0,2a]$连续，且$f(0)=f(2a)$，试证：存在$x_0\in[0,a]$，使得$f(x_0)=f(x_0+a)$。

10. 证明：若函数f在R上连续，$\forall x\in\mathrm{R}$，函数值$f(x)$都是有理数，且$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$，则$f(x)\equiv 2$。

11. 设函数f在(a,b)连续，且

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b,$$

试证，存在$\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

12. 试证：

(1) $f(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内一致连续，

(2) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$在$(0,1]$上不一致连续，

(3) $f(x)=x^2$在$[-H,H](H>0$,充分大定数)上一致连续，但在$(-\infty,+\infty)$内不一致连续.

*13. 试证：若 f 在有限区间(a,b)上一致连续，则f在(a,b)上有界.

*14. 试证：若函数 f,g 在有限区间(a,b)上一致连续，则 $f+g$，$f\cdot g$在(a,b)上也一致连续.

§1.6 无穷小量的阶 不定型的极限

1. 无穷小(大)量的比较

继§1.3第3段无穷小量的性质的讨论之后，有必要进一步搞清楚怎样区别并判断无穷小量趋于零的速度的快慢，它对于极限的计算及第7章级数与广义积分的收敛性的判定都是很重要的。解决这个问题采取的方法是考察两个无穷小量的比的极限。这个方法也适用于考察变量发散到无穷大的速度。

定义1（无穷小(大)量的比较） 设 X,Y 是同一极限过程中的两个无穷小量(无穷大量)，极限号lim代表某同一过程中的极限。

1° 若 $\lim\frac{Y}{X}=0$，称 Y 是关于 X 的**高(低)阶无穷小(大)量**，记为 $Y=o(X)$，

2° 若 $\lim\frac{Y}{X}=A$（非零有限），称Y与X是**同阶无穷小(大)量**，记为 $Y=O^*(X)$；

3° 若 $\lim\frac{Y}{X}=1$，称 Y 与 X 是**等价无穷小(大)量**，记为

$Y\sim X$.

这三种情形中不论哪一种，$\frac{Y}{X}$都是有界变量或在某点附近是有界变量，这时无穷小(大)量 Y 的阶不低(不高)于无穷小(大)量 X 的阶，记为

$$\frac{Y}{X}=O(1) \quad 或 \quad Y=O(X).$$

4° 若 $\lim\frac{Y}{X^{\alpha}}=A$ (非零有限)，其中 α 是大于 0 的常数，称 **Y 是关于 X 的 α 阶无穷小(大)量.**

说明：(1) 在具体使用 o, O, $^*O$, $\sim$记号时，必须指出自变量 x 或 n 趋于什么？例如

$y_n=o(x_n)$, $n\to\infty$, 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$;

$g(x)=O(f(x))$, $x\to a$, 是指$\frac{g(x)}{f(x)}$在 a 的某去心邻域 $U(a,\delta)-\{a\}$上有界;

$g(x)=O(f(x))$, $x\to+\infty$, 是指$\frac{g(x)}{f(x)}$在 $+\infty$的某去心邻域 $(b, +\infty)$上有界;

$g(x)\sim f(x)$, $x\to-\infty$, 是指 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

(2) 记号 $Y=O(X)$, $Y=O^*(X)$, $Y=o(X)$ 中的“等号”有着特殊的含义，左边 Y 是一个具体的函数，右边 $O(X)$, $O^*(X)$, $o(X)$表示一个函数类，而“=”的含义是“含于”或“属于”. 例如，$\frac{1}{n^2+n}=o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\to\infty$，表示当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}$属于“比无穷小$\frac{1}{n}$高阶的数列类”中. 又如 $1-\cos x=O^*(x^2)$, $x\to0$, 表示当 $x\to0$ 时，函数 $1-\cos x$ 属于“与无穷小 x 相比为二阶无穷小的函数类”中.

(3) 下列情形也说 Y 与 X 是同阶无穷小(大)量，例如

若存在正数 C 与 D 使

当 $Y=y_n$, $X=x_n$, $n\to\infty$ 时, $C\leqslant\left|\frac{y_n}{x_n}\right|\leqslant D$, $n\geqslant n_0$;

当 $Y=g(x)$, $X=f(x)$, $x\to a$时, $C\leqslant\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant D$,

$$\forall x\in U(a,\delta)-\{a\};$$

当 $Y=g(x)$, $X=f(x)$, $x\to+\infty$时, $C\leqslant\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant D$,

$$\forall x\in(b,+\infty).$$

例 1 当 $x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$; $\operatorname{tg} x\sim x$; $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;

$\ln(1+x)\sim x$; $e^x-1\sim x$; $(1+x)^\mu-1\sim\mu x$;

$x^2+x\sim x$; $x\sin\frac{1}{x}=O(x)$;

$x^3=o(x^2)$; $x^{n_0+k}=o(x^{n_0})(k>0)$.

下面举两个无穷大量相比较的例子:

例 2 当 $n\to+\infty$ 时,

$$(n^2+n)\sim n^2;\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\sim\ln n;\quad 2n^2+n=O^*(n^2).$$

例 3 当 $x\to+\infty$ 时,

$$(x^2+x)\sim x^2;\quad x^2=o(x^3);\quad x^{n_0}=o(x^{n_0+k})(k>0).$$

等价无穷小(大)量特别重要，下面给出等价无穷小的几个性质:

性质 1 X, Y 是等价无穷小的充要条件为 $Y-X$ 是比 X(或 Y)更高阶的无穷小,即

$$Y\sim X\Leftrightarrow Y-X=o(X)\quad 或\quad Y-X=o(Y)\qquad(6.1)$$

证 $$Y\sim X\Leftrightarrow\lim\frac{Y}{X}=1\Leftrightarrow\lim\left(\frac{Y}{X}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\lim\frac{Y-X}{X}=0\Leftrightarrow Y-X=o(X).$$

类似可证 $Y-X=o(Y)$. □

性质 2, 两个等价无穷小(大)量之间的等价关系"~" 具有下

列性质：

(1) 自反性：$X\sim X$；

(2) 对称性：$X\sim Y$，则 $Y\sim X$；

(3) 传递性：若 $X\sim Y$，$Y\sim Z$，则 $X\sim Z$.

请读者自证.

性质 3（无穷小(大)量运算的等价替换法则） 设 X_1，X_2，Y_1，Y_2 均为同一极限过程中的无穷小(大)量，若 $X_1\sim X_2$，$Y_1\sim Y_2$，且 $\lim\dfrac{Y_1}{X_1}$存在，则

$$\lim\frac{Y_2}{X_2}\ \underline{\text{存在，且}}\ \lim\frac{Y_1}{X_1}.$$

这可由

$$\frac{Y_2}{X_2}=\frac{Y_2}{Y_1}\cdot\frac{Y_1}{X_1}\cdot\frac{X_1}{X_2}$$

证得. □

2. 无穷小量的阶

为更精细而又方便地刻划无穷小(大)量的变化速度，下面我们选取一些无穷小(大)量作为基准，称为基本无穷小量(基本无穷大量). 今规定

在极限过程 $x\to a$ 中，选取 $X=x-a$ 为基本无穷小量；选取 $X=\dfrac{1}{x-a}$为基本无穷大量.

在极限过程 $x\to\infty$ 中，选取 $X=\dfrac{1}{x}$为基本无穷小量；选取 $X=x$ 为基本无穷大量.

将一般的无穷小(大)量与基本无穷小(大)量相比较，可以把无穷小(大)量分为不同的级别.

定义 2（无穷小量与无穷大量的阶与主部） 设 X 是基本无穷小(大)量，实数 $\alpha>0$，如果

$$\lim\frac{Y}{X^\alpha}=c\quad(\text{非零有限}),$$

则称 Y 是 **α 阶无穷小(大)量**，称 cX^{α} 为无穷小(大)量 Y 的**主部**。

由性质 1 可知，$cX^{\alpha}(c\neq 0)$为无穷小(大)量 Y 的主部的充要条件是

$$Y = cX^{\alpha} + o(X^{\alpha}).$$

例 4 设 Y_1, Y_2 分别是同一极限过程中的 p 阶与 q 阶无穷小(大)，则

(1) $p\neq q$ 时，$Y_1 \pm Y_2$ 是 $\min(p, q)$ 阶无穷小，($\max(p, q)$ 阶无穷大)。

(2) $Y_1 \cdot Y_2$ 是 $p+q$ 阶无穷小(大)。

(3) $\dfrac{Y_1}{Y_2}$是 $p-q(p>q)$阶无穷小(大)。

证 就无穷小情形证明，关于无穷大情形可类似证明。设 X 是基本无穷小，由假设

$$\lim \frac{Y_1}{X^p} = C_1 \quad (\text{非零有限}),$$

$$\lim \frac{Y_2}{X^q} = C_2 \quad (\text{非零有限}).$$

(1) 不妨设 $p>q$，则

$$\lim \frac{Y_1 \pm Y_2}{X^{\min(p,q)}} = \lim \frac{Y_1 \pm Y_2}{X^q} = \lim \frac{Y_1}{X^q} \pm \lim \frac{Y_2}{X^q}$$

$$= \lim \frac{Y_1}{X^p} \lim X^{p-q} \pm \lim \frac{Y_2}{X^q}$$

$$= C_1 \cdot 0 \pm C_2 = \pm C_2 \quad (\text{非零有限}),$$

故 $Y_1 \pm Y_2$ 是 $\min(p, q)$阶无穷小。

(2) $\lim \dfrac{Y_1 Y_2}{X^{p+q}} = \lim \dfrac{Y_1}{X^p} \cdot \lim \dfrac{Y_2}{X^q} = C_1 C_2$ (非零有限)，

故 $Y_1 Y_2$ 为 $p+q$ 阶无穷小。

(3) $\lim \dfrac{\dfrac{Y_1}{Y_2}}{X^{p-q}} = \lim \dfrac{\dfrac{Y_1}{X^p}}{\dfrac{Y_2}{X^q}} = \dfrac{\lim \dfrac{Y_1}{X^p}}{\lim \dfrac{Y_2}{X^p}} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (非零有限)，

故 $\dfrac{Y_1}{Y_2}$是 $p-q(p>q)$阶无穷小。 □

注意，两个同阶无穷小(大)在作加减法时，$Y_1 \pm Y_2$ 的阶是不确定的。例如，当 $x\to 0$ 时，x；$x+x^2$；$x+x^3$ 都是一阶无穷小，而 $x-(x+x^2)$为二阶无穷小，$x-(x+x^3)$为 3 阶无穷小。

例 4 的结论非常有用，可借助下面口诀记住：

无穷小(大)作运算，加法：无穷小的阶从低，无穷大的阶从高；同阶无穷小(大)相加阶不定；乘法：阶相加；乘以非零常数阶不变；除法：阶相减。

例 5 当 $x\to 0$ 时，

$\sin\sqrt{x}$ 是$\dfrac{1}{2}$阶无穷小量，其主部为$\sqrt{x}$；

$\sin x^2$ 是 2 阶无穷小量，其主部为 x^2；

$1-\cos x$ 是 2 阶无穷小量，其主部为 $\dfrac{1}{2}x^2$；

x^2+x 是 1 阶无穷小量，其主部为 x；

$x^n+x^m(n, m\in \mathrm{N}, n\neq m)$是 $\min(n, m)$阶无穷小量，其主部为$x^{\min(n,m)}$；

$\dfrac{x^5+2x^7}{2x^2+3x^3}$是 $5-2=3$ 阶无穷小，其主部为$\dfrac{1}{2}x^3$；

$\sqrt{x+x^2+x^3}$ 是$\dfrac{1}{2}$阶无穷小，其主部为$\sqrt{x}$；

$\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是$\dfrac{1}{8}$阶无穷小，其主部为 $x^{\frac{1}{8}}$。

例 6 当 $x\to\infty$ 时，

$2x^2+x$ 是 2 阶无穷大量，其主部为 $2x^2$；

$x^p+x^q(p, q>0, p\neq q)$是 $\max(p, q)$阶无穷大量，其主部为$x^{\max(p,q)}$；

$\dfrac{x^5+2x^7}{2x^2+3x^3}$是 $7-3=4$ 阶无穷大量，其主部为$\dfrac{2}{3}x^4$；

$\sqrt{x+x^2+3x^3}$是$\dfrac{3}{2}$阶无穷大量，其主部为$\sqrt{3}\,x^{\frac{3}{2}}$；

$\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大量，其主部为 $\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}$。

由 §1.3 习题 7，设 $a>1$，则

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0\quad(\mu>0),\tag{6.2}$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{a^{\mu}}=0\quad(\mu>0),\tag{6.3}$$

$$(3)\ \lim_{x\to0+}x^{\beta}\log_a x=0\quad(\beta>0)。\tag{6.4}$$

因此，当 $a>1$ 时，无穷大量 $a^x(x\to+\infty)$，$\log_a x(x\to+\infty)$ 与基本无穷大量 x 相比都没有确定的有限阶数，且当 $x\to+\infty$ 时，

$a^x(a>1)$ 是比任何 x^{μ}（μ 不论多大的正数）都要高阶的无穷大。

$\log_a x(a>0,a\neq1)$ 是比任何 x^{α}（α 不论多小的正数）都要低阶的无穷大。

由式(6.4)知，当 $x\to0+$ 时，

$\log_a x(a>0,a\neq1)$

是比任何 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}$（$\beta$ 不论多小的正数）都要低阶的无穷大。

3. 不定型的极限

1）不定型极限的类型

若 $\lim X=A$，$\lim Y=B$，在极限的四则运算法则中要求 A，B 为有限数，且作商时分母的极限不为 0。如果 A 或 B 中至少有一个为 $\pm\infty$，或作商时分母极限为 0，这时极限的四则运算法则不能直接用，但是表 1 所列情形极限的四则运算仍有确定的极限值。

除表 1 以外，极限的四则运算出现如下四种不能立即确定其极限值的不定型：

$$\frac{0}{0};\quad\frac{\infty}{\infty};\quad0\cdot\infty;\quad\infty-\infty。$$

利用函数的连续性，对于幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的极限，若 $\lim u(x)$；

表 1

运　算	条件(A、B为有限数)	结　　论
加法	$\lim X=+\infty$, $\lim Y=B$ 或 $+\infty$	$\lim(X+Y)=+\infty$
	$\lim X=-\infty$, $\lim Y=B$ 或 $-\infty$	$\lim(X+Y)=-\infty$
乘法	$\lim Y=\pm\infty$, $\lim X=A\neq 0$ 或 $\pm\infty$	$\lim X\cdot Y=\pm\infty$
除法	$\lim\lvert Y\rvert=+\infty$, $\lim X=A$	$\lim\dfrac{X}{Y}=0$
	$\lim Y=0$, $Y\neq 0$, $\lim X=A\neq 0$ 或 $\pm\infty$	$\lim\dfrac{X}{Y}=\pm\infty$

$=a>0$, $\lim v(x)=b$(a、b是有限数)，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b. \tag{6.5}$$

事实上，据指数函数与对数函数的连续性，有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim(v(x)\ln u(x))}$$

$$=e^{\lim v(x)\lim\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b.$$

如果式(6.5)中$a=1$, $b=\pm\infty$；或$a=0+$, $b=0$；或$a=+\infty$, $b=0$，则 $\lim(v(x)\ln u(x))$ 成为“$0\cdot\infty$”不定型，从而 $\lim u(x)^{v(x)}$，分别成为“1^∞”，“0^0”，“∞^0”不定型，当a, b是上述类型之外的其他形式时，$\lim u(x)^{v(x)}$ 都是确定的。

综上可得，不定型共有七类：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

2) 求不定型极限的例

在求不定型极限的过程中经常要用到下面六种重要极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{6.6}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{6.7}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \tag{6.8}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,$ (6.9)

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ (μ 任意实数), (6.10)

(6) 设 $a>1, \mu>0$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0, \tag{6.11}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\mu}=0, \tag{6.12}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^\mu\log_a x=0. \tag{6.13}$$

下面举例说明如何利用以上重要极限及等价无穷小替换求不定型的极限.

例 7 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\begin{pmatrix}a>0\\ b>0\end{pmatrix}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}$.

解 (1) 因为 $x^x=e^{x\ln x}$, 而 $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x=0$, 故

$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^0=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)},$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a$, $\lim\dfrac{b^x-1}{x}=\ln b$,

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e \quad \left(\text{其中 } u=\frac{a^x+b^x-2}{2}\to 0, \text{当 } x\to 0\right)$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}\ (a>0,\ b>0).$$

(3) 当 $x\to 0$ 时，

$$\ln\cos ax\sim\cos ax-1\sim-\frac{1}{2}(ax)^2,$$

$$\ln\cos bx\sim\cos bx-1\sim-\frac{1}{2}(bx)^2,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(ax)^2}{-\frac{1}{2}(bx)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时，

$$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x\sim\frac{1}{2}x^2,\ e^{x^2}-1\sim x^2,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(5) 当 $x\to 0$ 时，

$$\operatorname{tg}x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\operatorname{tg}x-\sin x}-1)\sim\operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{x^3}{2},$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=1.$$

(6) 当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x\to 0$，$1-\sin x\to 0$，

$$1-\cos(1-\sin x)\sim\frac{1}{2}(1-\sin x)^2,\ \sin^4(\cos x)\sim\cos^4 x,$$

故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(1-\sin x)^2}{\cos^4 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-\sin x)^2}{(1-\sin^2 x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(1+\sin x)^2} = \frac{1}{8}. \qquad \square$$

§1.6 习　　题

1. 用 Ax^α 型或 $A(x-a)^\alpha$ 型等价量填空：

(1) 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_{n+m}x^{n+m}$，$a_n, a_{n+m}\neq 0$，$n$、$m\in \mathbf{N}$，则 $P(x)\sim$_____$(x\to 0)$；$P(x)\sim$_____$(x\to+\infty)$.

(2) $(1+x)(1+x^2)\cdots\cdots(1+x^n)\sim$_____$(x\to+\infty)$.

(3) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^P}\sim$_____$(n\to\infty)$.

(4) $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}\sim$_____$(x\to 0+)$；

$\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}\sim$_____$(x\to+\infty)$.

(5) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}\sim$_____$(x\to 0+)$；

$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}\sim$_____$(x\to+\infty)$；

$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim$_____$(x\to 0)$；

$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim$_____$(x\to 0)$.

(6) $A\neq 0$，$A(x-a)^n+o((x-a)^n)\sim$_____$(x\to a)$.

(7) $a\neq 0$，$\sin ax\sim$_____$(x\to 0)$；

$\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}}\sim$_____$(n\to\infty)$.

(8) p、$q>0$，$\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^p+n^q}\sim$_____$(n\to\infty)$.

(9) $\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\sin x}\sim$_____$(x\to 0)$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$　$(a>0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} e^{\frac{1}{\cos x}}\ln\dfrac{2x}{\pi}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{e^{ax}-e^{bx}}$ $(a\neq b)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\,\mathrm{tg}\,6x}$.

3. 用 Ax^α 或 $A(x-a)^\alpha$ 型等价量填空.

(1) $\ln\cos x\sim$ _____ $(x\to 0)$;

(2) $\ln(1-\sin x)\sim$ _____ $(x\to 0)$;

(3) $p>0$, $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n-1}{n+1}\sim$ _____ $(n\to\infty)$;

(4) $a, b>0$, $\log_{b^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n^2}\right)\sim$ _____ $(n\to\infty)$.

4. 利用等价替换法求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\,\mathrm{arctg}\,x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc\,tg}\,x^2}{\arcsin 5x\sin\dfrac{x}{2}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

2 一元函数的微分学

§2.1 导数与微分的概念

1. 引出导数的例子

例 1 曲线切线的斜率

设有连续曲线 $L: y=f(x)$，如图 2.1 所示，$A(a, f(a))$是 L 上一点，在曲线 L 上点 A 附近另取一点 $P(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$，连接点 A 与 P 的直线是曲线L的一条**割线**，当点P沿 L 趋向点 A 时，割线随之转动，若割线有一极限位置 AT，则称直线 AT 为曲线 L 在点 A 的**切线**. 为求切线的方程，只需求出切线的斜率，而割线AP的斜率为

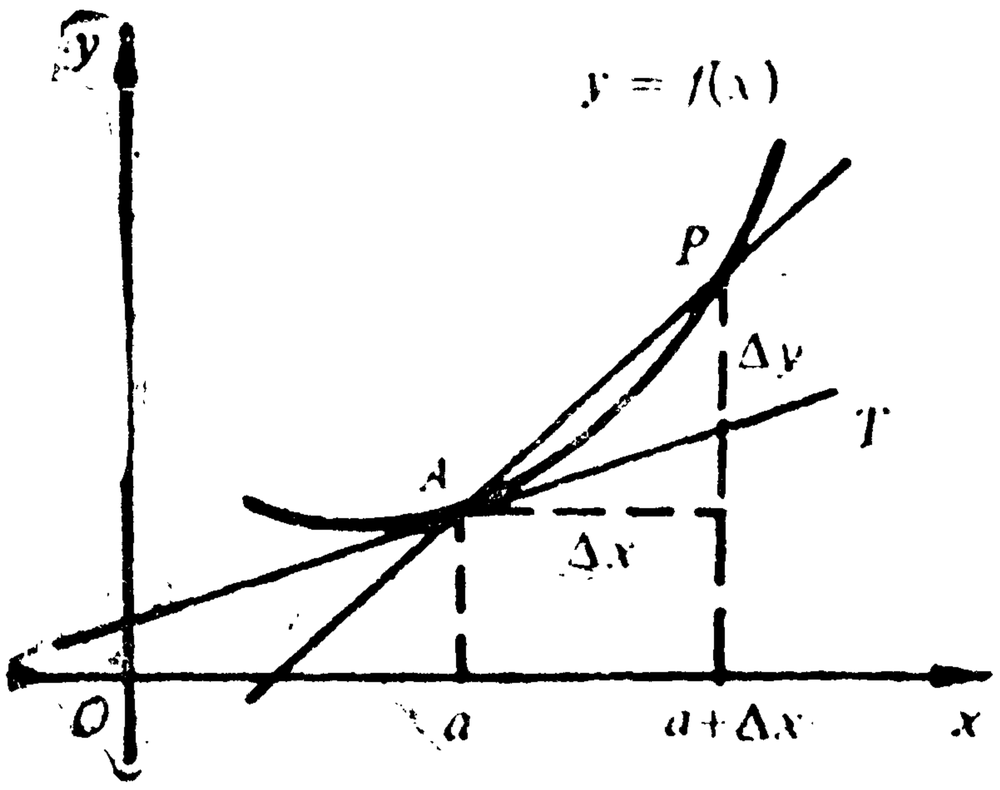


图 2.1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},$$

当点 P 沿 L 趋向点 A 时 $\Delta x\to 0$，所以，割线 AP 的斜率亦趋于极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=k,$$

值 k 即是切线 AT 的斜率.

例 2 速度. 一个质点 M 沿着直线运动，其运动规律为 $s=s(t)$，t 是时间，s 是路程，我们来求时刻 t 质点 M 的瞬时速度 $v(t)$.

解 在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间间隔内，质点走过的路程为 $\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t)$，这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}(t,\Delta t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t},$$

显然，Δt 越小，这个平均速度 $\bar{v}(t,\Delta t)$ 越接近于时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$。因此，当 $\Delta t\to 0$ 时 $\bar{v}(t,\Delta t)$ 的极限便是质点 M 在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，即有

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

以上两个例子分别属几何问题与物理问题，但解决的方法却是一样的，都化为求因变量增量与自变量增量之比的一种极限问题，这种极限问题就是本节讨论的导数。

2. 导数的概念

定义 1（导数） 设函数 f 在点 a 的某一邻域 U 内定义。给 a 以增量 $\Delta x(a+\Delta x\in U)$，则因变量相应地有增量 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\tag{1.1}$$

存在有限，则称函数 f 在点 a **可导**，并称此极限值为 f 在点 a 的**导数**，记为

$$f'(a),\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a\ \text{或}\ \left.y'\right|_a,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}\text{等。}$$

如果极限(1.1)不存在，则说函数 f 在点 a **不可导**。不可导情形之一是极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

为正(负)无穷大，这时也称 f 在点 a 有**无穷导数**。

从定义 1 可见，例 1 中曲线上点 $A(a,f(a))$ 处切线的斜率 $k=f'(a)$，据解析几何中直线的点斜式方程，立即可写出该切线**方程**为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a),$$

法线方程为

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a),$$

在无穷导数情形，切线垂直于 x 轴，切线方程为 $x=a$。

例 2 中质点的运动速度 $v(t)=s'(t)$。

在物理上，当 $m(x)$ 代表(质量分布不均匀)细杆在 OA 段的质

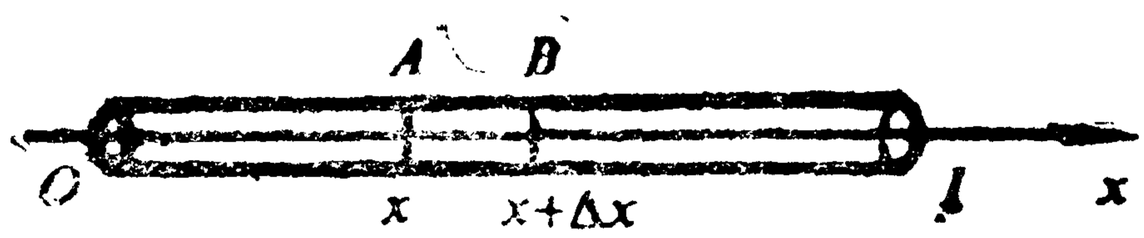


图 2.2

量时(见图 2.2)，在点 A 附近取一点 B，令 $AB=\Delta x$，则 AB 段的质量是 $m(x+\Delta x)-m(x)$，比值

$$\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$$

表示 AB 段上每单位长度的质量，即是平均线密度，而杆在 A 处的**线密度** ρ 为

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}.$$

当 $Q(t)$ 代表电路中通过导线横截面的电荷量变化规律时，**比值**

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}$$

是从 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的平均电流强度，在时刻 t 的**电流强度** $i(t)$则是

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

根据导数定义，函数 f 在点 a 处的导数

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

是一个极限。而极限(1.1)存在的充分必要条件是左、右极限存在

且相等，即

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\quad 及\quad \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

存在且相等，这两个极限分别称为函数 f 在点 a 处的**左导数**及**右导数**，记为 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$，即

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

若函数 f 在点 a 处存在左、右导数，则曲线 $y=f(x)$ 在该点分别存在斜率为 $f'_-(a)$ 的左半切线和斜率为 $f'_+(a)$的右半切线. 若 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，则曲线在该点有一"尖点".

例 3 讨论 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 如图 2.3 所示，易证

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

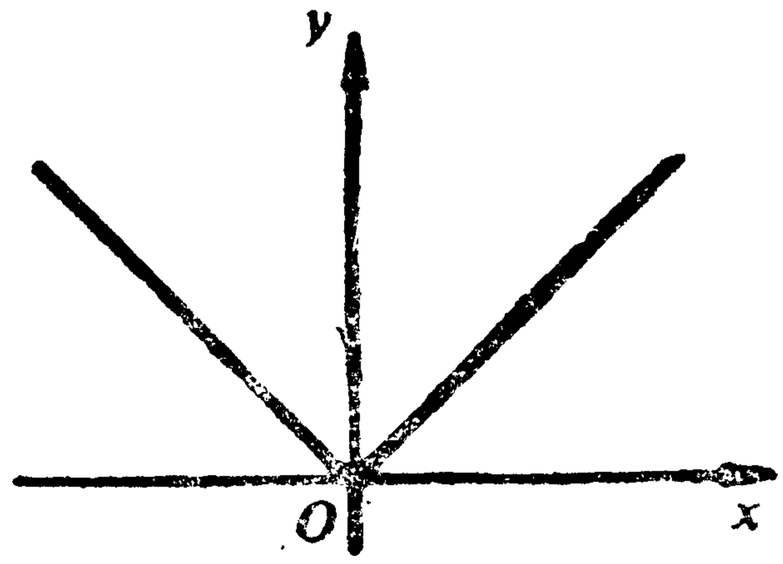


图 2.3

在 $x=0$ 处连续，但

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

左、右导数存在而不相等，故它在 $x=0$ 处不可导.

当函数 f 在开区间 I 内处处可导，就说 f 在 I 内可导，其导数是定义在 I 上的函数，称为函数 f 的**导函数**(也称导数)，记为

$$f',\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad y',\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

如果f在 I 内有连续的导函数，则称函数 f 在 I 内**连续可导**，记为 $f\in C^1(I)$.

由式(1.1)可知，函数 f 在点 a 处的导数$f'(a)$就是导函数 f'

在点 a 的函数值，即

$$f'(a)=f'(x)\Big|_{x=a}.$$

下面给出一些基本初等函数的导数.

例 4 $y=C$（常数），则 $y'=0$.

证 因为 $\Delta y=C-C=0$，所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，故 $y'=0$.

例 5 $y=x^{\mu}$，$\mu\in R$，$x\neq 0$，则 $y'=\mu x^{\mu-1}$.

证
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\mu-1}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1\right]}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\mu x^{\mu-1}.$$

特别有
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例 6 $y=\mathrm{e}^{x}$，则 $y'=\mathrm{e}^{x}$.

证
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^{x}}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to \mathrm{e}^{x}(\Delta x\to 0).$$

例 7 $y=\ln x$，则 $y'=\dfrac{1}{x}$.

证
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$\longrightarrow\frac{1}{x}\ (\Delta x\to 0).$$

例 8 $y=\sin x$，则 $y'=\cos x$.

证
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\longrightarrow\cos x(\Delta x\to 0).$$

例 9 $y=\cos x$，则 $y'=-\sin x$。

证
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$
$$=\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\longrightarrow -\sin x(\Delta x\to 0).$$

定理 1（增量公式） 若函数 f 在点 a 可导，则
$$f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+o(\Delta x). \tag{1.4}$$

证 据导数的定义，当 $\Delta x\to 0$ 时，有
$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\longrightarrow f'(a),$$
即
$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x}{\Delta x}\longrightarrow 0,$$
因此有
$$f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x=o(\Delta x),$$
移项即得式(1.4)。 □

由定理 1 可得以下推论。

推论（可导与连续）

(1) 若函数 f 在点 a 可导，则 f 在点 a 连续；

(2) 若函数 f 在点 a 左(右)可导，则 f 在点 a 左(右)连续；

(3) 若函数 f 在区间 I 上可导，则 f 在 I 上连续。（函数 f 在闭区间 I 上可导指 f 在 I 内部可导，在 I 的左端点处右可导，右端点处左可导）

注意，函数 f 在某点 a 连续，不一定可导，例如，函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 连续，但不可导。

例 10 确定常数 a 和 b，使函数
$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 2\\ ax+b, & x<2\end{cases}$$
在 $x=2$ 处可导

解　因为函数 f 在 $x=2$ 处可导，所以其左、右导数 $f'_-(2)$ 与 $f'_+(2)$ 存在且相等。由于

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a(2+\Delta x)+b-e^2}{\Delta x}$$

存在有限，而分母的极限为 0，故分子的极限必须为 0，即有

$$\lim_{\Delta x\to 0-}[a(2+\Delta x)+b-e^2]=0\Rightarrow 2a+b=e^2 \qquad (1.5)$$

因此可得 $f'_-(2)=a$。并且有

$$a=f'_+(2)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{e^{2+\Delta x}-e^2}{\Delta x}=e^2,$$

将 $a=e^2$ 代入式(1.5)解得 $b=-e^2$。

注　可导必定连续，式(1.5)就是 f 在 $x=2$ 处连续满足的条件。

3. 微分的概念

定义 2(*微分*)　设函数 f 在区间 I 上定义，对点 $a\in I$，当自变量有增量 Δx 时，相应地因变量 y 有增量 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$，若当 $\Delta x\to 0$ 时，有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1.6)$$

其中 A 与 Δx 无关(一般与 a 有关)，则称函数 f 在点 a **可微**，且称 $A\Delta x$ 为 f 在点 a 的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(a)\quad 或\quad \mathrm{d}y\Big|_{x=a},$$

即

$$\mathrm{d}f(a)=A(a)\Delta x\quad 或\quad \mathrm{d}y\Big|_{x=a}=A(a)\Delta x.$$

从定义 2 可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，无穷小 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的主部，又 $\mathrm{d}y$ 关于 Δx 是一次的，故称 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的**线性主部**。

微分与导数是两个完全不同的概念，但它们是紧密联系的，请看以下定理。

定理 2（可导与可微等价）　函数 f 在点 a 可微的充要条件

是 f 在点 a 存在有限导数 $f'(a)$，且有 $A=f'(a)$，即

$$\Delta y=f'(a)\Delta x+o(\Delta x),\ \mathrm{d}y=f'(a)\Delta x. \tag{1.7}$$

证 必要性 已知 f 在点 a 可微，即式(1.6)成立，则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$ 取极限，即得

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{存在，且}\ A.$$

充分性 已知 f 在点 a 可导，由定理1式(1.4)得

$$\Delta y=f'(a)\Delta x+o(\Delta x),$$

可见 f 在点 a 可微，且 $A=f'(a)$。 □

对一元函数而言，由于可微与可导是等价的，因此常把可导说成可微。

约定自变量 x 的增量 Δx 为自变量的微分，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，于是，微分可写成 $\mathrm{d}y=f'(a)\mathrm{d}x$；如果函数 f 在区间 I 内处处可微，则微分是 x 的函数，写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

与导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$ 比较，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 不但表示导数，而且可理解为因变量微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量微分 $\mathrm{d}x$ 的商，因此，人们也称导数为**微商**。

因为微分是增量的线性主部，而求 $\mathrm{d}y$ 比求 Δy 容易，所以，当 Δx 很小时，忽略高价无穷小项 $o(\Delta x)$，可用 $\mathrm{d}y$ 作为 Δy 的近似值，即

$$\Delta y\approx\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x. \tag{1.9}$$

或写成

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{1.10}$$

用式(1.9)可近似计算增量 Δy，用式(1.10)可近似计算函数值 $f(x+\Delta x)$。由于不知其精确度，用它们算得的近似值只是给出 Δy（或 $f(x+\Delta x)$）关于 Δx 的一次近似或称线性近似。在许多实际问题的计算中，仅用到函数增量的一次近似值，这时用微分代替增

量使问题线性化，可使计算简化。

§2.1 习　　题

1. 质量为 4 的物体按照 $x=t^2+t+1$ 的规律作直线运动，求物体在时刻 $t=5$ 时的动能。

2. 设球的半径 R 的变化率为 $\frac{dR}{dt}=v$，求球的体积 V 和表面积 S 的变化率 $\frac{dV}{dt}$ 和 $\frac{dS}{dt}$。

3. 设 f 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

并对计算结果作几何解释。

4. 设函数 f, g 在点 $x=0$ 可导，且在点0附近$g(x)\neq 0$，$g'(0)\neq 0$，$f(0)=g(0)=0$，试证

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

5. 设函数 f 在$(-\infty, +\infty)$内定义，且 $\forall x, y$，有

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

$$f(x)=1+xg(x),\ \lim_{x\to 0}g(x)=1,$$

试证：f 在$(-\infty, +\infty)$内处处可导，且 $f'(x)=f(x)$。

6. 设 $f(x)=(x^2-a^2)\varphi(x)$，其中 φ 在点 $x=a$ 连续，求 $f'(a)$。

7. 设 $g(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $g'(0)$。

8. 过抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线分别有下列性质。

(1) 平行于直线 $y=4x-5$。

(2) 垂直于直线 $2x-6y+5=0$。

(3) 与直线 $3x-y+1=0$ 交成 $45°$ 角。

9. 写出所给函数的图形在指定点的切线方程和法线方程。

(1) $y=\sqrt{x}$，$a=4$；

(2) $y=\ln x$，$a=1$。

10. 试求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交角。

11. 求所给函数 f 的左、右导数 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$。

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ -x^2+2x, & x>1,\end{cases}$　$a=1$；

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x^2\ln x, & x>0,\end{cases}$ $a=0$.

12. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续，但在这点既没有左导数，也没有右导数。

13. 下列函数在 $x=0$ 是否连续？是否可导？

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0,\end{cases}$

(2) $f(x)=|\sin x|$，　　(3) $f(x)=e^{|x|}$。

14. 确定常数 a 和 b，使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leqslant 0\\ ax+b, & x>0\end{cases},$$

在 $x=0$ 处可导。

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 求证：(1) f 仅在 $x=0$ 连续；(2) f 仅在 $x=0$ 可导。

16. 证明：线性函数 $y=ax+b$ 的增量 Δy 与微分 dy 是一致的。

17. 当立方体的棱长都增长1厘米时，立方体体积 V 的微分 dV 为2厘米^3，求原棱长。

18. 证明近似公式：

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

并利用此公式计算 $\sqrt[3]{25}$。

§2.2　导数与微分的计算

1. 导数与微分的四则运算

定理1（导数的四则运算）　设函数 u，v 在点 x 可导，则有

(1) $y=u\pm v$ 在点 x 可导，且有

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

(2) $y=uv$ 在点 x 可导，且有

$$(uv)' = u'v + uv',$$

特别

$$(cu)' = cu', \ c \text{ 为常数}.$$

(3) 当 $v(x) \neq 0$ 时，$y = \dfrac{u}{v}$ 在点 x 可导，且有

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

特别

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

证 (1) $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= u' + v'.$$

类似可得

$$(u-v)' = u' - v'.$$

$$(2) \quad (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(u(x+\Delta x) - u(x))v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'v + uv'.$$

$$(3) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} v(x) \right.$$

$$\left. - u(x) \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

注 (1)和(2)可推广到有限个函数的情况. 例如, 若 u, v, w 可导, 则有

$$(u+v-w)' = u' + v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

据式(1.8)立即可得以下推论.

推论(微分的四则运算) 设 u, v 是 x 的可微函数, c 是常数, 则有

(1) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$.

(2) $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}(cu) = c\mathrm{d}u$.

(3) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$, $\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

2. 复合函数的导数

定理 2 (复合函数的导数) 设函数 $y = f(u)$ 与 $u = u(x)$ 在 x_0 的邻域能构成复合函数, 且设 $u = u(x)$ 在点 x_0 可导, $y = f(u)$ 在点 $u_0 (= u(x_0))$ 可导, 则复合函数 $f \circ u$ 在点 x_0 可导, 且有

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0) \quad \text{或写成} \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u_0} \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}.$$

证 给 x_0 一个改变量 Δx, 相应地 u_0 有改变量 Δu, y_0 有改变量 Δy. 因在点 x_0 处, $u(x)$ 可导必连续; 在点 u_0 处, $f(u)$ 可导必连续; 所以, 当 $\Delta x \to 0$ 时, $\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$.

当 $\Delta x \neq 0$ 时, 如果 $\Delta u \neq 0$, 由 $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$ 得

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta u, \quad \lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0.$$

而当 $\Delta u = 0$ 时, 约定 $\alpha = 0$, 显然上式仍成立, 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$ 取极限，即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u_0)u'(x_0).$$ □

推论 1 若 $u(x)$，$f(u)$ 可导．则 $f(u(x))$ 是 x 的可导函数，且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u(x))=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)u'(x).$$

推论 2（一阶微分形式不变性） 设 $y=f(u)$，则无论 u 是自变量还是中间变量 $u=u(x)$，其微分形式不变，都是

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

证 设 $u=u(x)$，x 为自变量，则 $y=f(u(x))$，据复合函数求导公式，有

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=f'(u)u'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u.$$ □

由于这个性质，将导数看成两个微分之商时不必顾虑那个变量是自变量的问题，这对求函数的导数或微分带来方便．

例 1 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$，求 $\mathrm{d}y$．

解 令 $u=\sin x$，$y=\mathrm{e}^u$，则

$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^u)'\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u(\sin x)'\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x.$$

例 2 求微分之商 $\dfrac{\mathrm{d}(x^3-2x^6-x^9)}{\mathrm{d}(x^3)}$．

解
$$\frac{\mathrm{d}(x^3-2x^6-x^9)}{\mathrm{d}(x^3)}=\frac{(3x^2-12x^5-9x^8)\mathrm{d}x}{3x^2\mathrm{d}x}$$
$$=1-4x^3-3x^6.$$

例 3 $y=\mathrm{tg}\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，则 $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$．

证
$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

同理可得

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

例 4 $y = \ln|x|$，则 $y' = \dfrac{1}{x}$.

证 §2.1 例 7 已证明，当 $x>0$ 时，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. 而当 $x<0$ 时，$\ln|x| = \ln(-x)$，所以，据复合函数求导法则，有

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x},$$

故当 $x\neq 0$ 时有

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

例 5 $y = \log_a|x|\ (a>0, a\neq 1)$，求 y'.

解 $y = \log_a|x| = \dfrac{\ln|x|}{\ln a}$，$y' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

例 6 $y = a^x\ (a>0, a\neq 1)$，求 y'.

解 $y = a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$，令 $u = x\ln a$，$y = \mathrm{e}^u$，则

$$y' = (\mathrm{e}^u)'(x\ln a)' = \mathrm{e}^u \ln a = a^x \ln a.$$

例 7 设 $y = u^v$，u，v 是 x 的可导函数，求 y'.

解 $y = u^v = \mathrm{e}^{v\ln u}$，令 $w = v\ln u$，$y = \mathrm{e}^w$，则有

$$y' = (\mathrm{e}^w)'(v\ln u)'_x = \mathrm{e}^w\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)$$

$$= u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'.$$

就是说，它等于先将 u 看成常数（即将 u^v 看成指数函数）求导得 $u^v v'\ln u$，再加上将 v 看成常数（即将 u^v 看成幂函数）求导得到的 $vu^{v-1}u'$.

例 8 设 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ （双曲正弦），则

$$y' = \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$ （双曲余弦）.

证 由复合函数求导法则，

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x},$$

所以

$$y' = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

同理可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

例 9 证明双曲正切 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 和双曲余切 $\operatorname{cth} = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ 的导数为

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

证 $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

3. 反函数的导数

定理 3（反函数的导数） 设函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I 内严格单调，又在区间 I 内一点 y 处导数 $\varphi'(y)$ 存在且不为零，则反函数 $y = f(x)$ 在对应点 $x(=\varphi(y))$ 处具有导数 $f'(x)$，且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

换句话说，**反函数的导数等于直接函数导数的倒数。**

证 由 φ 在 I 内严格单调知反函数 f 在相应区间内严格单调。给 x 以增量 $\Delta x \neq 0$，据 f 的单调性可知相应的增量 $\Delta y \neq 0$，故有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

由 φ 在点 y 连续知反函数 f 在对应点 x 连续，因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，上式右边分母的极限为 $\varphi'(y)\neq 0$，因此，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在且有 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例 10 $y=\arcsin x$，则 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

证 函数 $x=\sin y$ 在区间 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ 上严格单调，可导，据定理 3，反函数 $y=\arcsin x$ 在对应区间 $-1<x<1$ 内可导，且有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y},$$

但 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$（取正号是因为 $\cos y>0$），故有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可证

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

例 11 $y=\operatorname{arctg} x$，则 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

证 函数 $x=\operatorname{tg} y$ 在区间 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ 内严格单调，可导，据定理 3，反函数 $y=\operatorname{arctg} x$ 在对应区间 $-\infty<x<+\infty$ 上可导，且有

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\frac{1}{\sec^2 y},$$

而 $\sec^2 y=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2$，代入即得结果.

同理可证

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty).$$

例 12 反双曲函数的导数 证明

$$(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(\operatorname{ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (1 < x < +\infty),$$

$$(\operatorname{ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1).$$

证 只证第一式，其余类似可证。

设 $y = \operatorname{ar\,sh} x$，则 $x = \operatorname{sh} y$，它在区间 $-\infty < y < +\infty$ 上显然单调可导，且有导数 $(\operatorname{sh} y)' = \operatorname{ch} y > 0$，据定理 3，反函数 $y = \operatorname{ar\,sh} x$ 在对应区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有导数

$$(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y},$$

而 $\operatorname{ch} y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \sqrt{x^2+1}$（取正号是因为 $\operatorname{ch} y > 0$），所以

$$(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

4. 导数基本公式

为了便于查阅，我们把前面所得的导数基本公式列成下表。

导 数 公 式 表

1.	$y = c$	$y' = 0$
2.	$y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
	$y = x$	$y' = 1$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3.	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
4.	$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \log_a \lvert x\rvert$	$y' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$

5. $y=\sin x$ $\quad y'=\cos x$

6. $y=\cos x$ $\quad y'=-\sin x$

7 $y=\operatorname{tg} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

8. $y=\operatorname{ctg} x$ $\quad y'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\operatorname{csc}^2 x$

9. $y=\arcsin x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y=\arccos x$ $\quad y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $\quad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

12. $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ $\quad y'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

13. $y=\operatorname{sh} x$ $\quad y'=\operatorname{ch} x$

14. $y=\operatorname{ch} x$ $\quad y'=\operatorname{sh} x$

15. $y=\operatorname{th} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

16. $y=\operatorname{ar\,sh} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

17. $y=\operatorname{ar\,ch} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

18. $y=\operatorname{ar\,th} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{1-x^2}$

由 $\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x$ 读者易写出相应的微分公式表。

例 13 求下列函数的导数。

(1) $y=a^x\cdot x^a(a>0)$, $\quad$ (2) $y=\sin(xe^{-x})$,

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$, $\quad$ (4) $y=(\cos x)^x$,

(5) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$。

解 (1) $y'=(e^{x\ln a+a\ln x})'=e^{x\ln a+a\ln x}(x\ln a+a\ln x)'$

$$=a^x x^a\left(\ln a+\frac{a}{x}\right).$$

(2) $y'=\cos(xe^{-x})(xe^{-x})'=\cos(xe^{-x})\cdot e^{-x}(1-x)$。

(3) $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

(4) $y' = (e^{x\ln\cos x})' = e^{x\ln\cos x}(x\ln\cos x)'$

$$= (\cos x)^x \left(\ln\cos x - \frac{x\sin x}{\cos x}\right).$$

(5) $y' = \dfrac{(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})'}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \frac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}.$$

例 14 求下列函数的导数.

(1) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,

(2) $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$,

(3) $y = x^{x^x}$ $(x>0)$,

(4) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $(a, b, x>0)$.

解 (1) 两边取对数

$$\ln y = \frac{1}{2}(\ln|x-1| + \ln|x-2| - \ln|x-3| - \ln|x-4|),$$

两边求导数

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right),$$

所以

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}.$$

(2) 先取绝对值再两边取对数，得到

$$\ln|y| = \ln|2x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2|,$$

两边求导数

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x-2)},$$

所以

$$y'=(2x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x-2)}\right).$$

(3) 取对数，$\ln y=x^x\ln x$，两边求导数，

$$\frac{y'}{y}=(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)'=x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1},$$

所以

$$y'=x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

(4) $\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a)$，

求导得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{b-a}{x}+\ln\frac{a}{b},$$

所以

$$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\frac{b-a}{x}+\ln\frac{a}{b}\right).$$

例 14 这种取对数后再求导的解法称为**对数求导法**。

例 15 设函数 $y=y(x)$ 由方程

$$xy-e^x+e^y=0$$

确定，求 y'。

解 将方程两边对 x 求导，注意，y 是 x 的函数，e^y 是 x 的复合函数，于是有

$$y+xy'-e^x+e^yy'=0,$$

由此解得

$$y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

例 16 设

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求 y'，并讨论 y' 的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时

$$y'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

在 $x=0$ 处，

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

故

$$y'=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

显然，当 $x\neq 0$ 时，y' 连续；在 $x=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在，故 y' 在 $x=0$ 处不连续，$x=0$ 是 y' 的第二类间断点.

§2.2 习　　题

1. 求下列函数的指定导数.

(1) $y=2^x+x^2+2$，求 $y'(0)$，$y'(1)$.

(2) $f(\theta)=\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta}$，证明：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

2. 求曲线 $y=x(\ln x-1)$ 在点(e, 0)的切线和法线.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,　　(2) $y=x\sqrt{1+x^2}$,

(3) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$,　　(4) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$,

(5) $y=\sin[\cos^2(\mathrm{tg}^3x)]$,　　(6) $y=\ln^3x^2$,

(7) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\dfrac{a}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a})$,

(8) $y=\arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$,　　(9) $y=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$,

(10) $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$,　$(a>b\geqslant 0)$,

(11) $y=\sqrt[x]{x}\,(x>0)$,　　(12) $y=(1+x^2)^{5x}$,

(13) $y=(\cos x)^{\sin x}$,　　(14) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$.

4. 证明：曲线 $x^2-y^2=a$ 和 $xy=b$ 在其交点处的切线互相垂直。

5. 求下列函数的微分。

(1) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$,　　(2) $y=10\sqrt{1-x^2}$,

(3) $v=\operatorname{arc\,tg}(\ln s)$,　　(4) $y=\sin^2[\ln(3x+1)]$,

(5) $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

6. 求下列微分之商。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}x)}{\mathrm{d}(\operatorname{ctg}x)}$,　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

7. 利用微分求线性近似式(设$|x|$很小)。

(1) $\sqrt{4-5x}$,　　(2) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

8. 计算下列各数的近似值。

(1) $(1.05)^8$,　　(2) $\sin 29°$,

(3) $(66)^{\frac{2}{3}}$,　　(4) $(33)^{-\frac{1}{5}}$.

§2.3　高阶导数与高阶微分

1. 高阶导数

假定函数 f 在区间 I 上可导，则在 I 上定义了一个函数 f'，称 f' 为 f 的一阶导函数(或一阶导数)。若 f' 在 I 上仍有导数，则它的导数 $(f')'$ 记为

$$f'',\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\quad 或\quad y'',\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},$$

称为 f 的二阶导函数(或二阶导数)。对二阶导数再求导得三阶导数。以此类推，对任意正整数 n，可得 n 阶导数，记为

$$f^{(n)},\ \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \quad 或 \quad y^{(n)},\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

如果在 I 上 f 的 n 阶导函数连续，则称 f 在 I 上 n 阶连续可导，记作 $C^n(I)$.

由上可见，求高阶导数实际上是逐次求一阶导数. 例如，给定了路程 $s(t)$，求一次导数得到速度 $v(t)$，再求一次导数得到加速度 $a(t)$，即有

$$s'(t)=v(t),\quad s''(t)=v'(t)=a(t).$$

一般说来，要归纳出 n 阶导数的通式是极其困难的，下面仅举出部分基本初等函数求 n 阶导数的例子.

例 1 $y=x^{\mu}$（μ 是常数），求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\mu x^{\mu-1}$，$y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$，

$$y'''=\mu(\mu-1(\mu-2)x^{\mu-3},$$

利用数学归纳法，易证得

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}. \tag{3.1}$$

特别，$\mu=n$（正整数），则有

$$(x^n)^{(n)}=n!,\ (x^n)^{(n+k)}=0(k=1,2,\cdots).$$

$\mu=-1$，则有

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-1-n+1)x^{-1-n}$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{3.2}$$

例 2 $y=\ln x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{x}$，利用式(3.2)立即可得

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{3.3}$$

例 3 $y=\mathrm{e}^{ax}$（a 为常数），求 $y^{(n)}$.

解 $y'=a\mathrm{e}^{ax}$，$y''=a^2\mathrm{e}^{ax}$，用数学归纳法易证得

$$y^{(n)}=(\mathrm{e}^{ax})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}. \tag{3.4}$$

例 4、$y=\sin x$，求 $y^{(n)}$。

解　$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

用数学归纳法易证得

$$y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.5}$$

类似可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.6}$$

高阶导数的运算公式　设函数 u，v 都 n 阶可导，则有

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$。 (3.7)

(2) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$　(c 为常数)。 (3.8)

(3) 莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(n-i)}v^{(i)} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^{i-1}u^{(n-i+1)}v^{(i-1)}\\&\quad+C_n^iu^{(n-i)}v^{(i)}+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)},\end{aligned}$$

其中 $C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 是组合数。

用数学归纳法证明。(1)，(2)显然。

(3)的证明　当 $n=1$ 时，公式 (3.9) 是熟知的公式 $(uv)'=u'v+uv'$。假设 n 时公式(3.9)成立，则当 $n+1$ 时，

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)}&=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+C_n^1(u^{(n)}v'+u^{(n-1)}v'')+\\&\quad\cdots+C_n^{i-1}(u^{(n-i+2)}v^{(i-1)}+u^{(n-i+1)}v^{(i)})\\&\quad+C_n^i(u^{(n-i+1)}v^{(i)}+u^{(n-i)}v^{(i+1)})+\cdots\\&\quad+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)},\end{aligned}$$

合并同类项，并利用 $C_n^{i-1}+C_n^i=C_{n+1}^i$，可得和式的一般项为

$$(C_n^{i-1}+C_n^i)u^{(n-i+1)}v^{(i)}=C_{n+1}^iu^{(n+1-i)}v^{(i)},$$

故有

$$(uv)^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+C_{n+1}^1u^{(n)}v'+\cdots$$

$$+C_{n+1}^{i}u^{(n+1-i)}v^{(i)}+\cdots+uv^{(n+1)}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^{i}u^{(n+1-i)}v^{(i)},$$

据数学归纳法知，式(3.9)成立。

例 5 $y=x^2e^x$，求 $y^{(10)}$。

解 $y^{(10)}=(e^x)^{(10)}x^2+C_{10}^{1}(e^x)^{(9)}(x^2)'+C_{10}^{2}(e^x)^{(8)}(x^2)''$

$$=e^xx^2+10e^x\cdot 2x+45e^x\cdot 2=e^x(x^2+20x+90)。$$

例 6 $y=\operatorname{arc\,tg}x$，求 $y^{(n)}(0)$。

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即有

$$(1+x^2)y'=1。$$

两边对 x 求 n 阶导数，得到

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+ny^{(n)}(1+x^2)'+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)}(1+x^2)''=0,$$

即

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,$$

令 $x=0$，得递推公式

$$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0。$$

因 $y'(0)=1$，$y''(0)=0$，故当 n 为奇数 $2k+1$ 时，有

$$y^{(2k+1)}(0)=-2k(2k-1)y^{(2k-1)}(0)=\cdots=(-1)^k(2k)!,$$

当 n 为偶数 $2k$ 时，有

$$y^{(2k)}(0)=0。$$

2. 高阶微分

和高阶导数一样，对一阶微分 dy 再求微分得到二阶微分，记为 d^2y，即

$$d^2y=d(dy)。$$

类似可定义各阶微分。

对 $y=f(x)$，当 x 是自变量时，$dx=\Delta x$ 可任意变化，与 x 无关，因此，对 x 求导时，dx 可看作常数，故有

$$dy=f'(x)dx,$$

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

为书写方便，$(\mathrm{d}x)^2$习惯上记作$\mathrm{d}x^2$（注意$(\mathrm{d}x)^2=\mathrm{d}x^2\neq\mathrm{d}(x^2)$），于是

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2. \tag{3.10}$$

同样可得

$$\mathrm{d}^3y=f'''(x)\mathrm{d}x^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n. \tag{3.11}$$

由此可得

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

这样，前面引入的高阶导数记号$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$，现在可以看成是函数$y$的$n$阶微分$\mathrm{d}^ny$与自变量的一阶微分$\mathrm{d}x$的$n$次幂之商了。

由以上讨论易得以下n阶微分的运算法则：

$$\mathrm{d}^n(u\pm v)=\mathrm{d}^nu\pm\mathrm{d}^nv. \tag{3.12}$$

$$\mathrm{d}^n(uv)=(uv)^{(n)}\mathrm{d}x^n=\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(n-i)}v^{(i)}\right)\mathrm{d}x^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\mathrm{d}^{n-i}u\mathrm{d}^iv. \tag{3.13}$$

公式(3.13)也称为**莱布尼兹公式**。

当x不是自变量而是中间变量时，即$y=f(x)$，$x=x(t)$，据一阶微分形式不变性虽有$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，但$\mathrm{d}x$不可任意变化了，而是有$\mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t$，因此，

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$$

$$=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x. \tag{3.14}$$

比较式(3.10)与(3.14)，可见多出了一项$f'(x)\mathrm{d}^2x$。因此，对x是中间变量，二阶微分的形式是改变的，更高阶微分当然也如此。

§2.3 习　　题

1. 求下列函数的二阶导数。

(1) $y=\sqrt{1+x}$，　　(2) $y=x^{\sqrt{x}}$，

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=a^x$,　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$,

(3) $y=\sin x\sin 3x$,　　(4) $y=\sin^2 x$.

3. 证明: $y=\arcsin x\cdot\arccos x$ 满足

$$(1-x^2)y''-xy'+2=0.$$

4. 求下列高阶导数.

(1) $y=\dfrac{x^8}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$;

(2) $y=x\ln x$, 求 $y^{(5)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(10)}$.

5. 求下列指定阶微分, 其中 x 是自变量, u, v 是 x 的足够次可微函数.

(1) $y=\sqrt{x}$, 求 d^3y;　　(2) $y=\dfrac{u}{v}$, 求 d^2y.

§2.4 微分中值定理

1. 两个引理

定义 1 (极值)　设 f 是定义在区间 I 上的一个实函数, $a\in I$, 如果存在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$, 使

$$f(x)\leqslant f(a),\quad x\in U,\tag{4.1}$$

则称 f 在点 a 取**极大值** $f(a)$, 称 a 为 $f(x)$ 的**极大点**;如果

$$f(x)\geqslant f(a),\quad x\in U,\tag{4.2}$$

则称 f 在点 a 取**极小值** $f(a)$, 称 a 为 $f(x)$ 的**极小点**. 极大、小值统称为**极值**, 达到极值的点统称为**极值点**. 若在式(4.1),(4.2)中当 $x\neq a$ 时, 严格不等式成立, 就称这种极大或极小为**严格的极大或极小**.

引理 1 (费马(Fermat)定理)　设函数 f 在点 a 的某邻域有定义, 在点 a 可导. 如果 $f(x)$ 在点 a 取极大或极小, 则 $f'(a)=0$.

证 不妨设 $f(x)$ 在点 a 取极大，于是，存在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$，使

$$f(a+\Delta x)\leqslant f(a),\quad a+\Delta x\in U.$$

据假设 $f'(a)$ 存在有限，因此，$f'_-(a)=f'_+(a)=f'(a)$.

当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\geqslant 0$，故

$$f'(a)=f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\leqslant 0$，故

$$f'(a)=f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

因此只能等号成立，即有 $f'(a)=0$.

对 $f(x)$ 在点 a 取极小的情形，只要将上述不等式的不等号改为相反方向，即可得结论。 □

从几何直观看，费马定理表示，对于一条在点 $(a, f(a))$ 处有切线的连续曲线来说，如果在 U 内该点是最高点（或最低点），则在该点的切线是水平的（见图 2.4）.

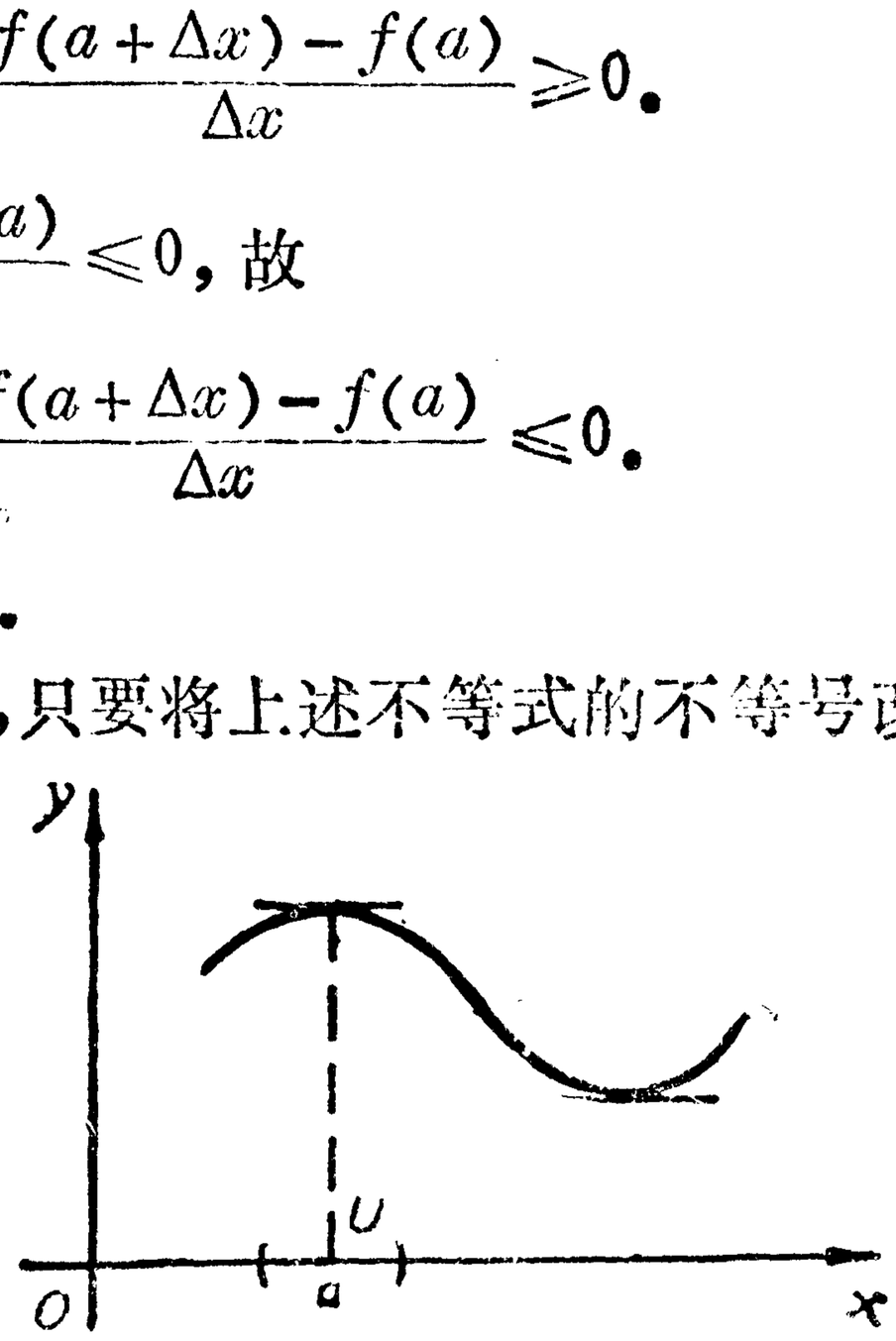


图 2.4

费马定理给出了极值的必要条件，但这条件不充分。使 $f'(x)=0$ 的点不一定是极值点，例如，$y=x^3$，$f'(0)=0$，而它在 $x=0$ 不取极值.

引理 2（罗尔(Rolle)定理） 设函数 f 满足：

1° 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

2° 在开区间 (a, b) 上可导；

3° $f(a)=f(b)$.

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证 因为 f 在 $[a, b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最大值

M、最小值 m。有两种可能：

(1) 若 $M=m$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 为常数，因此对 (a, b) 内的任一点 x 都有 $f'(x)=0$，即 ξ 可取 (a, b) 内任一点。

(2) 若 $M\neq m$，则 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$，不妨设 $M\neq f(a)=f(b)$，于是至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=M$，据费马定理得到 $f(\xi)=0$。 □

罗尔定理的几何意义是明显的：对于一条处处有不垂直于 x 轴的切线的连续曲线来说，如果两端在同一水平线上，则在内部至少有一条切线是水平的(见图 2.5)。

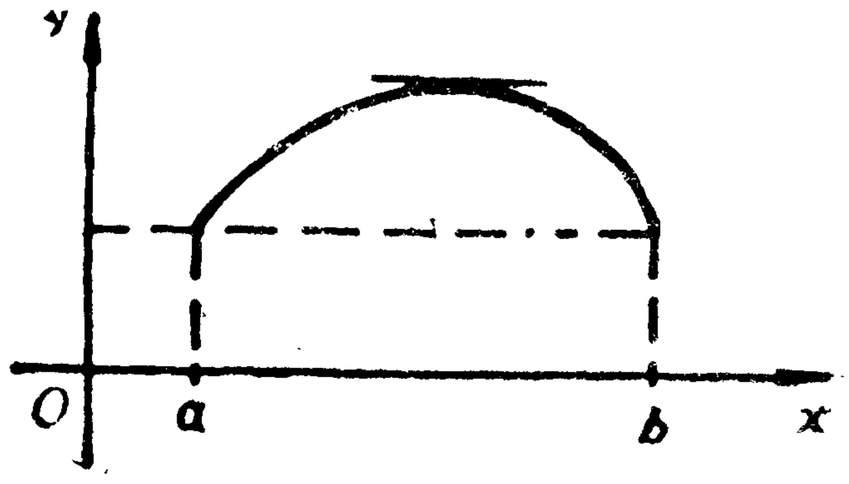


图 2.5

罗尔定理的三个条件是重要的，如果缺少一个条件，使 $f'(\xi)=0$ 的 ξ 可能就找不到。请读者分析以下三个函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$ 条件 1° 不满足；

$$f_2(x)=|x|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$$ 条件 2° 不满足；

$$f_3(x)=x,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$ 条件 3° 不满足。

2. 中值定理

如果罗尔定理的条件 3° 不成立，即 $f(a)\neq f(b)$，从图 2.6 可见，在曲线上至少存在一点 $P(\xi, f(\xi))$，使得在点 P 的切线平行于曲线段两端点的连线 AB。而直线 AB 的斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

故有以下定理。

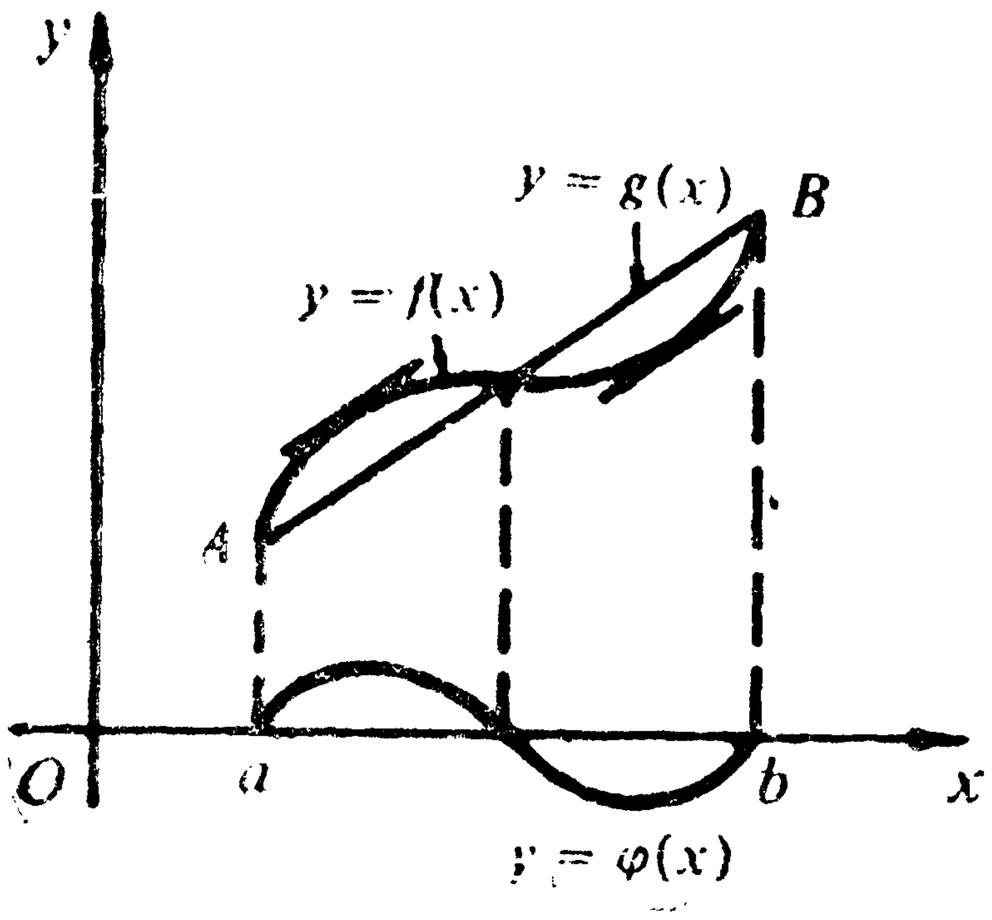


图 2.6

定理 3（拉格朗日 (Lag-

range)中值定理) 设函数 f 满足：1° 在 $[a,b]$ 上连续；2° 在 (a,b) 上可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{4.3}$$

特别，当 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日定理就成为罗尔定理.

证 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

它是由曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程 $y=f(x)$ 与直线 AB 的方程

$$y=g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

相减而得到的，如图 2.6 所示. 易验证，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 而罗尔定理的条件 1°、2° 据假设显然满足，故由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$0=\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(g)}{b-a},$$

此即为式(4.3). □

拉格朗日定理也称为**微分中值定理**或**有限增量定理**，它有广泛的应用，常将它改写成

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b).$$

而当 $b<a$ 时上式仍成立，因此，不管 a，b 的大小，都有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间}. \tag{4.4}$$

若对 $[a,b]$ 中任意两点 x 与 $x+\Delta x$，在 x 与 $x+\Delta x$ 之间的数 ξ 总可写成

$$\xi=x+\theta\Delta x,\quad 0<\theta<1,$$

则式(4.4)又可写成

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=f'(\xi)\Delta x,\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间}\\&=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.\end{aligned} \tag{4.5}$$

推论 1 设 f 在区间 (a,b) 上可导，则在 (a,b) 上 $f(x)$ 是常数的充要条件是 $f'(x)=0$.

证 必要性显然.

充分性 据拉格朗日定理,对(a, b)上任意两个相异点x_1, x_2,有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

其中ξ在x_1与x_2之间. 据假设$f'(\xi)=0$,故有$f(x_2)=f(x_1)$,即(a, b)上各点的函数值均相同,等于一个常数. □

推论 2 设函数f, g在I内可导,且$f'(x)=g'(x)$,则在I内有$f(x)=g(x)+C$,C为常数.

证 令$F(x)=f(x)-g(x)$,利用推论 1 立即可得. □

例 1 设$f(x)=\sin x, x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,求使拉格朗日中值定理成立的$\xi$值.

解 $\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=\cos\xi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$,即$\cos\xi=\frac{2}{\pi}$,

所以

$$\xi=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.8805 \quad (50°27').$$

例 2 设$0<a<b$,证明

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1.$$

证 考虑$f(x)=\ln x, x\in[a, b]$,显然f在$[a, b]$上连续,在(a, b)内可导,据拉格朗日定理,有

$$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a), \quad a<\xi<b.$$

因为$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$,所以

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a},$$

此即是所欲证明的.

例 3 设函数f在区间I上可微,试证在$f(x)$的任意两个零点之间必有$f(x)+f'(x)$的零点.

证 因为 $f(x)+f'(x)$ 的零点即是

$$e^x(f(x)+f'(x))=(e^x f(x))'$$

的零点，而 $f(x)$ 的任意两个零点 a、b（不妨设 $a<b$）一定也是 $F(x)=e^x f(x)$ 的零点，即 $F(a)=F(b)=0$，又据假设 f 可微，推知 F 也可微，F 必在 $[a, b]$ 上连续，因此，据罗尔定理，在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。 □

拉格朗日中值定理的一个推广是下面的柯西定理。

定理 4 （柯西中值定理） 设函数 f, g 满足：1° 在 $[a, b]$ 上连续，2° 在 (a, b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.6}$$

证 首先指出，因 $g'(x)\neq 0$，所以 $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)\neq 0$，式(4.6)有意义。令

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\lambda,$$

欲证式(4.6)，只需证明存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0.$$

令

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x),$$

则有 $\varphi(b)=\varphi(a)$，再据罗尔定理，存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0,$$

从而式(4.6)成立。 □

§2.4 习 题

1. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续可导，在 (a, b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f'(a)=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f''(\xi)=0$。

2. 证明下列不等式。

(1) $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg} a<\dfrac{b-a}{1+a^2}$，　$(0<a<b)$，

(2) $ky^{k-1}(x-y)<x^k-y^k<kx^{k-1}(x-y)$，　$(k>1, 0<y<x)$，

(3) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

3. 设 $f'(x)=k$（常数），$x\in(-\infty,+\infty)$，证明：$f(x)=kx+C$，C为任意常数.

4. 求证：$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$在$(0,1)$内至少有一个根.

5. 设函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)$存在，证明：$f$ 在点 a 的右导数 $f'_+(a)$ 存在，且

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+}f'(x).$$

6. 确定常数 a 和 b 使函数 f 在 x_0 处可导.

(1) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}bx^2+a, & |x|\leqslant c\\ \dfrac{1}{|x|}, & |x|>c.\end{cases}$，$x_0=\pm c$.

7. 设函数 f 在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$上可导，且 $f(a)=0$，试证存在 $\xi\subset(0,a)$，使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0(n\in\mathbf{N})$.

§2.5 罗必达法则

第1章中已讲过在求极限时可能出现的七种不定型，并讲过一些求不定型极限的方法. 现在，利用柯西定理来建立求“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定型极限的一个有效方法——**罗必达(L'Hospital)法则**.

1. 求“$\frac{0}{0}$”型不定型极限的法则

定理1 设在去心邻域 $\dot{U}(a,r)-\{a\}$ 内函数 f,g 满足

1° $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,

2° f', g' 存在且 $g'(x)\neq0$,

3° $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （有限或$\pm\infty$），

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证 因 f, g 在 $U(a,r)-\{a\}$ 内可导，今重新定义 $f(a)=g(a)=0$，则 f, g 在 $U(a,r)$ 上连续。

对右半邻域的任一x，f，g在$[a,x]$上连续，在(a,x)内可导，且 $g'(x)\neq 0$，据柯西定理，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad a<\xi<x.$$

当 $x\to a^+$ 时，$\xi\to a^+$，故

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

对左半邻域的 x，同样有

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a-}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

综合即得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\qquad\square$$

说明 (1) 由证明可知，对单侧极限定理仍成立。

(2) 定理的条件是充分的，并非必要。当条件 3° 不满足，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\neq A$（有限或$\pm\infty$）时，不能断定极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 一定不存在，而只能说不能用罗必达法则求出 .例如，说

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$$

不存在是错的。事实上，正确的求法是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)=1+0=1.$$

(3) 当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是不定型极限时，若满足罗必达法则的条

件，可再用该法则求下去，直到有明确结果 .但要注意，应结合第1章中学过的方法，当有些因式的极限可先求出时应该先求出，而仅保留不定型极限部分，这样可使计算大大简化。

(4) 以上 3 条说明对各种罗必达法则均适用，在以后几个定理中不再叙述。

推论 设函数 f、g 满足

1° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$,

2。当 $|x|>N$ 时，f', g' 存在且 $g'(x)\neq 0$,

3° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(有限或无穷大),

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证 作变换 $x=\dfrac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，应用定理 1 即可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ □

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}(a,\ b>0)$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b$。

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$。

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

解
$$\text{原式} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1 - x}$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-1}$$
$$= -2.$$

2. 求“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定型极限的法则

定理 2 设在去心邻域 $U(a, r) - \{a\}$ 内函数 f, g 满足

1° $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

2° f', g' 存在且 $g'(x) \neq 0$,

3° $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （有限或无穷大），

则
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

推论 设函数 f, g 满足

1° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$,

2° 当 $|x| > N$ 时，f'、g' 存在且 $g'(x) \neq 0$,

3° $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （有限或无穷大），

则
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 2 及其推论的证明从略.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x}$ $(\alpha > 0)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x^{\alpha}=+\infty$。

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}}$ $(\alpha>0)$。

解 因为 $\dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}}=\left(\dfrac{x}{e^{\frac{1}{\alpha}x}}\right)^{\alpha}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{1}{\alpha}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}x}}=0,$$

所以，原式 $=0$。

例 5、例 6 的结果在第 1 章出现过，但用罗必达法则证明更方便。并从这两例看出，不管 n，$m>0$ 多么大，$x\to+\infty$ 时，无穷大 $x^{\frac{1}{n}}$ 比 $\ln^{m}x$ 高阶，$e^{\frac{x}{n}}$ 比 x^{m} 高阶。

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}$ $(m,n>0)$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{m\cos mx\cdot\sin nx}{\sin mx\cdot n\cos nx}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{m\cdot nx}{mx\cdot n}=1$。

3. 求其他五种不定型极限

其他五种不定型都可化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，然后用罗必达法则去求值。“$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$”型比较简单，“0^{0}，1^{∞}，∞^{0}”型是指指数形式，因 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$，所以可化为求 $\lim g\ln f$，这已是“$0\cdot\infty$”型了。

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^{2}x-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}\cos^{2}x-\sin^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}\cos^{2}x-\sin^{2}x}{x^{4}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^{3}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^{3}}=2\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^{2}}=-\frac{2}{3}。$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

解 原式 $= \exp[\lim\limits_{x\to 0} x\ln x] = \exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right] = e^0 = 1.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 原式 $= \exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}\right]$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

§2.5 习 题

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\cos x-e^x}{\ln(1+x^2)}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\operatorname{ctg} x\right)$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha\ln x(\alpha>0)$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$,

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$,

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$,

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2 x\ln\sin x$,

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}$,

(10) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$,

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\to 0}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$,

(12) $\lim\limits_{x-0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$,

(13) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$, $(a, b>0)$,

(14) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $(a,b>0)$,

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

注 常记 $e^{f(x)}=\exp f(x)$.

2. 设

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+b}{x+1}=5,$$

求 a 与 b.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ 1+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$

试证：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

§2.6 泰勒公式

多项式是最简单的函数之一，对任一函数，要计算它在点 a 附近的函数值往往很烦，在用微分作近似计算时，

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a),$$

这是用$(x-a)$的一次多项式来近似表示 $f(x)$；从图形上看，在点$(a, f(a))$附近，用曲线 $y=f(x)$ 的切线去近似代替曲线，其精确度一般较差，且无法估计误差. 因此，希望能找出一个$(x-a)$的 n 次多项式

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n$$

来近似表达 $f(x)$，使得当 $x\to a$ 时，

$$f(x)-P_n(x)=o((x-a)^n),$$

且能写出误差 $|f(x)-P_n(x)|$的具体表达式，这就是泰勒公式.

1. 泰勒(Taylor)公式

设函数 f 在点 a 的邻域 U 内存在直到 n 阶导数，

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\&\quad+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\end{aligned}\tag{6.1}$$

称式(6.1)为函数 f 在点 a 的 n 次泰勒多项式，称 $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ 为余项。

定理 1（泰勒公式） 设函数 f 在点 a 的邻域 U 内存在直到 $n+1$ 阶导数，则 f 在 U 上可展成 n 阶泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+r_n(x), \tag{6.2}$$

其中 $r_n(x)$ 可表达为**拉格朗日余项**形式

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \xi\text{在 }a\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

或

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1. \tag{6.3}$$

$r_n(x)$ 也可表达为**皮亚诺**(Peano)**余项**形式

$$r_n(x)=o((x-a)^n),\ (x-a\to 0). \tag{6.4}$$

这时，称式(6.2)和(6.3)为**带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式**，称式(6.2)和(6.4)为**带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。**

特别，若 $a=0$，分别称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1 \tag{6.5}$$

与

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),\quad (x\to 0) \tag{6.6}$$

为带拉格朗日余项与皮亚诺余项的 n **阶麦克劳林**(Maclaurin)**公式。** 式(6.6)亦称为 $f(x)$ 关于 x 的 n **阶有限展开式。**

证 只需就式(6.2)和(6.3)证明之 。

因 f 在点 a 的邻域 U 上存在 $n+1$ 阶导数，将余项 $r_n(x)$ 和 $(x-a)^{n+1}$ 比较，首先注意到，对由式(6.1)表示的 $P_n(x)$，有

$$P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

因此，

$$r_n^{(k)}(a)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

再对 $\dfrac{r_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$ 在邻域 U 上运用柯西定理，得到

$$\frac{r_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{r_n(x)-r_n(a)}{(x-a)^{n+1}-(a-a)^{n+1}}=\frac{r_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n},$$

ξ_1 在 a 与 x 之间. 连续运用 $n+1$ 次柯西定理,得到

$$\frac{r_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{r_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n}=\cdots=\frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-a)}$$
$$-\frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

ξ 在 a 与 ξ_n 之间必在 a 与 x 之间. 而 $r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$,故得

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\xi\text{在}a\text{与}x\text{之间}.$$

ξ 可表示为 $a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$,故余项可表示为

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

由式(6.3)显然可得式(6.4). □

注 可以证明,若函数 f 在点 a 的某一邻域内存在 $n-1$ 阶导数,而且 $f^{(n)}(a)$存在,则带皮亚诺余项(6.4)的 n 阶泰勒公式成立.

2. 基本初等函数的麦克劳林公式

(带拉格朗日余项,$0<\theta<1$)

$$(1)\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{6.7}$$

$$(2)\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}$$
$$+\frac{\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \tag{6.8}$$

$$(3)\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$$
$$+\frac{\cos(\theta x+(m+1)\pi)}{(2m+2)!}x^{2m+2} \tag{6.9}$$

$$(4)\ \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
$$+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \tag{6.10}$$

$$(5)\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

(6.11)

只证(2)和(4)，其余留给读者证明。

(2)的证明 $f(x)=\sin x$，$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

$$f(0)=0,\ f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2},$$

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin\frac{2m-1}{2}\pi=-\cos m\pi=(-1)^{m-1},$$

$$f^{(2m)}(0)=0,$$

$$f^{(2m+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

以上结果代入式(6.5)即得式(6.8)。

(4)的证明 $f(x)=\ln(1+x)$，$f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$，

$f(0)=0$，$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$，$f^{(n+1)}(\theta x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$，

以上结果代入式(6.5)即得式(6.10)。

例 1 计算 $\sin x$ 的近似值，误差 <0.0001，当 $|x|$ 小于何值时可用 $\sin x\approx x$；又若用

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!},$$

则 $|x|$ 在什么范围？

解 用 $\sin x\approx x$，其误差为

$$r_2=\frac{x^3}{3!}\sin\left(\theta x+\frac{3}{2}\pi\right),$$

$$|r_2|\leqslant\frac{|x|^3}{6}<0.0001,\ |x|^3<0.0006,$$

$$|x|<0.08434\sim 4.8^\circ.$$

若用 $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}$，误差为

$$|r_4|\leqslant\frac{|x|^5}{5!}<0.0001,$$

$$|x|^5<0.0120,\ |x|<0.4129\sim 23.6^\circ.$$

例 2 将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展为$(x+1)$的 n 阶泰勒公式(带拉格朗日余项).

解 令 $x+1=y$，则

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y-1}=-\frac{1}{1-y},$$

利用式(6.11)

$$\frac{1}{1-y}=(1-y)^{-1}=1+y+y^2+\cdots+y^n+\frac{y^{n+1}}{(1-\theta y)^{n+2}},$$

故有

$$\frac{1}{x}=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k-\frac{(x+1)^{n+1}}{(1-\theta(x+1))^{n+2}}.$$

例 3 求 $\operatorname{sh}x$，$\operatorname{ch}x$ 关于 x 的 $2n$ 阶有限展开式.

解 利用公式(6.7)，

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

所以

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}),\ (x\to 0),$$

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),\ (x\to 0).$$

例 4 求 $\sqrt{1+x}\cos x$ 关于 x 的 2 阶有限展开式.

解 据式(6.11)和式(6.9)，有

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),(x\to 0),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ (x \to 0),$$

所以

$$\sqrt{1+x}\cos x = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2),\ (x \to 0).$$

3. 利用有限展开式求不定型极限

若当 $x \to 0$ 时有

$$f(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad (a_k \neq 0, k \geqslant 1)$$

$$= a_k x^k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + \cdots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + o(x^{n-k})\right),$$

则

$$f(x) \sim a_k x^k \quad (x \to 0),$$

即 $a_k x^k$ 是 $f(x)$ 的无穷小主部，$f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小。

例 5 求 $\sqrt{\cos x}$ 关于 x 的四阶有限展开式。

解 $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}$，而据式(6.11)和式(6.9)有

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad (x \to 0),$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad (y \to 0),$$

所以

$$\sqrt{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4), \quad (x \to 0),$$

从这结果可得出，当 $x \to 0$ 时，

$$\sqrt{\cos x} - 1 \sim -\frac{x^2}{4}, \qquad \sqrt{\cos x} - 1 + \frac{x^2}{4} \sim -\frac{x^4}{96},$$

且

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x^4} = -\frac{1}{96}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，

$$e^x\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sh}x)^n-x^n}{(\sin x)^n-x^n}$.

解 当 $x\to 0$ 时，

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\operatorname{sh}^n x=x^n\left(1+\frac{nx^2}{6}+o(x^2)\right),$$

$$\sin^n x=x^n\left(1-\frac{nx^2}{6}+o(x^2)\right),$$

所以

$$(\operatorname{sh}x)^n-x^n\sim x^n\cdot\frac{nx^2}{6},\ (\sin x)^n-x^n\sim -x^n\cdot\frac{nx^2}{6},$$

故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\cdot\frac{nx^2}{6}}{-x^n\cdot\frac{nx^2}{6}}=-1.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}})$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}=x\left[1+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=x\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

所以

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{3}+o(1)\to-\frac{1}{3},\ (x\to+\infty).$$

§2.6 习　　题

1. 写出下列函数关于 x 的 n 阶有限展开式.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, (2) $\sqrt{1-x}$, (3) a^x, (4) $\operatorname{arc\,tg} x$.

2. 写出下列函数的指定阶有限展开式.

(1) $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ 关于 x, 2 阶;

(2) $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 关于 x, 3 阶;

(3) e^{2x-x^2} 关于 x, 5 阶;

(4) $\ln(1+\sin x)$, 关于 x, 5 阶;

(5) $\ln x$, 关于 $(x-2)$, n 阶;

(6) $1+3x+5x^2-2x^3$, 关于 $(x+1)$, 3 阶.

3. 利用有限展开式求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^2)}{x^4}$,

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$,　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$,

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{x^4}$,　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$, $(a>0)$.

§2.7 利用导数研究函数的性质

1. 函数的增减性

关于函数 f 的单调区间，只要用一阶导数 $f'(x)$ 在该区间的正负号就可判定，有以下定理.

定理 1（单调的充分条件） 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则当 $f'(x)>0$, $\forall x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增；当 $f'(x)<0$, $\forall x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减.

证 设 x_1, x_2 是$[a, b]$上任意两点，据中值定理，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),\ \xi\text{在}x_1\text{与}x_2\text{之间}.$$

所以，当 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$严格递增，当 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 严格递减。 □

注意，$f'(x)>0$(或<0)仅是 $f(x)$ 严格递增(或递减)的充分条件，并非必要条件.例如，$f(x)=x^3$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$上严格递增，但 $f'(0)=0$。事实上，若在某区间 I 上 $f'(x)\geqslant 0$ (或$\leqslant 0$)，而 $f'(x)=0$ 的点仅是一些孤立的点，则 $f(x)$ 在 I 上仍是严格递增(或递减)的。故有以下单调的必要条件。

定理 2 (单调的必要条件) 设函数 f 在(a, b)上可导，若在(a, b)上 $f(x)$ 严格递增(递减)，则 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$。

证 设 $x, x+\Delta x$ 是(a, b)上任意两点，若 $f(x)$ 严格递增，则有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

即 $f'(x)\geqslant 0$。对严格递减情况，只要将以上不等号改向即可。 □

由定理 1 和定理 2 的证法，易证得（只要在不等号处带上等号）

定理 3 (广义单调的充分条件) 设函数 f 在$[a, b]$上连续，在(a, b)上可导，则在$[a, b]$上 $f(x)$ 广义递增(递减)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$，$\forall x\in(a, b)$。

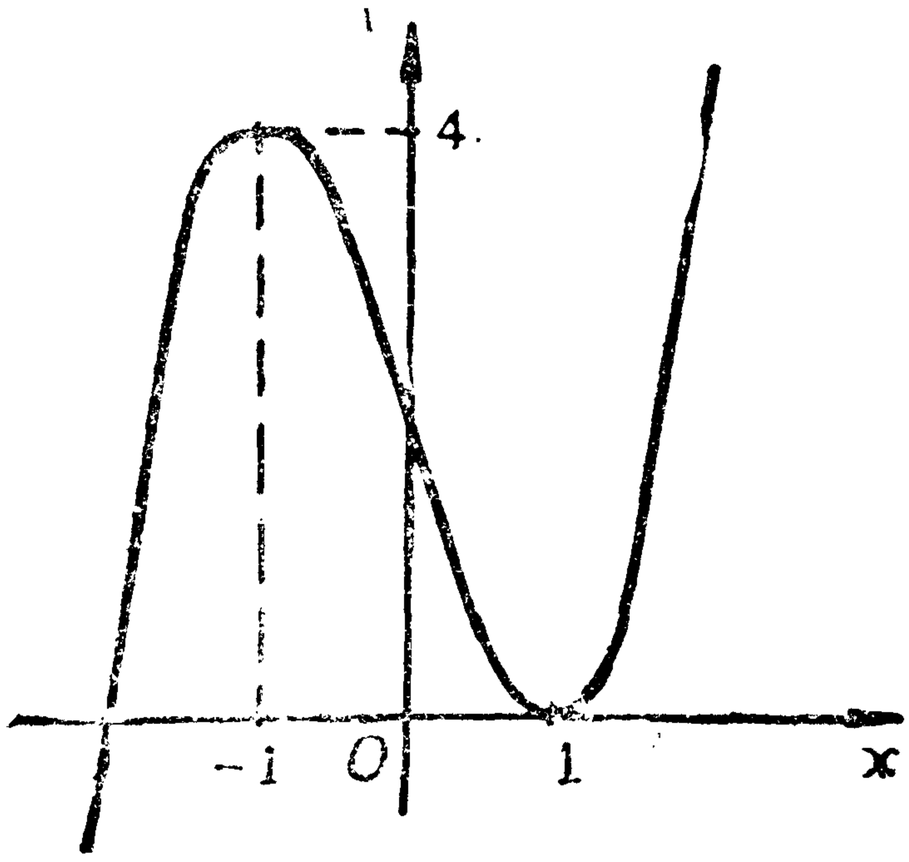


图 2.7

例 1 确定函数 $y=x^3-3x+2$ 的单调区间。

解 定义域为$(-\infty, +\infty)$，

$$y'=3x^2-3=3(x^2-1)$$

当 $|x|>1$时，$y'>0$，函数严格递增；当 $|x|<1$时，$y'<0$，函

数严格递减。即严格递增区间为$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$，严格递减区间为$[-1, 1]$，如图 2.7 所示。

例 2 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1.$$

证 记 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，定义 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续。

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg} x).$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$x<\operatorname{tg} x$，故有 $f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sin x}{x}<f(0),$$

即

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1, \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

2. 函数的极值

从上段例 1 可以看出，单调区间的分界点是 $x=\pm 1$，在 $x=-1$ 点附近，左边，函数严格递增，$f(x)<f(-1)$；右边，函数严格递减，仍有 $f(x)<f(-1)$，所以 $f(-1)$ 最大。同样，在 $x=1$ 点附近，$f(x)>f(1)$，$f(1)$ 最小。这种局部性的最大、小值在 §2.4 已讲过，称为极值。

若函数 f 在 I 内可导，由费马定理知，$a\in I$ 是极值点的必要条件是 $f'(a)=0$。通常，使 $f'(x)=0$ 的点都称为 f 的**驻点**，而把可能取到极值的点称为**极值可疑点**，驻点是极值可疑点。但是，导数不存在的点也可能是极值点，例如，$y=|x|$ 在 $x=0$ 点导数不存在，可是在 $x=0$ 取极小值，因此，**极值可疑点是使 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点。**

对每一个极值可疑点都要判别它是否是极值点，下面给出用导数来判别极值的方法。

判别法 1 设函数 f 在邻域 $U(a,\delta)$ 内连续，在 $U(a,\delta)-\{a\}$ 内可导，则在 a 的左、右邻域上，当导数符号改变时，a 是极值点；当导数符号不改变时，a 不是极值点。具体见下表。

x	$x<a$	a	$x>a$	$x<a$	a	$x>a$
$f'(x)$	+	⋮	−	−	⋮	+
$f(x)$	↗	极大	↘	↘	极小	↗

证 用极值的定义和单调增减性即得。表中“↗”表示严格递增，“↘”表示严格递减。

判别法 2 设函数 f 在点 a 二阶可导（从而在 a 的某邻域内 $f'(x)$ 存在且 f 连续），而且 $f'(a)=0$，则

当 $f''(a)>0$ 时，$f(x)$ 在点 a 取极小值；

当 $f''(a)<0$ 时，$f(x)$ 在点 a 取极大值。

证 用二阶泰勒公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o((x-a)^2),$$

$f''(a)\neq 0$，当 $|x-a|$ 充分小时，$f(x)-f(a)$ 与 $f''(a)$（即 $\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$）同号，故当 $f''(a)>0$ 时，$f(x)>f(a)$，$f(a)$ 为极小值；当 $f''(a)<0$ 时，$f(x)<f(a)$，$f(a)$ 为极大值。 □

当 $f'(a)=f''(a)=0$ 时，不能用判别法 2 判别，则可用定义或者判别法 1 判别。但当 f 在 a 的某邻域内有任意阶导数时，则有以下判别法。

判别法 3 设函数 f 在点 a 处 n 阶可导，且

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

则①当 n 为奇数时，$f(a)$ 不是极值；② 当 n 为偶数时，$f(a)$ 是极值，当 $f^{(n)}(a)>0$ 时，$f(a)$ 是极小值，当 $f^{(n)}(a)<0$ 时，$f(a)$ 是

极大值.

证 类似判别法 2，略.

例 3 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=3$. 而

$$f''(x)=6x-6.$$

对点 $x_1=-1$：$f''(-1)=-12<0$，$f(-1)=10$ 是 $f(x)$ 的极大值；

对点 $x_2=3$；$f''(3)=12>0$，$f(3)=-22$ 是 $f(x)$ 的极小值.

例 4 求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$ 的极值.

解 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)$在点 $x=0$ 与 $x=3$ 处不存在，当 $x\neq0$，3 时，有

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(2-x),$$

故极值可疑点为 $x=2$ 及 $x=0$，$x=3$. 用这些点分割定义域$(-\infty+\infty)$为几个小区间，并确定各小区间上$f'(x)$的正、负号，填下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	−	不存在	+	0	−	不存在	−
$f(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值 $\sqrt[3]{4}$	↘	0	↘

在表中，第一行是用极值可疑点分割定义域所得的小区间；第二行是导数 $f'(x)$ 在各区间的正、负号；第三行是函数 f 在各区间的增、减记号及由此判定的极值.

由表立即可知，$f(x)$有极小值$f(0)=0$，极大值$f(2)=\sqrt[3]{4}$.

3. 最大值与最小值

若函数 f 在$[a,b]$连续，则必存在最大值和最小值. 会求极

值后，求 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最大值和最小值并不困难。因为在区间内部的最大值必是极大值，最小值必是极小值，因此，只要比较各极值可疑点（并不要求判别极值）及区间端点的函数值，其中最大者为最大值，最小者为最小值。

另外要注意，对一元连续函数来说，极大值点与极小值点是相间排列的，这是因为在以两个相邻的极小值点为端点的闭区间内函数必取到最大值，这个最大值点就是一个极大值点；同理，两个相邻的极大值点之间必有一极小值点。同样的理由还说明，若 $f(x)$在区间 I 上只有一个极大（小）值，则它必是该区间上的最大（小）值。

例 5 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间$[-2, 2]$上的最大值和最小值。

解 在例 3 中已求得 $f(x)$ 在$[-2, 2]$ 内只有一个极大值 $f(-1)=10$，再求出端点函数值$f(-2)=3$，$f(2)=-17$，比较它们的大小，即得 $f(x)$ 在$[-2, 2]$上的最大值为 $f(-1)=10$，最小值为 $f(2)=-17$。

例 6 设直圆柱形罐头的容积为定值 V，问其高 h 与底半经 r 为何值时用料最少（即表面积 S 最小）？

解 $V==\pi r^2 h$，$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$，

$$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}，\text{令 } S'(r)=0 \text{ 得 } r=r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

$$S''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3}，S''(r_0)>0,$$

所以 $S(r_0)$ 是极小值。因只有一个极小值必是最小值，此时

$$h=\frac{V}{\pi r_0^2}=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r_0,$$

故当取 $h=2r=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ 时用料最少。

4. 函数的凸性

设函数 f 在区间 I 上定义，$y=f(x)$ 的图形为曲线段 Γ. 如果对 Γ 上任意两点 A 和 B，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 总位于弦 AB 的下方，则称**曲线段 Γ 是下凸的**(俗称**凹的**)，如图 2.8(a) 所示；如果弧 $\overset{\frown}{AB}$ 总位于弦 AB 的上方，则称**曲线段 Γ 是上凸的**(俗称**凸的**)，如图 2.8(b) 所示. 下面用分析语言来描述曲线段的凸向.

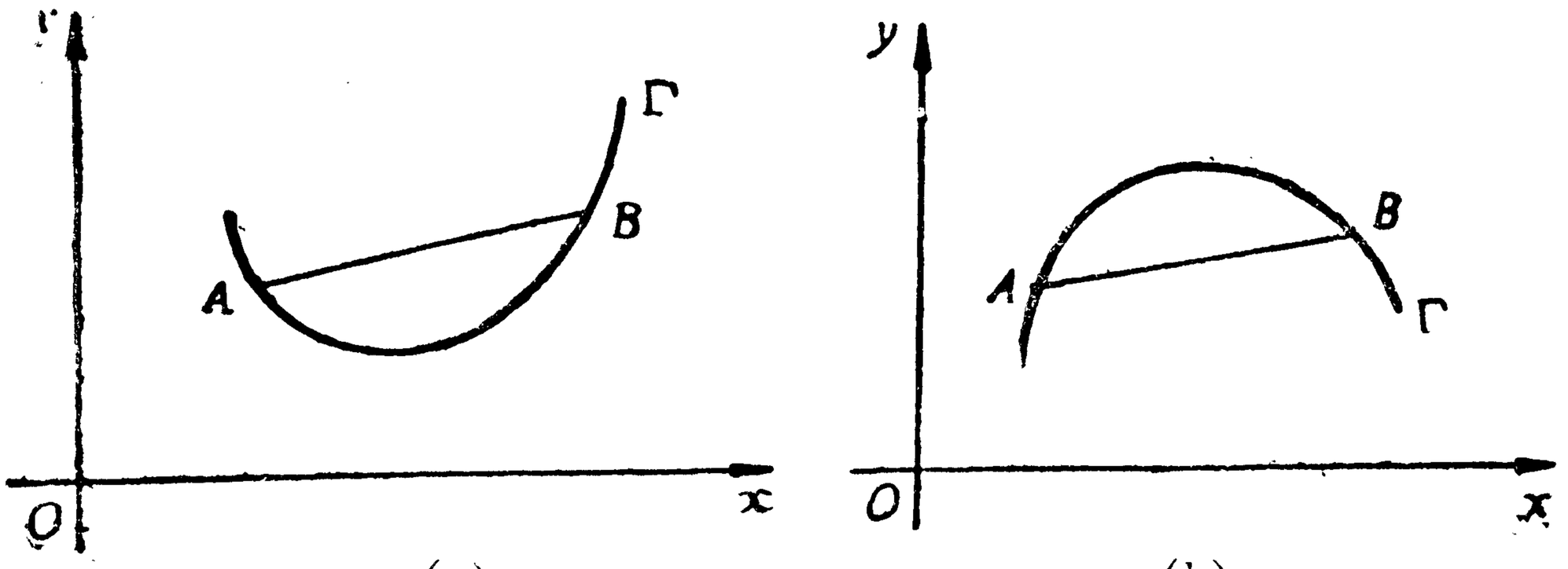


图 2.8

设点 A, B 的坐标为 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1<x_2$, 则弦 AB 的方程为

$$y=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

若曲线下凸，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 位于弦 AB 的下方，则 $\forall x\in(x_1, x_2)$，有

$$f(x)<f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2). \tag{7.1}$$

记

$$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad 0<\lambda<1,$$

则

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=1-\lambda,\ x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,$$

因此，式(7.1)可表示为

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ 0<\lambda<1, \tag{7.2}$$

由此引出以下定义.

定义 1（凸函数） 设函数 f 在区间 I 上定义，如果对 I 上任意两点 x_1，x_2，都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\tag{7.3}$$

则称 f 为 I 上的**下凸函数**，若式(7.3)中不等号反向，则称 f 为 I 上的**上凸函数**. 若式(7.3)中是严格不等式，即是式(7.2)形式，则称 f 为 I 上的**严格下凸函数**，不等号反向时，称 f 为 I 上的**严格上凸函数**.

定理 4（凸函数的充要条件） 设函数 f 在 I 内可导，则 f 在 I 内是严格下凸函数的充要条件是 $f'(x)$ 严格递增.

证 充分性 假定 $f'(x)$ 在 I 内严格递增. 任取 $x_1, x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，曲线 Γ：$y=f(x)$ 上与 x_1，x_2 对应的点为 A，B，记直线 AB 的斜率为 m，则直线 AB 的方程可写成

$$y=mx+p,$$

需要证明，$\forall x\in(x_1, x_2)$，有

$$g(x)=f(x)-(mx+p)<0.$$

因为 $g(x_1)=g(x_2)=0$，据罗尔定理，$\exists\xi\in(x_1, x_2)$满足 $g'(\xi)=0$，而 $g'(x)=f'(x)-m$，因为 $f'(x)$ 在 I 上严格递增，所以 $g'(x)$在 I 上也严格递增，因此，

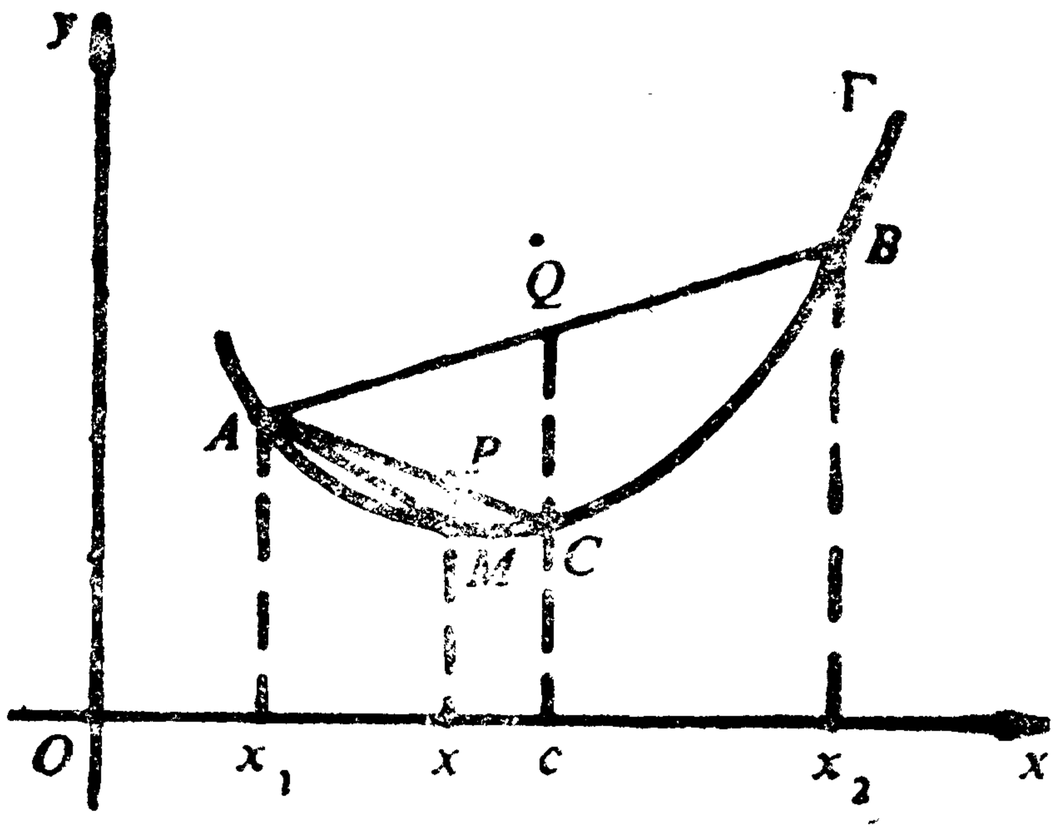


图 2.9

(1) 在 (x_1, ξ) 内，$g'(x)<g'(\xi)=0$，$g(x)$ 严格递减，从而 $g(x)<g(x_1)=0$；

(2) 在 (ξ, x_2) 内，$g'(x)>g'(\xi)=0$，$g(x)$ 严格递增，从而 $g(x)<g(x_2)=0$.

必要性 假定函数 f 在 I 内是严格下凸的，对 x_1，$x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，取 $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，在曲

线 Γ 上与 c 对应的点为 C，记直线 AC 的斜率为 m_1，直线 CB 的斜率为 m_2。设 $x\in(x_1, c)$，由图 2.9 可见，M 在 P 的下方，C 在 Q 的下方，故

直线 AM 的斜率

$<$直线 AP 的斜率 $=$ 直线 AC 的斜率 m_1

$<$直线 AQ 的斜率 $=m$，

即有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<m_1(<m),$$

因 f 可导，所以

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant m_1<m.$$

类似可证

$$f'(x_2)=\lim_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\geqslant m_2>m.$$

故有 $f'(x_1)<f'(x_2)$，这就证明了 $f'(x)$ 在 I 内严格递增。 □

同理可证，函数 f 在 I 内是严格上凸函数的充要条件是 $f'(x)$ 严格递减。

推论 若函数 f 在 I 内二阶可导，则在 I 上 f 严格下凸的充要条件是 $f''(x)>0$，$\forall x\in I$；f 严格上凸的充要条件是 $f''(x)<0$，$\forall x\in I$。

在 I 上严格下凸(上凸)函数 f 所对应的曲线段 $y=f(x)$ 是(严格)下凸(上凸)的，因此，函数 f 严格上(下)凸的充要条件即是曲线 $y=f(x)$ (严格)上(下)凸的充要条件，所以，定理 4 及其推论可用来判别曲线的凹(即下凸)、凸(即上凸)区间。

定义 2（拐点） 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(a, f(a))$ 有切线，若点 a 是曲线凹、凸区间的分界点，则称点 $M(a, f(a))$ 为曲线的**拐点**(也称**扭转点**)。

显然，对二阶连续可导函数 f 来说，拐点 M 处必有 $f''(a)=0$，且在 a 的左、右邻域内 $f''(x)$ 的符号改变。此外，$f''(x)$ 不存在的

点也可能是拐点，因此，拐点的可疑点是 $f''(x)$ 为零和不存在的点。

例 7 求曲线 $y=x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$ 的凹凸区间和拐点。

解 $y'=x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(2-x)$,

$$y''=-2x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}},$$

拐点可疑点为 $x=0$ 和 $x=3$，用这两个点分割定义域 $(-\infty,+\infty)$ 为 3 个小区间，并确定各小区间上 $y''(x)$ 的正、负号，填下表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$y''(x)$	−	不存在	−	不存在	+
$y(x)$	∩	0	∩	拐点(3,0)	∪

在表中，第一行是用拐点可疑点分割定义域所得的小区间；第二行是 $y''(x)$ 在各区间的正、负号；第三行是曲线 $y=y(x)$ 在各区间的凹、凸记号及由此判定的拐点，凹用记号“∪”，凸用记号“∩”。

由表立即可知，在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,3)$ 上曲线是凸的，在区间 $(3,+\infty)$ 上曲线是凹的，点 $(3,0)$ 是拐点。

§2.7 习　题

1. 求下列函数的单调区间与极值。

(1) $y=3x-x^3$,　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$　$(x\geqslant 0)$,

(3) $x=x^n e^{-x}$　$(n\in \mathrm{N})$,　　(4) $y=x+\dfrac{1}{x}$,

(5) $y=x-\dfrac{1}{x}$,　　(6) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

2. 证明下列不等式。

(1) $1-x<e^{-x}<1-x+\dfrac{1}{2}x^2$　$(x>0)$,

(2) $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$　$(x\geqslant 0)$,

(3) $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$　$(x\geqslant 0)$.

3．求下列函数在给定区间上的最大、小值。

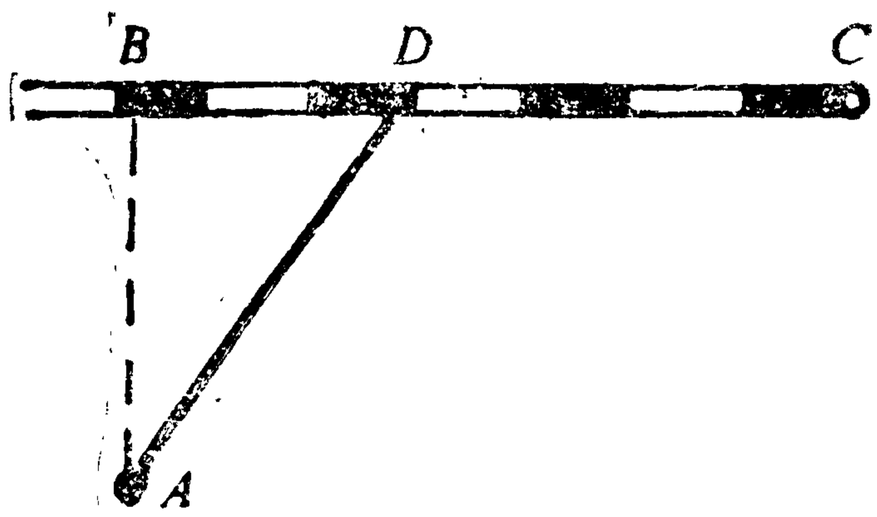
(1) $y=\sin\theta+\cos\theta$, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, (2) $y=|3x-x^3|$, $[-2,2]$。

4．讨论下列函数的凹凸区间与拐点。

(1) $y=x^3-3x^2$, (2) $y=x+\sin x$。

5．在边长为1.5米的正方形铁皮的四角分别截去一个边长相等的小正方形，然后把四边翻转90°再焊成无盖水箱，问水箱底边长为多少时才能使水箱容积最大？最大容积是多少？

6．设工厂 A 到铁路线的垂直距离为20千米，垂足为 B，铁路线上距 B 点100千米处有一原料供应站 C（见图）。问在铁路上距 B 多远的地方 D 处向 A 厂修一条公路，使从 C 运原料到 A 厂的运费最省（已知：铁路运费：公路运费 = 3:5）。



题6图

7．方程 $\ln x=ax\ (a>0)$ 有几个实根？

§2.8 利用导数作函数的图形

1. 曲线的渐近线

定义 设曲线 $\Gamma: y=f(x)$ 有无穷远分支，如果当点 M 沿着曲线 Γ 向无穷远移动时，M 与某一直线 L 的距离 $d(M, L)\to 0$，则称 L 是 Γ 的一条**渐近线**。

1) 垂直渐近线 当 x 从单侧趋于 a 时，$y=f(x)\to+\infty$ 或 $-\infty$，则直线 $x=a$ 是 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线；

2) 水平渐近线 当 $x\to+\infty$ 或 $-\infty$ 时，$y\to b$，则直线 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线；

3) 斜渐近线 除以上两种渐近线外的渐近线 $y=ax+b$ 称为斜渐近线。下面导出求 a, b 的公式。

如图 2.10 所示，设当 $x\to+\infty$ 时，$L: y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，$MN\perp L$, $MA\perp x$ 轴，$|MN|=|MA|\cos\alpha$

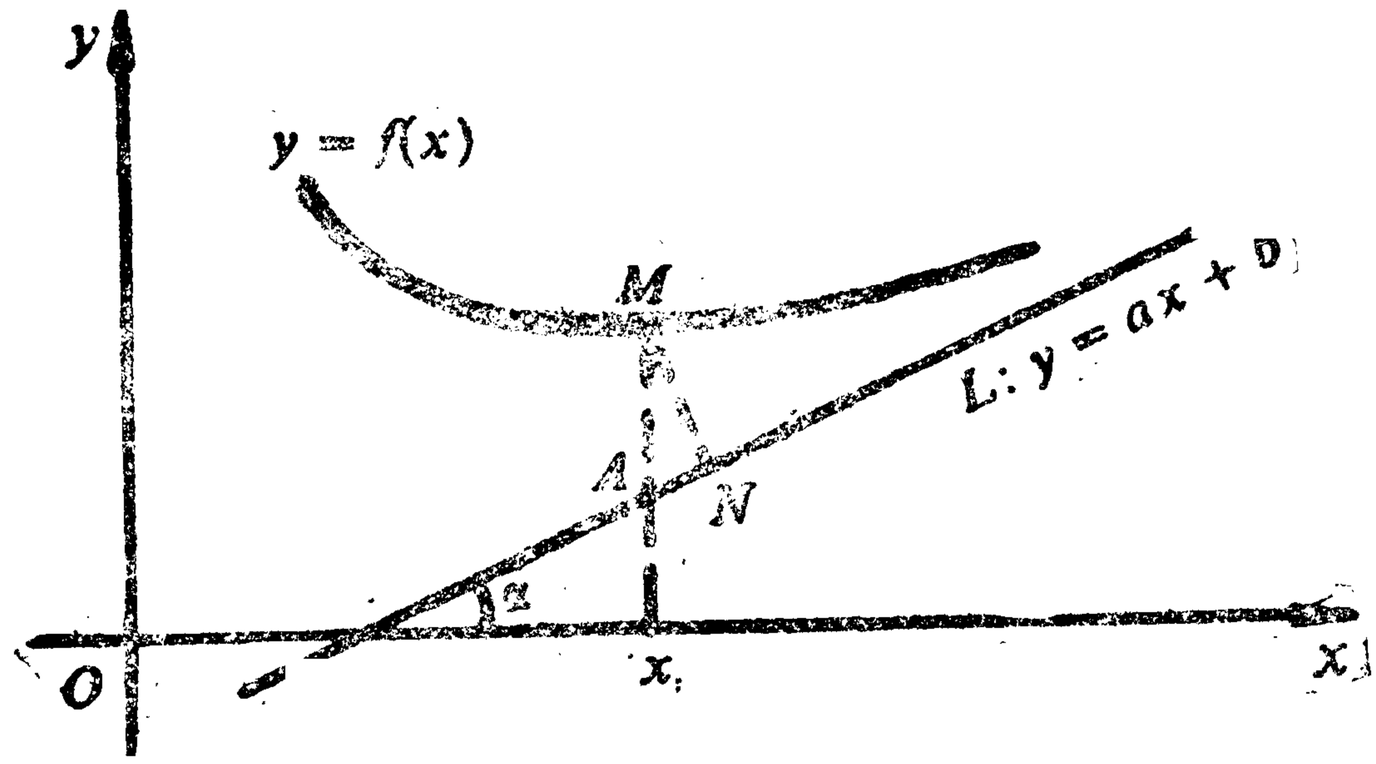


图 2.10

($|AB|$表示直线段 AB 的长度),α 是直线 L 的倾角. 按定义有

$$\lim_{x\to+\infty}|MN|=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}|MA|=0,$$

而 $|MA|=|f(x)-(ax+b)|$, 故有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0. \tag{8.1}$$

由于

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a,$$

得到

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

将它代入式(8.1), 得

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax].$$

对 $x\to-\infty$ 情形有同样的结果. 由此可得斜渐近线的求法: 仅当下述两个极限

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] \tag{8.2}$$

都存在有限时, 曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=ax+b$. 另外指出, 当 $a=0$ 时, 它成为水平渐近线 $y=b$.

如果能将 $f(x)$ 写成形式

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad (x\to\pm\infty),$$

则不仅知道曲线有渐近线 $y=ax+b$，而且知道当 $x\to\pm\infty$ 时曲线与渐近线的上、下位置.

例 1 求曲线 $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2(1+x)}$ 的渐近线.

解 显然，$x=-1$ 是垂直渐近线. 下面求斜渐近线.

方法 1 $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$，

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{2(1+x)}-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

故曲线有渐近线 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$.

方法 2 当 $x\to\pm\infty$ 时，

$$y=\frac{x^2}{2(1+x)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{2}\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

故 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ 是曲线的渐近线. 且当$x\to+\infty$时$\dfrac{1}{2x}>0$，曲线在渐近线的上方；当 $x\to-\infty$ 时 $\dfrac{1}{2x}<0$，曲线在渐近线的下方.

2. 作函数的图形

前面几段已用导数来讨论了函数的性态，利用这些可较准确地作出函数的图形. 现将作图的步骤列出如下：

(1) 确定函数的定义域.

(2) 对称性：如果函数 f 在以原点为中心的对称区间上定义，则要考虑函数的奇偶性. 当满足$f(-x)=f(x)$时，称 f 为**偶函数**，当满足 $f(-x)=-f(x)$ 时，称 f **为奇函数**. 显然，偶函数的图形对称于y 轴，奇函数的图形对称于坐标原点，因此，对这种函数，只要作出$x\geqslant 0$ 部分的图形，另一半图形用对称性画出.

又若 f 是以 T 为周期的周期函数，则只需作出一个周期$[0,$

T]内的图形，然后作周期延拓即得全图。

(3) 求出 $f'(x)$，$f''(x)$，找出使它们等于零和不存在的点，用这些点将定义域依 x 增加顺序分成几个区间，定出这些区间上 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的正、负号，用以确定函数的单调区间、极值点、凹凸区间与拐点，并将这些结果列在一表格内，在表格的最后一行，形象地画出各区间内曲线的形态，这样就可看出全图的大概形状。

(4) 求渐近线。

(5) 求出曲线与坐标轴的交点，必要时还要计算曲线上某些点的坐标。

(6) 把以上结果画在坐标平面上。画图时先画出渐近线，再画出极值点，拐点，与坐标轴的交点等，然后按表中所列的增减性及凸性将这些点之间的曲线段依次描出，即得曲线的图形。

例 2 作函数 $y=\dfrac{x^2}{2(1+x)}$ 的图形。

解 (1) 定义域：$x\neq -1$。无对称性，无周期性。

(2) $y'=\dfrac{2x+x^2}{2(1+x)^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=-2,0$；

$$y''=\frac{1}{(1+x)^3},\ y''\neq 0,\ \text{而 } x=-1 \text{ 不在定义域内}$$

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	⋮	−	0	+
y''	−	−	−	⋮	+	+	+
y	凸、增 ↗	极大值 -2	凸、减 ↘	间断点	凹、减 ↘	极小值 0	凹、增 ↗

(3) 渐近线：在例 1 中已求得曲线有渐近线

$$x=-1 \quad \text{和} \quad y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}.$$

画出曲线的图形见图 2.11。

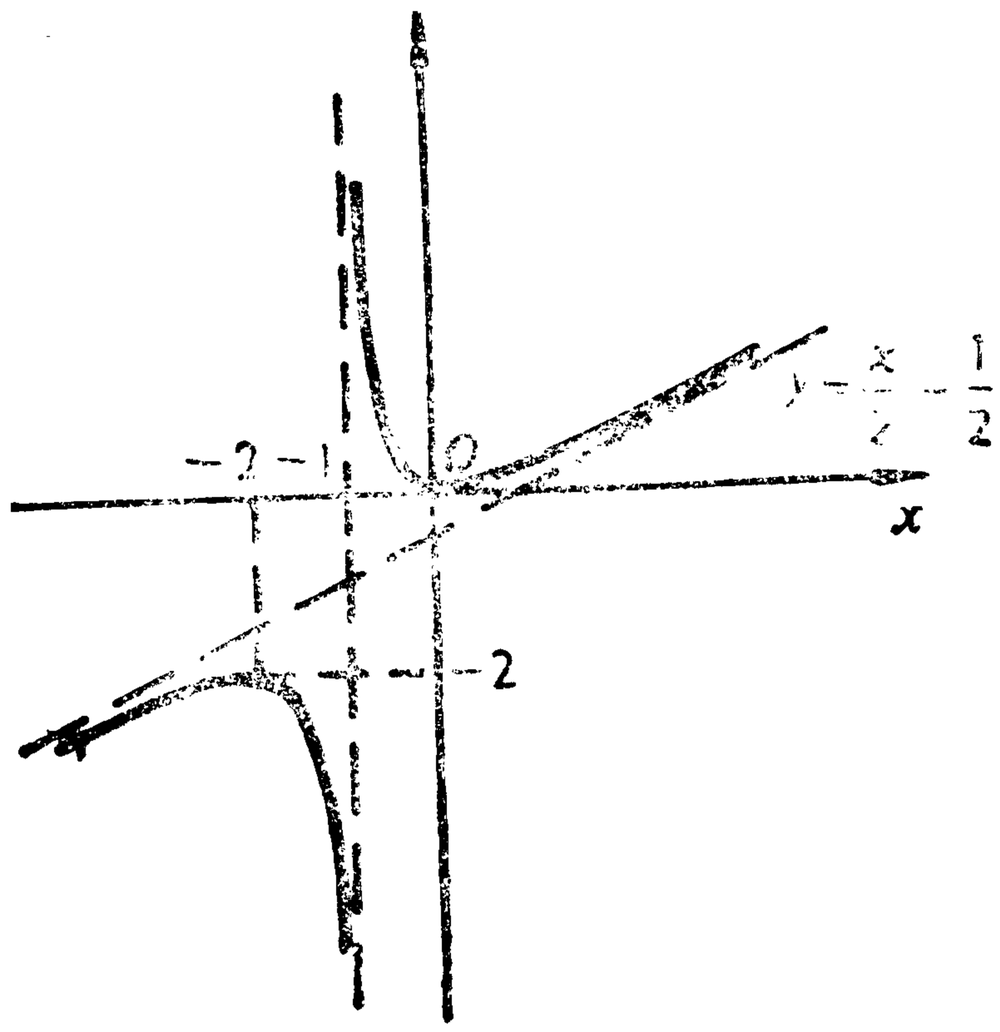


图 2.11

例 3 作 $y=x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$ 的图形.

解 §2.7 例 4、例 7 已讨论过这个函数的单调区间，极值，凹凸区间和拐点，将这些讨论结果综合在一起，得到

$$y'=x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(2-x),\quad y''=-2x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}},$$

使 y'、y'' 等于零和不存在的点为 $x=0,2,3$，综合 §2.7 例4、例7 的两个表得到下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	−	不存在	+	0	−	不存在	−
y''	−	不存在	−	−	−	不存在	+
y	凸、减 ↘	极小值 0	凸、增 ↗	极大值 $\sqrt[3]{4}$	凸、减 ↘	拐点 (3, 0)	凹、减 ↘

下面求渐近线：$x\to\pm\infty$ 时，

$$y=-x\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=-x\left[1-\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\left(-\frac{3}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=-x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

所以有渐近线 $y=-x+1$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}>0$，曲线在渐近

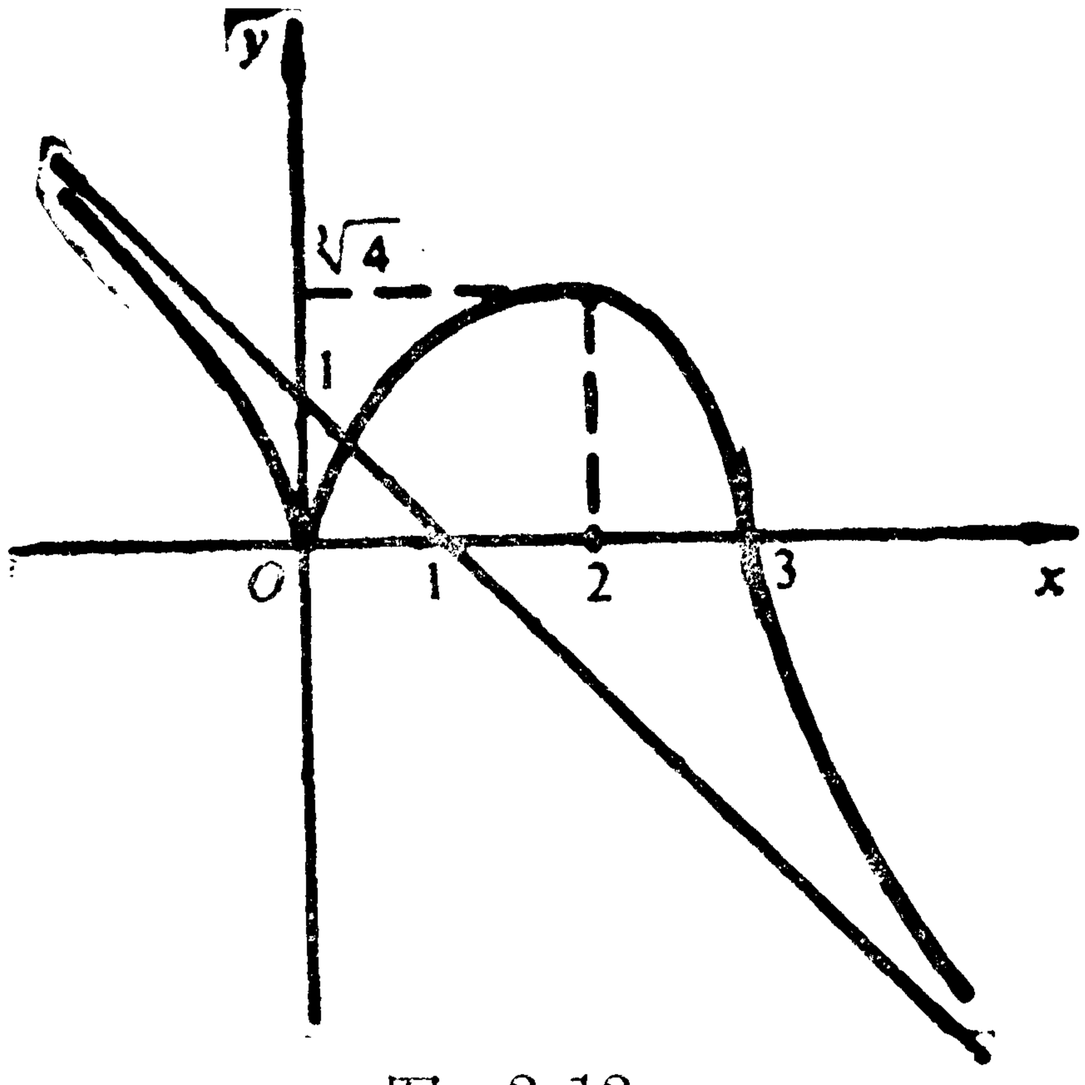


图 2.12

线上方；当 $x \to -\infty$ 时，$\frac{k}{x}<0$，曲线在渐近线下方.

图形见图 2.12.

例 4 作小阻尼振动规律

$$x = e^{-t}\sin 2\pi t \quad (t \geqslant 0)$$

的图形.

解 (1) 定义域为 $[0, +\infty)$. 无对称性，无周期性. 因 $-e^{-t} \leqslant x(t) \leqslant e^{-t}$，所以图形夹在曲线 $x = -e^{-t}$ 与 $x = e^{-t}$ 之间.

(2) $x'(t) = e^{-t}(2\pi \cos 2\pi t - \sin 2\pi t)$

$$= \sqrt{1+4\pi^2}e^{-t}\cos(2\pi t + \varphi),$$

其中 φ 满足

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2\pi},\ \varphi \approx 9^\circ \approx 0.1578.$$

令 $x'(t) = 0$，$2\pi t + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$，得驻点为

$$t_k = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi} \approx \frac{k}{2} + 0.22,$$

$$x''(t) = \sqrt{1+4\pi^2}\, e^{-t}(-\cos(2\pi t + \varphi) - 2\pi \sin(2\pi t + \varphi))$$

$$= -(1+4\pi^2)e^{-t}\sin(2\pi t + 2\varphi),$$

令 $x''(t) = 0$，$2\pi t + 2\varphi = k\pi$，得

$$t = \tau_k = \frac{k}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \approx \frac{k}{2} - 0.05,$$

因 $\sin 2\pi t$ 的周期为 1，为简单起见，我们只列出在区间 $(0, 1)$ 上的表，在 $(k, k+1)$ 上的图形是类似的，只是振动幅度以 e^{-t} 规律减小，且当 $t \to +\infty$ 时 $x \to 0$，即 $x = 0$ 是其水平渐近线.

t	$(0, 0.22)$	0.22	$(0.22, 0.45)$	0.45	$(0.45, 0.72)$	0.72	$(0.72, 0.95)$	0.95	$(0.95, 1)$
$x'(t)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$x''(t)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$x(t)$	凸、增 ↗	极大值 0.79	凸、减 ↘	拐点 0.22	凹、减 ↘	极小值 −0.48	凹、增 ↗	拐点 −0.12	凸、增 ↗

曲线的图形见图 2.13。

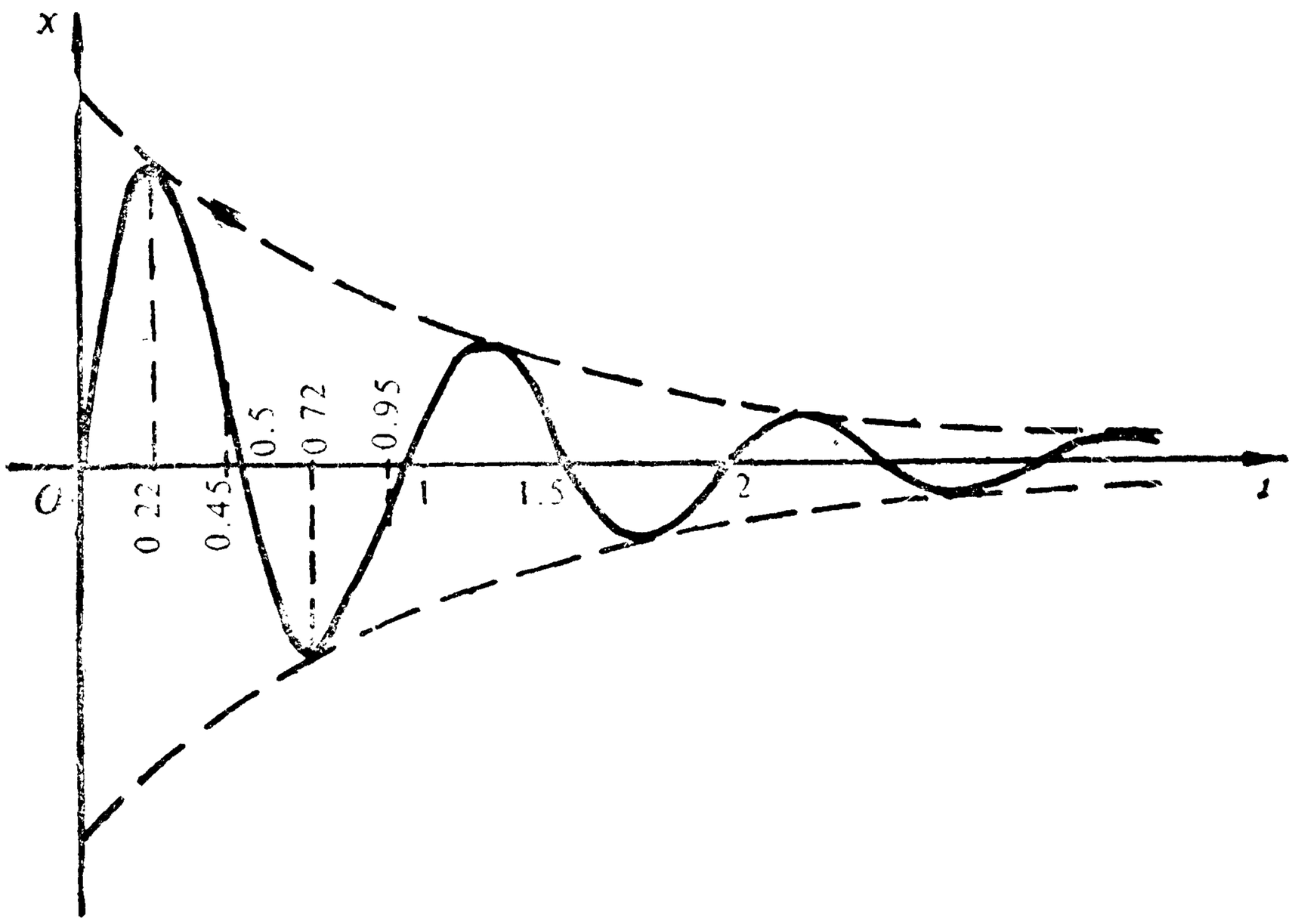


图 2.13

§2.8 习 题

1. 求下列曲线的渐近线。

(1) $y=\sqrt{x^2+1}-(x+1)$,　　(2) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$,

(3) $y=\ln(1+e^x)$,　　(4) $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$。

2. 作下列函数的图形。

(1) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$,　　(2) $y=e^{-x^2}$,

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$,　　(4) $y=\frac{x}{1+x^2}$。

(5) $y=x-2\operatorname{arc\,tg}x$,　　(6) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

3. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,　　(2) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$　$(a>0, a\neq 1)$.

4. 设 $f(x)$ 是在 $I=(-l, l)(l>0)$ 上定义的任意函数，证明：$g(x)=[f(x)+f(-x)]$在 I 上是偶函数.

5. 试证：定义在 $I=(-l, l)(>0)$上的任意函数 $f(x)$可以表示成一个偶函数 $E(x)$ 和一个奇函数 $Q(x)$ 之和.

6. 试证：(1) 可导偶函数的导数是奇函数；

(2) 可导奇函数的导数是偶函数；

(3) 可导周期函数的导数是具有相同周期的函数.

§2.9　参数方程所确定的函数的导数

平面曲线的参数方程在平面解析几何中讲过，本节主要讲它的求导运算，并利用导数来研究曲线的形态. 对由极坐标方程表示的曲线也化为参数方程加以讨论. 在第一段中讲几个建立曲线参数方程的例子，供读者复习自学.

1. 平面曲线的参数方程

当一动点在 xOy 平面上运动时，得到一段轨线 C，如果把曲线 C 上的动点坐标 x 与 y 分别用另一变数 t 的函数

$$x=x(t),\quad y=y(t) \tag{9.1}$$

来表示，并且当 t 从 t_1 变到 t_2 时，动点(x, y)正好描出曲线 C，则称方程(9.1)为曲线 C 的**参数方程**，变数 t 称为参数.

曲线的参数方程与直角坐标方程有密切联系，从方程(9.1)消去参数 t，例如，从 $x=x(t)$ 解出反函数 $t=t(x)$，代入 $y=y(t)=y(t(x))=f(x)$，就得到直角坐标方程，但这不一定能做到. 反之，从直角坐标方程引入适当的参数后可得参数方程，因此，一条曲线可以用不同的参数方程来表示(当然，参数的意义也各不相同).

例如，圆的直角坐标方程为

$$x^2+y^2=R^2,$$

而其参数方程可表示为

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

或

$$x=R\sin\theta,\ y=R\cos\theta,\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

等等；而椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)$$

(见图 2.14)可用以下参数方程表示：

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

或 $\begin{cases} x=a\cos\tau, \\ y=-b\sin\tau, \end{cases}$ $(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi).$

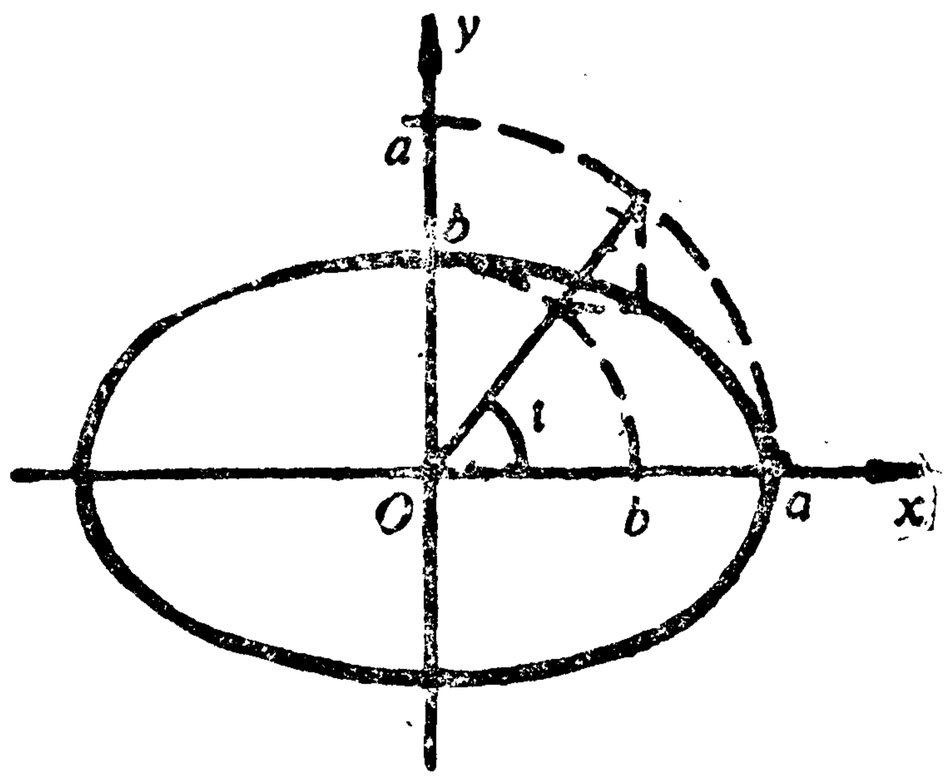


图 2.14

一般建立曲线的参数方程有两种方法：

(1) 把曲线看作动点的轨迹，适当选取参数 t，将曲线上动点的坐标 x, y 分别用 t 的函数表示；

(2) 从已知曲线的直角坐标方程引入参数，例如，对 $y=f(x)$ 令 $x=\varphi(t)$，代入得 $y=f(\varphi(t))=\psi(t)$，即得参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$。下面举几个建立曲线参数方程的例子。

例 1 旋轮线(也称摆线) 一圆沿定直线滚动，求圆周上一定点 P 所描出的轨迹(称为旋轮线)。

解 取定直线为 x 轴，圆的半径为 a，开始时圆上定点 P 在坐标原点，圆心 C 在 y 轴上。现引入滚动角 $\angle PCN=t$ 为参数，如图 2.15 所示，$ON=\overset{\frown}{PN}=at$，$MN=PA=a\sin t$，$CA=a\cos t$，点 P 的坐标 x, y 满足

$$x=OM=ON-MN=at-a\sin t,$$

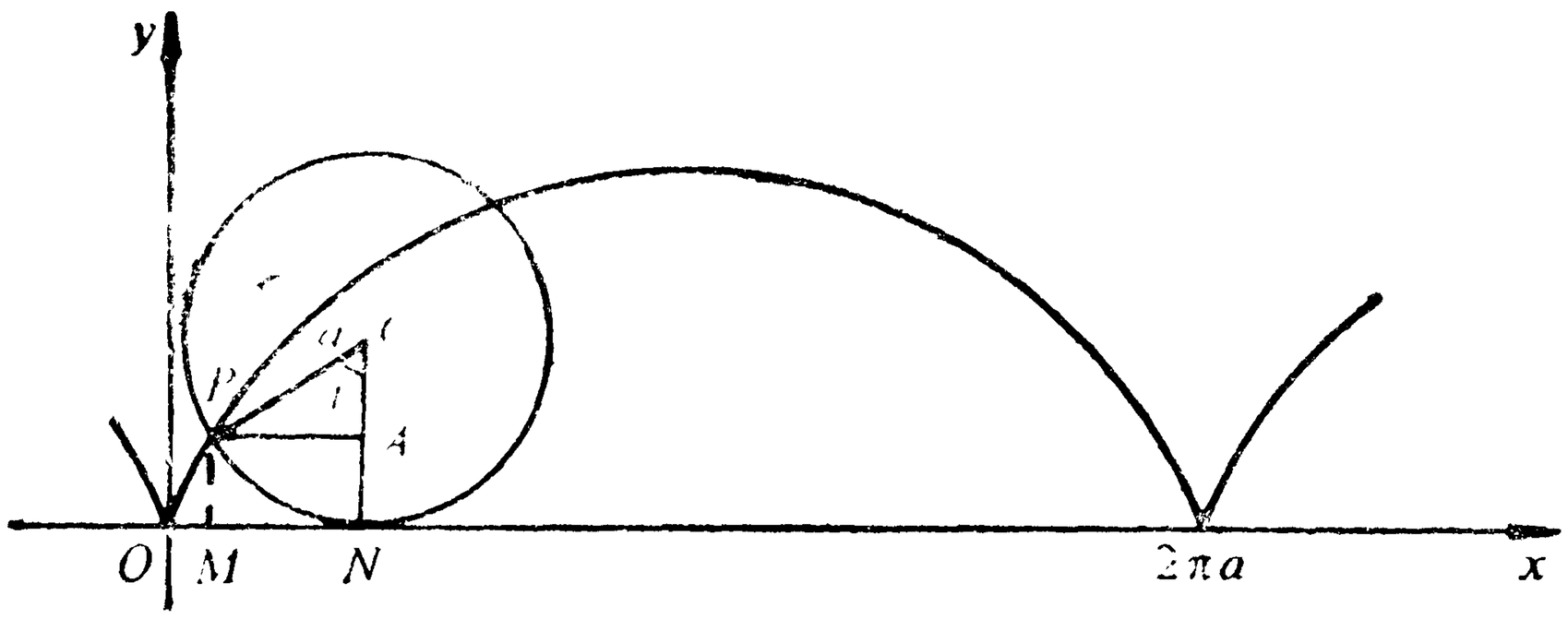


图 2.15

$$y = PM = CN - CA = a - a\cos t.$$

故得旋轮线(点 P 的轨迹)的参数方程为

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

旋轮线有无穷多支,每一分支称为一拱,每拱阔为 $2\pi a$,高为 $2a$.

例 2 星形线 一半径为 $a/4$ 的小圆在半径为 a 的固定大圆内沿大圆周滚动,求动圆周上定点 P 的轨迹(称为星形线).

解 不失一般性,取坐标系如图 2.16,开始时点 P 在 x 轴上

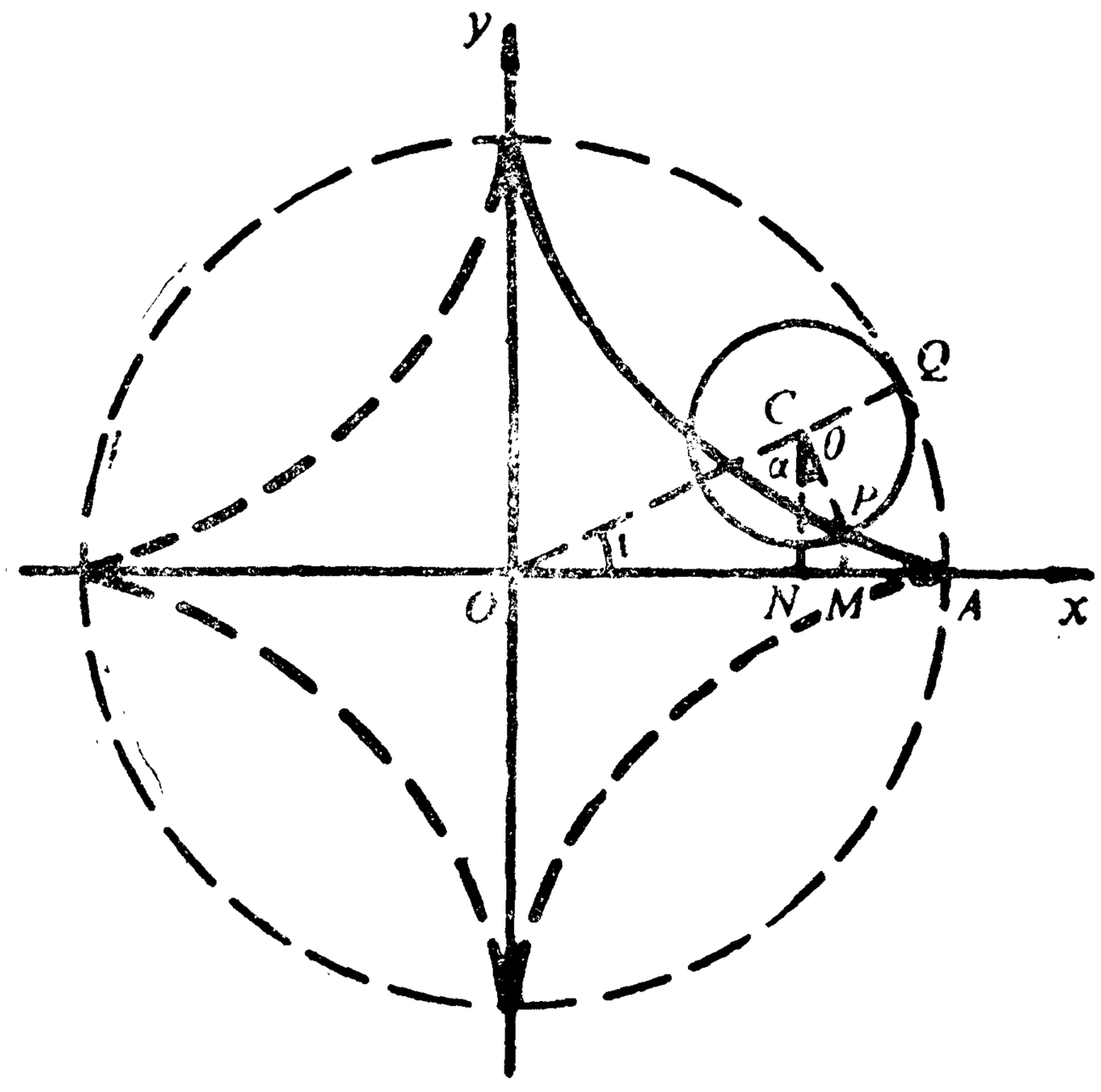


图 2.16

A 点，设小圆滚动到点 Q 时，$\angle AOQ = t$，小圆滚动角为 $\angle PCQ = \theta$，$CN \perp OA$，由 $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{PQ}$ 得到

$$\frac{a}{4}\theta = at, \quad \theta = 4t,$$

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} + t, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + t - 4t = \frac{\pi}{2} - 3t,$$

故动点 $P(x, y)$ 的坐标为

$$x = OM = ON + NM = \frac{3}{4}a\cos t + \frac{1}{4}a\sin\alpha$$

$$= \frac{3}{4}a\cos t + \frac{a}{4}\cos 3t = a\cos^3 t,$$

$$y = PM = CN - \frac{a}{4}\cos\alpha = \frac{3}{4}a\sin t - \frac{a}{4}\sin 3t$$

$$= a\sin^3 t,$$

故得星形线的参数方程为

$$x = a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

如果消去 t，即得其直角坐标方程为

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

例3 圆的渐伸线 把一条没有伸缩性的绳子绕在定圆周上，拉开绳子一端并拉直使绳子与圆周始终相切。求绳子端点的轨迹（称为圆的渐伸线）。

解 设定圆半径为 a，圆心位于坐标原点 O，绳子未拉开时，端点位于 x 轴上 A 点，如图2.17所示。P 是渐伸线上动点，PT 是圆的切线，$TM \perp OA$，$PB \perp TM$，取 $\angle AOT = t = \angle PTM$，则 $PT = \overset{\frown}{AT} = at$，点 $P(x, y)$ 的坐标为

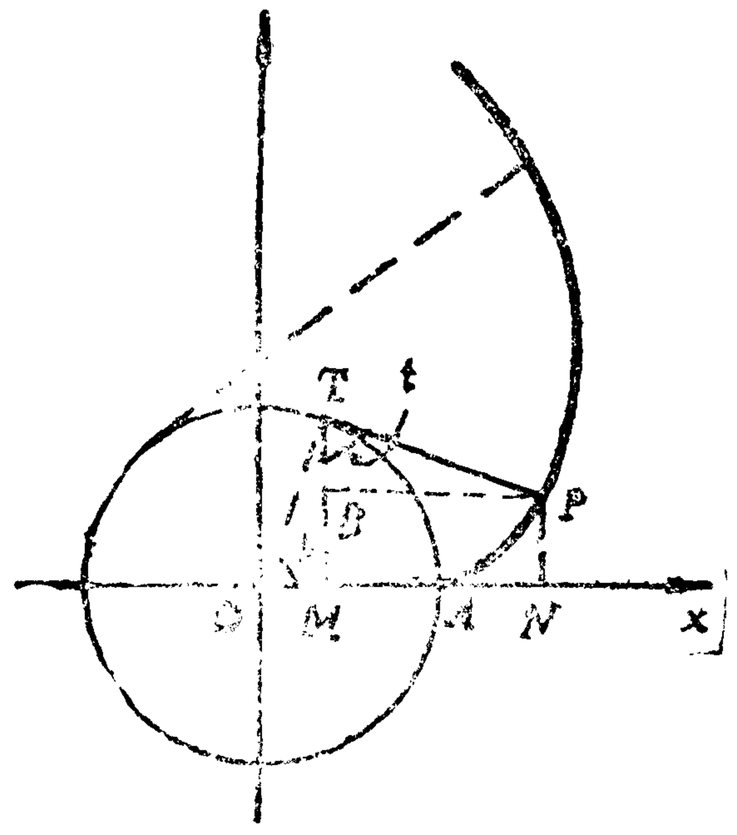


图 2.17

$$x = ON = OM + MN = a\cos t + at\sin t,$$

$$y = PN = TM - TB = a\sin t - at\cos t,$$

故得圆的渐伸线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$

例 4 心脏线　一直径为 a 的动圆在另一直径为 a 的固定圆外沿圆周滚动，求动圆周上一定点 P 的轨迹(称为心脏线)。

解　设固定圆的圆心为 A，动圆的圆心为 C。取开始时两圆的切点为坐标原点 O，连心线为 x 轴，动圆周上定点 P 位于 O 点；当动圆 C 滚动至图 2.18 的位置时，取圆滚动角 $\angle PCA = \theta$ 为参数，作 $PN \perp x$ 轴，$CB \perp x$ 轴，则 $\angle OAC = \theta$，$\alpha = \angle PCB = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$，$AC = a$，点 $P(x, y)$ 的坐标为

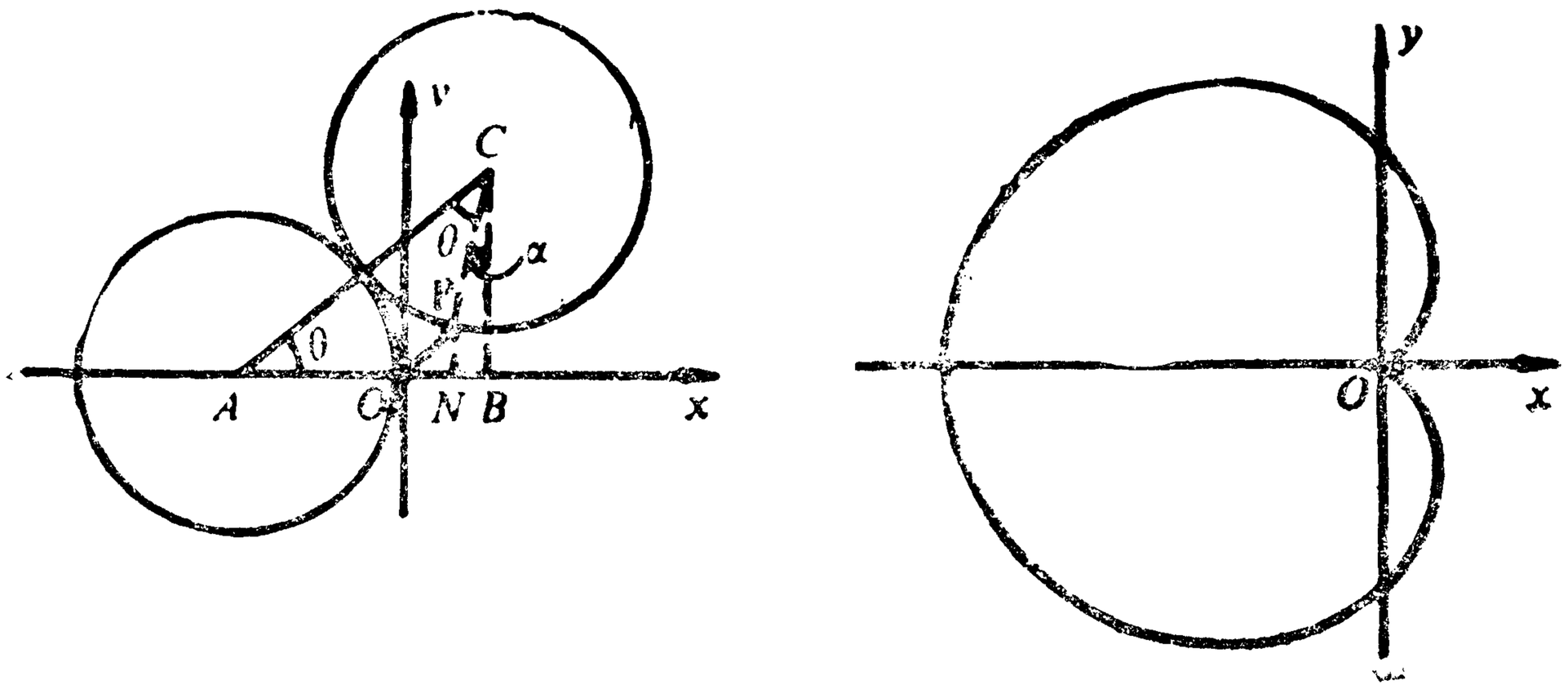


图　2.18

$$x = ON = AB - AO - NB = a\cos\theta - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin\alpha$$

$$= a\cos\theta - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2\theta = a\cos\theta - a\cos^2\theta,$$

$$y = PN = CB - \frac{a}{2}\cos\alpha = a\sin\theta - \frac{a}{2}\sin 2\theta$$

$$= a\sin\theta - a\sin\theta\cos\theta,$$

故得心脏线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta(1-\cos\theta), \\ y = a\sin\theta(1-\cos\theta), \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

将两式平方相加得

$$x^2+y^2 = a^2(1-\cos\theta)^2,$$

注意 $OP \parallel AC$，极角 $\angle PON=\theta$，极径 $r=OP=\sqrt{x^2+y^2}$，故得心脏线的极坐标方程为

$$r=a(1-\cos\theta), \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

再用 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，又可得心脏线的直角坐标方程为

$$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 5 求曲线 $y^2=x^3$ 的参数方程。

解 令 $x=t^2$，则 $y^2=t^6$，$y=t^3$，$-\infty<t<+\infty$，故其参数方程为

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}, \quad (-\infty<t<+\infty),$$

其图形如图 2.19 所示。

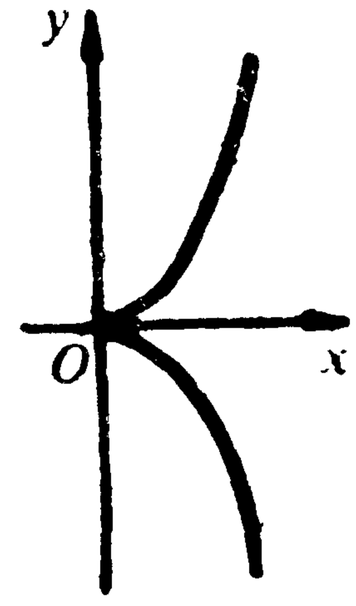


图 2.19

例 6 求笛卡尔叶形线

$$x^3-3axy+y^3=0 \quad (a>0)$$

的参数方程。

解 令 $\frac{y}{x}=t$，代入方程得

$$x^3-3ax^2t+t^3x^3=0 \Rightarrow x=\frac{3at}{1+t^3} \Rightarrow y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

故其参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty),$$

其图形如图 2.20 所示。

对曲线

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in I,$$

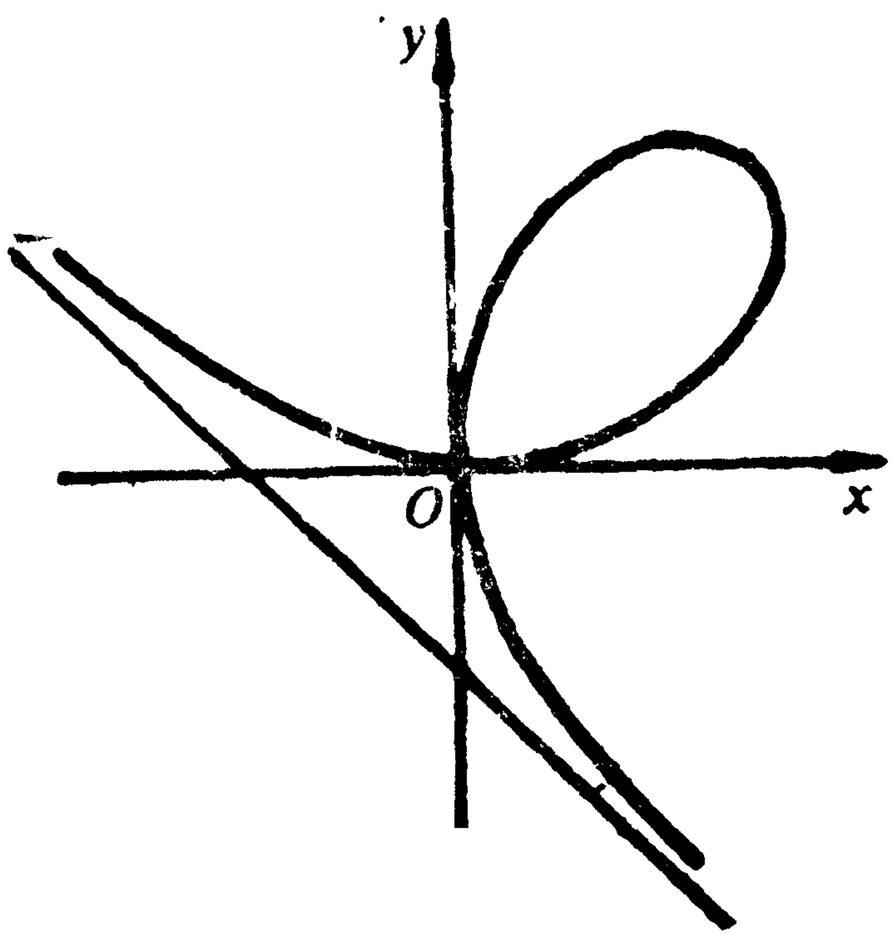


图 2.20

当 $x'(t)$, $y'(t)$ 在 I 上存在、连续，且$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$时，称它为**光滑曲线**.光滑曲线有连续转动的切线.

下面讨论切线斜率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 等的求法.

2. 参数方程所确定的函数的导数及作图例

设曲线 L 的方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in I.$$

当 $x'(t)$ 连续且不等于 0 时 (这时 $x'(t)$ 在 I 上必同号)，利用微分法可求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)\mathrm{d}t}{x'(t)\mathrm{d}t}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad t\in I.$$

注意,在 I 上 $x'(t)\neq 0$ 连续保证反函数 $t=t(x)$ 存在、可导. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是曲线 L 上对应于参数 t 的点处的切线斜率.

而二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'^2(t)}\mathrm{d}t}{x'(t)\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}.$$

其它更高阶导数的求法以此类推，但要注意掌握求高阶导数的方法,而不必死记公式.

例 7 作旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的图形.

解 (1) 定义域: $x(t)$, $y(t)$ 对任何 t 都有定义，且 $-\infty<x<+\infty$, $0\leqslant y\leqslant 2a$.

(2) 是周期函数,这是因为

$$x(t+2\pi)=x(t)+2\pi a,\quad y(t+2\pi)=y(t),$$

因此只须作 t 在长度为 2π 的区间$[-\pi, \pi]$的一段曲线；另外，因为

$$x(-t)=-x(t), \quad y(-t)=y(t),$$

图形关于 y 轴对称，所以只要作 $t\in[0, \pi]$ 的一段曲线，其余可按对称性和平移将它画出。无渐近线。

(3) $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

在 $(0, \pi)$上，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，曲线严格递增；当 $t\to 0+$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to+\infty$，曲线有垂直切线；当 $t=\pi$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，曲线有水平切线。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-1}{a(1-\cos t)\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}<0,$$

曲线是凸的。其图形见图 2.15。

例 8 作曲线 $x=t+\frac{1}{t}$，$y=t+\frac{1}{2t^2}$ 的图形。

解 (1) 当 $t\neq 0$ 时，$x(t)$，$y(t)$有定义。

(2) $x'(t)=1-\frac{1}{t^2}$，$y'(t)=1-\frac{1}{t^3}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t^3-1}{t(t^2-1)}=\frac{t^2+t+1}{t(t+1)}=1+\frac{1}{t^2+t} \quad (t\neq 0, \pm 1).$$

极值可疑点为对应于 $t=\pm 1$ 的点。当 $t\neq 0$ 和 $t\neq 1$ 时，$x'(t)$ 和 $y'(t)$存在且不同时为 0，曲线有切线；在 $t=-1$ 处有垂直切线。进一步研究可知，在 $t=1$ 处有一条斜率为 3/2 的切线，但是一个尖点。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2t+1}{(t+1)^3(t-1)}$$

拐点可疑点为对应于 $t=-\frac{1}{2}$，± 1 的点。

(4) 渐近线

垂直渐近线 $x=A$：若

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	无	$-$	$-$	$-$		$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	无	$-$	0	$+$		$+$	无	$-$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\frac{2}{5}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2	↗ $+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$
$y(x)$	↗有垂直切线↖			拐点		↖		↙有切线是尖点↗			

$$\lim_{t\to T} y=\infty,\ \lim_{t\to T} x=A;\ (A\text{ 有限},T\text{ 可无穷}).$$

水平渐近线 $y=B$：若

$$\lim_{t\to T} y=B,\ \lim_{t\to T} x=\infty,\ (B\text{有限},T\text{ 可无穷})$$

本题无垂直渐近线和水平渐近线。

斜渐近线：先找无穷分支，即是使

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=\infty\quad\left(\text{或}\quad \lim_{t\to t_0} y(t)=\infty\right)$$

的 t_0。对本题，$t_0=\pm 0,\pm\infty$，有四条无穷分支。

$$t\to 0:\ a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\pm 0}\frac{2t^3+1}{2t(t^2+1)}=\infty,$$

不存在渐近线；

$$t\to\infty:\ a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t^3+1}{2t(t^2+1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(t+\frac{1}{2t^2}-\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=0.$$

故有斜渐近线 $y=x$.

作出图形如图 2.21 所示

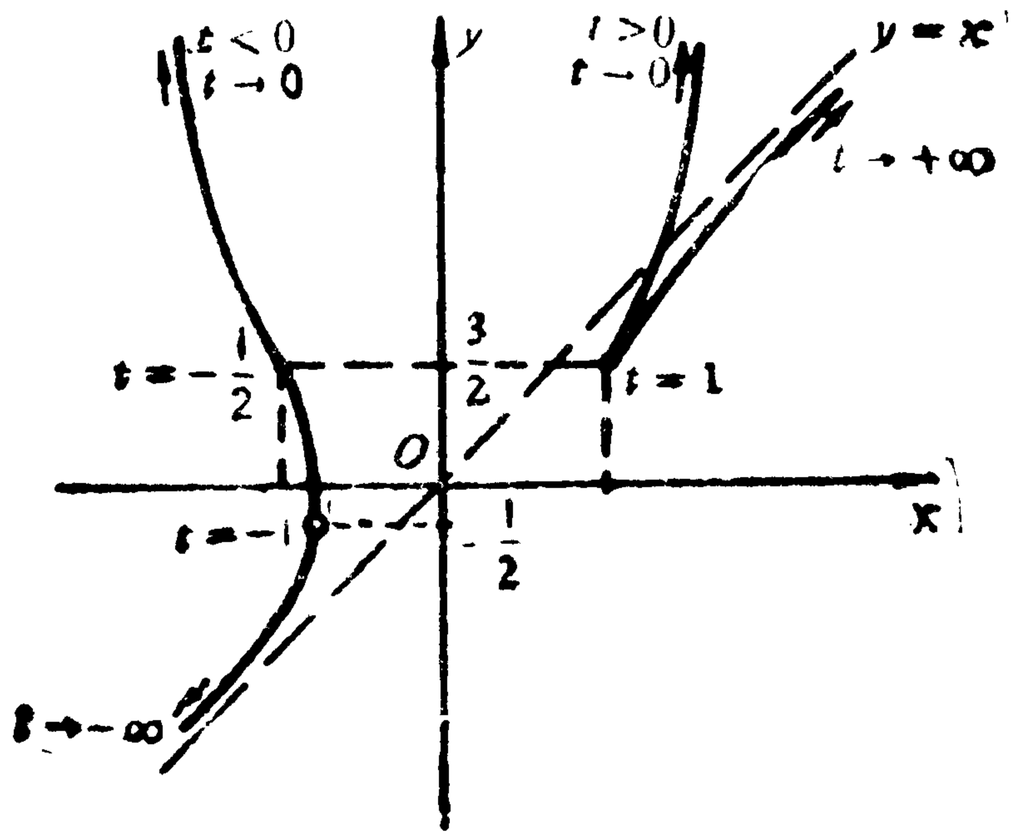


图 2.21

设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出，则其参数方程（以极角 θ 为参数）可写成

$$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta,$$

故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta},$$

§2.9 习 题

1. 求下列函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\operatorname{arc\,tg}t,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=at\cos t\\ y=at\sin t,\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$

2. 求曲线 $x=\sin t$，$y=\cos 2t$ 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线方程.

3．作曲线 $x=2t-t^2$，$y=3t-t^3$ 的图形。

§2.10 方程的近似解

在实际问题中经常需要求方程 $f(x)=0$ 的实根，但是，除几种简单类型的方程外，一般求不出根的精确值，而实际上只要求得根的近似值即可，本节介绍一种常用的求根的近似值的方法——**牛顿切线法**

首先，取区间$[a, b]$使函数 f 在$[a, b]$上满足以下两个条件：

1° f'，f'' 均存在且取正号或负号；

2° $f(a)f(b)<0$.

由于在$[a, b]$上 f 连续及 f' 不变号，可知 $f(x)=0$ 在$[a, b]$上有唯一实根 ξ.

其次，据 f'，f'' 正负号的不同组合有如图 2.22 所示的四种情形.

对图中(1)、(2)情形，$f'(x)$ 与 $f''(x)$ 同号，曲线在点 B 处的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 必满足 $\xi<x_1<b$，而点 A 处的切线则未必如此，故应从点 B 作$\overset{\frown}{AB}$的切线开始，取 $x_0=b$. 然后，过点$(x_1, f(x_1))$作 $\overset{\frown}{AB}$ 的切线与 x 轴的交点为$(x_2, 0)$：$\xi<x_2<x_1$. 进行若干步可得到有足够精确度的近似解. 对图中(3)、(4)情形，$f'(x)$与$f''(x)$异号，则必须从点 A 作 $\overset{\frown}{AB}$ 的切线开始(取 $x_0=a$)，逐步进行下去，不过最后所得的迭代公式有相同的形式. 下面以图中(3)为例来推导迭代公式.

点 $A(a, f(a))$ 处切线方程为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a),$$

它与 x 轴的交点为 $C_1(x_1, 0)$：

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

点 $A_1(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为

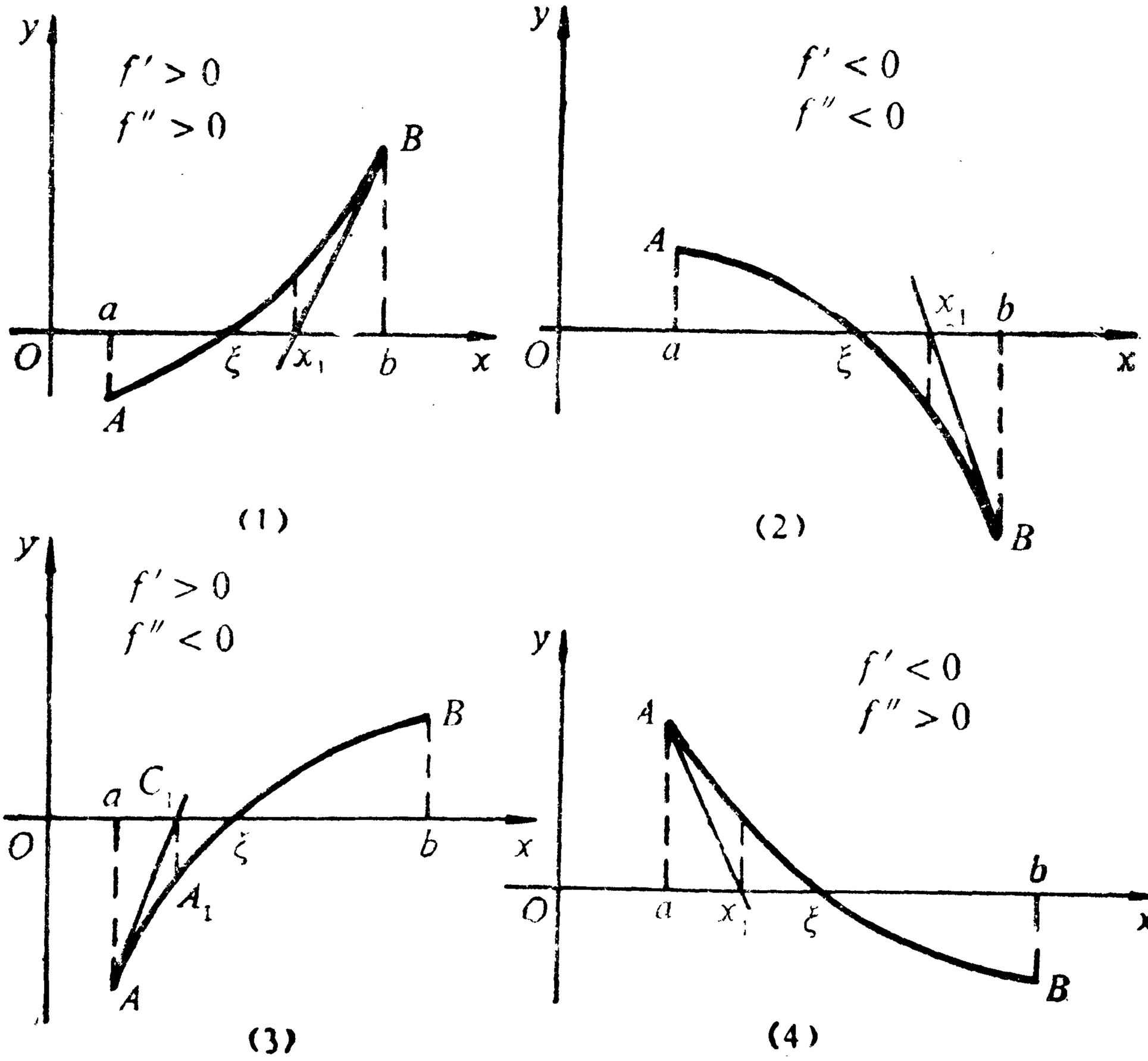


图 2.22

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1),$$

它与 x 轴的交点为 $C_2(x_2, 0)$：

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

依此类推，可得

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10.1}$$

这就是牛顿切线法求根ξ的近似值的迭代公式。

例 1 求方程

$$f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$$

在[0，1]内的根的近似值。

解 在区间[0, 1]上，$f(x)$显然连续，

$$f(0)=-1.4<0,\quad f(1)=1.7>0,$$

$$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0,\quad f''(x)=6x+2.2>0.$$

所以 $f(x)=0$ 在(0, 1)内有唯一实根 ξ. 由于 $f'f''>0$. 取$x_0=1$，代入式(10.1)进行计算，得到

$$x_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738,\quad x_2=0.738-\frac{f(0.738)}{f'(0.738)}\approx 0.674,$$

$$x_3=0.674-\frac{f(0.674)}{f'(0.674)}\approx 0.671,$$

$$x_4=0.671-\frac{f(0.671)}{f'(0.671)}\approx 0.671.$$

由于 x_4 与 x_3 的小数点后面三位数字相同，表示已得到的根的近似值精确到小数点后第三位.

§2.10 习 题

用牛顿法求下列方程在指定区间的根，精确到小数点后第三位.

1. $x^6+6x-8=0$, [1, 2].
2. $x+e^x=0$, [-1, 0].
3. $\mathrm{tg}\,x=x$ 的最小正根.

3 一元函数的积分学

§3.1 定积分的概念 可积函数

1. 引出定积分的两个例子

例 1 曲边梯形的面积

所谓曲边梯形指如图 3.1 所示的由 Ox 轴，直线 $x=a, x=b$ 及曲边 $\overset{\frown}{CD}$ 所围的图形，现求其面积 A. 设曲线 $\overset{\frown}{CD}$ 的方程为

$$y=f(x),\ x\in[a,\ b],$$

$f(x)$ 是非负的单值连续函数。

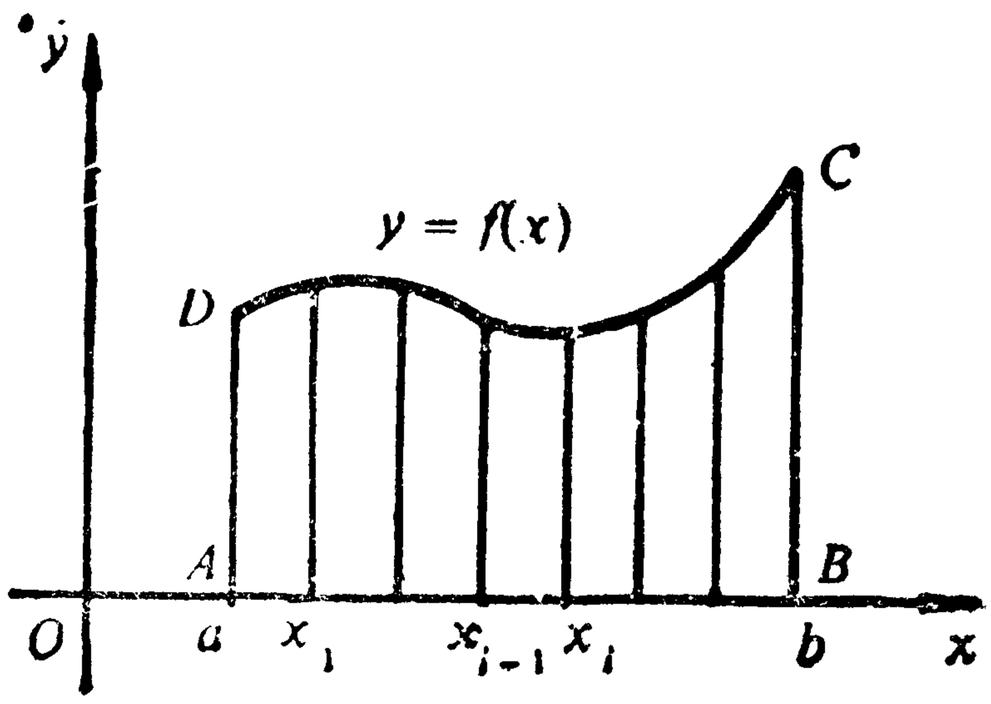


图 3.1

解 分两步来导出面积 A 的表达式。

(1) 分细取近似

任意用一组分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a,\ b]$分割成 n 个小区间$[x_{i-1},\ x_i]$，每个小区间的长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

过每个分点 x_i 作平行于 y 轴的直线，把原曲边梯形分割为 n 个小曲边梯形，其面积分别记为 $\Delta A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，因 f 连续，所以当 Δx_i 很小时，在小区间$[x_{i-1},\ x_i]$上函数值 $f(x)$ 变化很小，近似等于该区间上任一点 ξ_i 的函数值 $f(\xi_i)$，因此，可求出小曲边梯形面积的近似值

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

(2) 求和取极限

将这些小曲边梯形的面积相加，得到 A 的近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

这个近似值依赖于对区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的选取，记 $\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，如果当 $\lambda\to0$（必有 $n\to\infty$）时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在有限，且其值不依赖于对区间的分法及点 ξ_i 的选取，很自然定义面积 A 为

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

例 2 变速直线运动的路程 设物体作直线运动，其速度函数 $v(t)$ 是非负连续函数，求在时间间隔 $[T_0,T]$ 内物体所经过的路程 s.

解 对等速直线运动，$s=v(T-T_0)$. 对变速运动，当时间间隔 Δt 很小时，速度变化很小，可认为是等速的，于是，在时间区间 $[t,t+\Delta t]$ 内物体所走过的路程 $\Delta s\approx v(t)\Delta t$. 因此，类似例 1 的方法也通过两步来导出路程 s 的表达式.

(1) 分细取近似

任用一组分点

$$T_0=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=T,$$

将区间 $[T_0,T]$ 分割成 n 个小区间，每个小区间的长度为

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

在每个时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 内物体所走过的路程 Δs_i 的近似值为

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})=v(\xi_i)\Delta t_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$\xi_i\in[t_{i-1},t_i].$$

(2) 求和取极限

将 Δs_i 相加得到 s 的近似值

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$，很自然将 s 表示为

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

2. 定积分的定义

上面两个例子及许多类似的实际问题都可归结为这种和式的极限，抽去实际内容得到定积分的概念.

定义（定积分） 设函数 f 在$[a, b]$上定义，在$[a, b]$上任意扦入分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

称 $D=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 为$[a, b]$的一个分划，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$（$\lambda$ 称为分划的**模**，记具有模 λ 的分划为 $D(\lambda)$），任取 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，作和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1.1}$$

称 $S(D)$ 为 f 相应于分划 D 的积分和. 如果当$\lambda\to 0$（必有$n\to\infty$）时和式(1.1)的极限存在（极限值与分划 D 及 ξ_i 的取法无关），即若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I, \tag{1.2}$$

则称 f 在$[a, b]$上**黎曼**(Riemann)**可积**，简称 R 可积；称极限值 I 为函数 f 在区间$[a, b]$上的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I,$$

“$\int$”称为积分号，a 与 b 分别称为积分的下限与上限，统称为积分限，$[a, b]$称为积分区间，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

据此定义，例 1、例 2 的结果都可用定积分表示. 例 1 曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；例 2 路程 $s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$.

当 $f(x)=1$ 时，由定义可知

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

当 f 及$[a, b]$确定时，积分值 I 是一个确定的数．显然，它与积分变量的记号无关，即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

在定积分的定义中，规定 $a<b$，如果 $a\geqslant b$，约定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

必须指出，极限(1.2)与第 1 章引入的极限有所不同，因为有相同模的分划是多种多样的，即使分划确定了，ξ_i 的选取又是任意的．但是，它的含义仍可用“ε-δ 语言”描述为：任给 $\varepsilon>0$，不管怎样小，总存在 $\delta>0$，使得对$[a, b]$的任意一个分划 $D(\lambda)$，只要模 $\lambda<\delta$，不论 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ 如何选取，都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

由 R 可积的定义立即可推出：**若 f 在$[a, b]$上可积，则 f 在$[a, b]$上有界．**

事实上，如果 f 在$[a, b]$上无界，则对任意一个分划 D，必存在属于 D 的某个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$，f 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上无界．当 $i\neq k$ 时，选取 $\xi_i=x_i$，设

$$\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = K.$$

由于 f 在$[x_{k-1}, x_k]$上无界，因而对于任意正数 G，总能选取 $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$，使得

$$\left|f(\xi_k)\right|>\frac{G+K}{\Delta x_k},$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geqslant\left|f(\xi_k)\Delta x_k\right|-\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$\geqslant \frac{G+K}{\Delta x_k}\Delta x_k - K = G,$$

由 G 的任意性知，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能存在极限，这与 f 在 $[a, b]$ 上可积的假设矛盾。 □

3. 函数的 R 可积性

函数 f 在 $[a, b]$ 上有界只是 f 在 $[a, b]$ 上 R 可积的必要条件，并不是充分条件。例如，狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, x \text{ 有理数},\\ 0, x \text{ 无理数}\end{cases}$$

在 $[a, b]$ 上不可积。事实上，取 ξ_i = 有理数，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}(b-a) = b-a,$$

取 ξ_i = 无理数，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim 0 = 0.$$

下面讨论函数 f 黎曼可积的充要条件。首先引入上和与下和。

设 f 在 $[a, b]$ 上有界，对 $[a, b]$ 的任一分划 $D=\{x_0=a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n=b\}$，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 f 也有界，因此，f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有上确界 M_i 与下确界 m_i，作和式

$$U(D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad 与 \quad L(D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

$U(D)$ 与 $L(D)$ 分别称为达布上和与达布下和，简称**上和**与**下和**，分划 D 确定后，上、下和都是确定的常数。

注意到 $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ 及 $\Delta x_i > 0$，故对一个确定的分划，积分和都满足

$$L(D) \leqslant S(D) \leqslant U(D), \tag{1.4}$$

且

$$U(D)-L(D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,$$

其中

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup\{|f(\xi_1) - f(\xi_2)| : \xi_1, \xi_2 \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

称为 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅.

上、下和具有以下性质.

***引理** (1) 对一个取定的分划 D, 有

$$U(D) = \sup\{S(D)\}, \quad L(D) = \inf\{S(D)\}.$$

(2) 对分划 D 添加有限个分点得到分划 $\bar{D}$, 则**下和不减, 上和不增**, 即有

$$L(D) \leqslant L(\bar{D}) \leqslant U(\bar{D}) \leqslant U(D).$$

(3) 对任意两个分划 D_1 和 D_2, 恒有 $L(D_1) \leqslant U(D_2)$, 即**下和不超过上和.**

(4) 对$[a, b]$的一切分划 D,

$$\sup\{L(D)\} \xrightarrow{\text{存在, 记}} I_*, \quad \inf\{U(D)\} \xrightarrow{\text{存在, 记}} I^*,$$

并且

$$L(D) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant U(D).$$

证 (1) 由式(1.4)知, $U(D)$ 是 $S(D)$ 的一个上界. 又因 M_i 是 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的上确界, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

求和得到

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i = U(D) - \varepsilon,$$

据上确界的定义知 $U(D) = \sup\{S(D)\}$.

类似可证 $L(D) = \inf\{S(D)\}$.

(2) 显然, 只要对增加一个分点的情形进行证明. 设增加的分点$\bar{x}$落在区间(x_{k-1}, x_k)内, 记 m_k' 与 m_k'' 分别为 f 在$[x_{k-1}, \bar{x}]$与$[\bar{x}, x_k]$上的下确界, 则 $m_k = \min\{m_k', m_k''\}$, 所以

$$\begin{aligned} m_k\Delta x_k &= m_k(x_k - \bar{x}) + m_k(\bar{x} - x_{k-1}) \\ &\leqslant m_k''(x_k - \bar{x}) + m_k'(\bar{x} - x_{k-1}), \end{aligned}$$

而其他小区间$[x_{i-1}, x_i]$$(i \neq k)$都没有改变, 故有

$$L(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i \neq k} m_i\Delta x_i + m_k\Delta x_k$$

$$\leqslant \sum_{i\neq k} m_i\Delta x_i + m'_k(\bar{x}-x_{k-1}) + m''_k(x_k-\bar{x})$$
$$= L(\bar{D}).$$

类似可证 $U(\bar{D})\leqslant U(D)$.

(3) 把 D_1 和 D_2 的分点合并得到分划 D_3. 据(2)有

$$L(D_1)\leqslant L(D_3),\quad U(D_3)\leqslant U(D_2),$$

而 $L(D_3)\leqslant U(D_2)$, 故得 $L(D_1)\leqslant U(D_2)$.

(4) 据(3),对所有可能的分划,下和组成的集合$\{L(D)\}$有上界 $U(D_1)$, D_1 是某一分划, 于是有上确界, 记为 I_*, 且 $I_*\leqslant U(D_1)$; 由 D_1 的任意性又可推知, 上和之集 $\{U(D)\}$有下界 I_*, 于是 $\{U(D)\}$有下确界, 记为 I^*, 且 $I_*\leqslant I^*$. 因此, 对任何上、下和都有

$$L(D)\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant U(D).$$ □

I_*, I^* 分别称为 f 在$[a,b]$上的**下积分**, **上积分**.

***定理 1** 有界函数 f 在$[a,b]$上可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}[U(D)-L(D)] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0. \tag{1.5}$$

证 "⇒" 设 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(D) = I$ 存在, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使对$[a,b]$的任一分划 $D(\lambda)$ 及任意选取 ξ_i, 只要 $\lambda<\delta$, 就有

$$|S(D)-I|<\varepsilon \quad 即 \quad I-\varepsilon<S(D)<I+\varepsilon, \tag{1.6}$$

由引理之(1)知, 对每个确定的分划, 有

$$L(D)=\inf\{S(D)\},\quad U(D)=\sup\{S(D)\}.$$

故有

$$I-\varepsilon\leqslant L(D)\leqslant U(D)\leqslant I+\varepsilon,$$

于是

$$0\leqslant U(D)-L(D)\leqslant 2\varepsilon,$$

即得

$$\lim_{\lambda\to 0}[U(D)-L(D)]=0.$$

"⇐" 由引理之(4)有

$$L(D)\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant U(D),$$

据假设, 式(1.5)成立, 有

$$0\leqslant I^*-I_*\leqslant U(D)-L(D)<\varepsilon,$$

因此, $I_*=I^*=I$. 而对任一分划 $D(\lambda)$, 有

$$L(D)\leqslant I\leqslant U(D),\quad L(D)\leqslant S(D)\leqslant U(D),$$

由此可得

$$|S(D)-I|\leqslant U(D)-L(D)<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(D)=I$，定积分存在。 □

式(1.5)用“ε-δ”语言描述为：任给 $\varepsilon>0$，不管怎样小，$\exists\delta>0$，只要分法的模 $\lambda<\delta$，都有

$$0\leqslant U(D)-L(D)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

定理 2 在$[a, b]$上定义的连续函数 f 是可积的。

证 由康托尔定理，闭区间$[a, b]$上的连续函数必一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x'$，$x''\in[a, b]$，$|x'-x''|<\delta$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

对$[a, b]$的任一分划 $D(\lambda)$，当 $\lambda<\delta$ 时，$\forall x'$，$x''\in[x_{i-1}, x_i]$必满足 $|x'-x''|<\delta$，从而

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

于是 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅

$$\omega_i=\sup\{|f(x')-f(x'')|: x', x''\in[x_{i-1}, x_i]\}$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

由此有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$ □

若函数 f 在 $[a, b]$ 上除有限个第一类间断点外都是连续的，则称 f 为**分段连续函数**。

定理 3 在$[a, b]$上定义的分段连续函数 f 是可积的。

证 设 f 在 $[a, b]$ 上的全部间断点为 $a_1, \cdots, a_k$，f 在 $[a, b]$上的振幅为 Ω。对$[a, b]$的任一分划 $D(\lambda)$，相应的 n 个小区间分成两类：包含间断点和不含间断点。因此，将和式也分成两部分：

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\Sigma_1\omega_i\Delta x_i+\Sigma_2\omega_i\Delta x_i,$$

其中 Σ_1 是包含间断点部分，Σ_2 是不含间断点部分。

包含间断点的小区间至多 $2k$ 个，其总长度 $\leqslant 2k\lambda$，则当 $\lambda<\frac{\varepsilon}{4k\Omega}$ 时，

$$\Sigma_1\omega_i\Delta x_i\leqslant\Omega\Sigma_1\Delta x_i\leqslant\Omega\cdot 2k\lambda<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不含间断点的分划小区间落在$[a,b]$上互不相交的有限个(至多 $k+1$ 个)闭子区间上，且 f 在这些闭子区间上都是连续的，因而必一致连续。按定理 2 的证明，对任给 $\varepsilon>0$，存在对所有这些闭子区间都适用的 $\delta>0$，只要 $\lambda<\delta$，振幅 $\omega_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，所以

$$\Sigma_2\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Sigma_2\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2},$$

故当 $\lambda<\min\left(\frac{\varepsilon}{4k\Omega},\ \delta\right)$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ □

定理 4 在$[a,b]$上定义的单调有界函数是可积的。

证明留作练习。

例 3 将下列和式极限用定积分表示：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

解 上述极限可写成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}.$$

与定积分的定义式(1.2)比较，如果选取

(1) 积分区间为 $[0,1]$，n 等分，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$；

(2) 被积函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$，ξ_i 取为 $x_i=\frac{i}{n}$；$\sqrt{1+x}$ 在 $[0,1]$上连续，因此可积。

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

§3.1 习　　题

1. 设函数 f,g 在$[a,b]$上连续，用定积分表示下列平面区域的面积.

(1) $\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b, f(x)\leqslant y\leqslant 0\}$,

(2) $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant g(y), a\leqslant y\leqslant b\}$.

2. 将下列和式极限用定积分表示.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i-1}{n}\pi$,　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{2i}{n}}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

*3. 证明定理 4.

§3.2　定积分的性质

性质 1（线性性质）　设函数 f,g 在$[a,b]$上可积，k为常数，则 $kf, f+g, f-g$ 在$[a,b]$上可积，且有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　用定积分定义证明，只对 $f+g$ 证明之，其余自证.

对$[a,b]$的任一分法 $D(\lambda)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i,$$

令 $\lambda\to 0$ 两边取极限，据假设右边两个和的极限存在，所以左边和的极限存在. 因此，$f+g$ 可积，且有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\qquad\square$$

性质 2（积分区间可加性） 设函数 f 在$[a, b]$上可积，若把区间$[a, b]$分为两个区间$[a, c]$和$[c, b]$，则 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

证 在分划区间时总将点 c 取作分点，因此，总可把对$[a, c]$和$[c, b]$的分划并起来作为对$[a, b]$的分划，故有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2.2}$$

$$\sum_{[a,b]} \omega_i\Delta x_i=\sum_{[a,c]} \omega_i\Delta x_i+\sum_{[c,b]} \omega_i\Delta x_i, \tag{2.3}$$

这里 $\sum_{[a,b]}$ 表示在区间$[a, b]$上求和. 由于 f 在$[a, b]$上可积，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} \omega_i\Delta x_i=0,$$

而式(2.3)右边两项非负，故有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,c]} \omega_i\Delta x_i=0,\qquad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{[c,b]} \omega_i\Delta x_i=0,$$

所以 f 在$[a, c]$和$[c, b]$上可积.

再对式(2.2)令 $\lambda\to 0$ 取极限即得式(2.1). □

注 若f 在区间 I 上可积，则对 I 上任意三点 a, b, c, 都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上，例如当 $a<b<c$ 时，据性质 2 有

$$\int_a^c=\int_a^b+\int_b^c \Rightarrow \int_a^b=\int_a^c-\int_b^c=\int_a^c+\int_c^b.$$

性质 3 设 f, g 在$[a, b]$上可积，且 $f(x)\geqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别，若在$[a, b]$上 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

证 由

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限立即可得.

注 若 f 在$[a, b]$上连续,且 $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\not\equiv 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

证明留作练习.

性质 4 设 f 在$[a, b]$上可积,则$|f|$在$[a, b]$上也可积,且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

证 对于 $[a, b]$ 的任一分法 $D(\lambda)$, 以 $\omega_i(|f|)$ 和 $\omega_i(f)$ 分别表示$|f|$和 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅,由于对$[x_{i-1}, x_i]$上的任意两点 x', x'', 都有

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\leqslant|f(x')-f(x'')|,$$

因此,

$$\begin{aligned}\omega_i(|f|)&=\sup\{\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\}\\&\leqslant\sup\{|f(x')-f(x'')|\}=\omega_i(f),\end{aligned}$$

于是有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i(|f|)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i.$$

令 $\lambda\to 0$ 取极限,据假设右边和式的极限为 0,所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\omega_i(|f|)\Delta x_i=0,$$

故$|f|$在$[a, b]$上可积. 再用

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|,$$

据性质 3 可得

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.\qquad\square$$

注 当$|f|$在$[a, b]$上可积时,称 f 在$[a, b]$上**绝对可积**. 性质 4 说明, 对 R 积分, 可积的函数必绝对可积. 但反之不成立,

$|f|$可积时 f 未必可积！（例见习题 2）

性质 5 设 f, g 在$[a, b]$上可积，则 $f\cdot g$ 在$[a, b]$上可积。

证 对$[a, b]$的任一分法 $D(\lambda)$，用 $\omega_i(f)$，$\omega_i(g)$，$\omega_i(fg)$分别表示 f, g, fg 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅。注意到可积函数是有界的，故

$$\exists M>0, \text{使}|f(x)|\leqslant M, |g(x)|\leqslant M, \forall x\in[a, b]$$

由于对$[x_{i-1}, x_i]$上的任意两点 x'，x''，有

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')f(x'')|\\&\leqslant|[f(x')-g(x'')]g(x')|+|f(x'')[g(x')-g(x'')]|\\&\leqslant M\omega_i(f)+M\omega_i(g),\end{aligned}$$

所以

$$\omega_i(fg)\leqslant M(\omega_i(f)+\omega_i(g)),$$

由此可知

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i\right),$$

据假设 f,g 可积，故当 $\lambda\to0$ 时，右端两个和的极限为0，因此得到

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i=0,$$

即 fg 在$[a, b]$上可积。 □

定理（积分第一中值定理）

(1) 设在$[a, b]$上 f, g 满足：1° 可积，2° $g(x)$不变号，3° $m\leqslant f(x)\leqslant M$。

则存在常数 μ，$m\leqslant\mu\leqslant M$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\tag{2.4}$$

特别，若 $g(x)\equiv1$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a).\tag{2.5}$$

(2) 设在$[a, b]$上 f 连续，g 可积且不变号，则存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \tag{2.6}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{2.7}$$

证 (1) 首先指出，条件 1° 保证了 fg 可积。

为确定起见，不妨假设 $g(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

因此，

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

于是，在$[m, M]$中必存在数 μ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 因 f 在 $[a, b]$ 上连续，则可取 m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$上的最小值和最大值，据连续函数的介值定理，对 μ，$m\leqslant\mu\leqslant M$，必存在 $\xi\in[a, b]$，使 $f(\xi)=\mu$，代入式(2.4)和(2.5)即得式(2.6)和(2.7)。 □

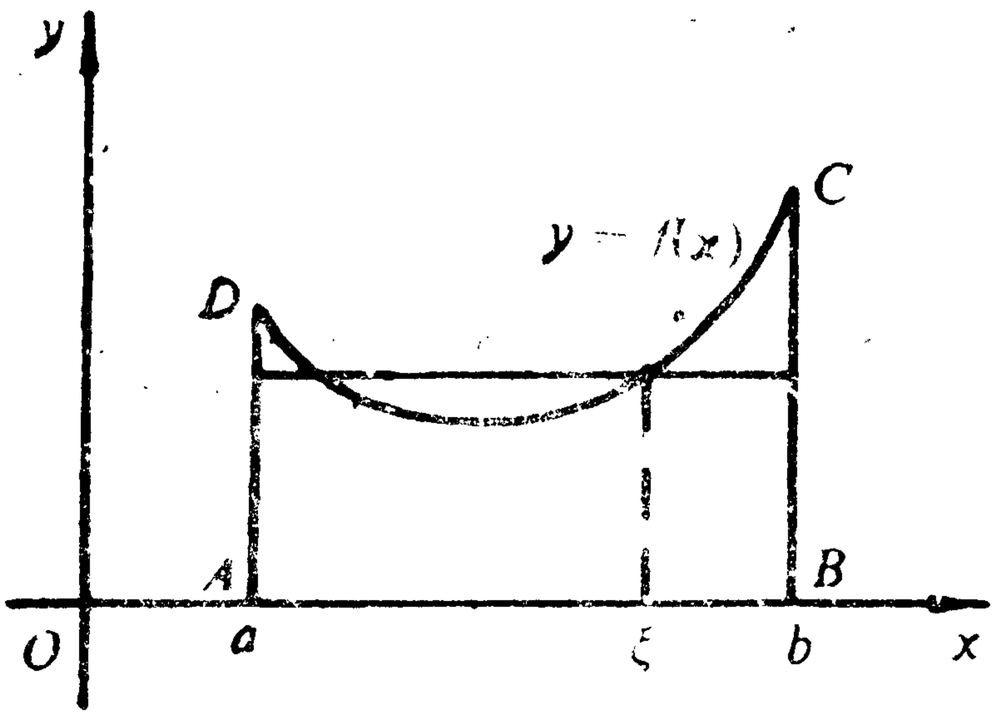


图 3.2

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，式(2.7)有明显的几何意义，如图 3.2 所示，它表示至少存在一点 $\xi\in[a, b]$，使曲边梯形 $ABCD$ 的面积等于以 AB 为底，$f(\xi)$ 为高的矩形的面积。因此，称 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的**平均值**。

例 1 设函数 f 与 g 在$[a, b]$上分段连续，证明施瓦兹(Schwartz)不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

证 设 $\lambda\in\mathrm{R}$，则

$$(\lambda f(x)+g(x))^2=\lambda^2 f^2+2\lambda fg+g^2\geqslant 0,$$

积分得

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}\,x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}\,x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0. \tag{2.9}$$

当 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 时，因为式(2.9)对一切实数λ成立，故必有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}\,x=0$，式(2.8)成立。

当 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$ 时，用

$$\text{“}a>0,\ a\lambda^2+2b\lambda+c\geqslant 0\Leftrightarrow b^2-ac\leqslant 0\text{”}$$

即得式(2.8)。

§3.2 习　　题

1. 设 f 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$f(x)\not\equiv 0$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x>0.$$

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

证明：$|f|$在$[a,b]$上可积，而 f 在$[a,b]$上不可积。

3. 确定下列定积分的符号：

(1) $I_1=\int_d^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x\ (0<d<1)$，　(2) $I_2=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$。

4. 试比较下列两组定积分的大小：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{10}x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{5}x\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$。

5. 试证：

(1) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{tg}^n x\,\mathrm{d}x=0$。

§3.3 原函数与不定积分

1. 原函数

定义1（原函数） 设函数 f 在区间 I 上定义，如果在 I 上存在函数 F，满足

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in I \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)==f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 F 是 f 在区间 I 上的**原函数**.

例如，$(x^2)'=2x$，$(x^2+1)'=2x$，因此，x^2 与 x^2+1 都是 $2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数.

问题 (1) f 满足什么条件时其原函数 F 存在，(2) 如果存在，是否唯一？

首先回答问题(1)，为此引入变上限的积分.

2. 变上限的积分

设 f 在区间 I 上 R 可积，$a\in I$，则

$$x\mapsto \Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 I 上定义了一个函数，它是上限 x 的函数，称为**变上限的积分**.

定理1 设函数 f 在区间 I 上可积，则 $\Phi(x)$ 在 I 上连续.

证 给 x 以增量 Δx，且使 $x+\Delta x\in I$，则有

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

注意到 f 在 I 上有界，即存在正常数 K 使 $|f(x)|\leqslant K$，因此，

$$|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)|\leqslant\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant K|\Delta x|,$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\to 0$，所以 Φ 连续. □

定理2 设函数 f 在区间 I 上可积，且在点 $x\in I$ 处连续，则 $\Phi(x)$ 在点 x 可导，且

$$\Phi'(x)=f(x).$$

证 据式(3.1)，再注意

$$f(x)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(x)\mathrm{d}t,$$

便有

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}-f(x)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t,$$

因为 f 在点 x 连续，任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon,$$

故有

$$\left|\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}-f(x)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t\right|$$

$$<\varepsilon\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{d}t\right|=\varepsilon,$$

因此，

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}\text{存在，且}\ f(x).\qquad\square$$

定理 2 说明：若 f 在 I 上连续，则 $\Phi(x)$ 在 I 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$，即**任一连续函数都有原函数，且变上限的积分**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是它的一个原函数。我们主要讨论初等函数，它们在定义域内是连续的，因此原函数也存在。

对于变下限的积分，易得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\right)=-f(x).\qquad(3.2)$$

例 1 设 $F(x)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$。

解 因 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$，所以 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ 当补充定义 $f(0)=1$ 后在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。令 $u=2x$，由复合函数微分法，得

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin u}{u}\cdot 2=\frac{\sin 2x}{x}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\int_o^{x^2}\operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t$.

解 这是“$\dfrac{0}{0}$”型不定型，应用罗必达法则，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x^2\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$

注 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也可写成 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，其中 x 起着两个完全不同的作用，尽管容易混淆，但习惯上常这样写，懂得其含义后是不会混淆的.

3. 不定积分

前面已回答了问题(1)，现在回答问题(2).

若 f 在 I 上存在原函数 F，因为对任意常数 C，由

$F'(x)=f(x),\ \forall x\in I\Rightarrow(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$

可见 $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 在 I 上的原函数. 又因为若 $G(x)$ 也是 $f(x)$的一个原函数，则

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in I,$$

所以，$G(x)-F(x)$等于常数 C_0，$G(x)=F(x)+C_0$，$x\in I$. 说明 f 的任意两个原函数只差一个常数，故 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全部原函数.

定义 2（不定积分） 如果函数 f 在区间 I 上存在原函数 F，则称 f 的全部原函数为 f 的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

常数 C 称为**积分常数**，其他名称与定积分相同.

由不定积分的定义立即可得(设 $f\in C(I)$，$F\in C^1(I)$)

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x),\ \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

4. 牛顿-莱布尼兹公式

定理 3 设函数 f 在区间 I 上连续，F 是 f 的一个原函数，若 $a, b \in I$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{3.3}$$

证 据定理 2，$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 f 的一个原函数，因此，

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C,$$

以 $x = a$ 代入，得 $C = -F(a)$，所以

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a),$$

再令 $x = b$，得到

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

此即是公式(3.3)。 □

公式(3.3)把计算定积分归结为求原函数(即求不定积分)，称为**牛顿-莱布尼兹公式**。

通常记 $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$，公式(3.3)又写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

5. 基本积分公式

不定积分是求导运算的逆运算，因此，由导数公式立即可得以下积分公式。

积分公式表 I

1. $\int \mathrm{d}x = x + C$, $\int a\mathrm{d}x = ax + C$

2. $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1)$

3. $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

4. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C,\ \int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$

5. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

6. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\int\sec^{2}x\,\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x+C$

8. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=\int\csc^{2}x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{ctg}\,x+C$

9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a}}=\ln|x+\sqrt{x^{2}+a}|+C$

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\mathrm{arc\,tg}\,x+C$

12. $\int\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\,x+C$

13. $\int\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\,x+C$

14. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^{2}x}=\mathrm{th}\,x+C$

15. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^{2}x}=-\mathrm{cth}\,x+C$

由求导运算法则不难得到不定积分有以下两个运算法则：

1. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$, k 为常数，

2. $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

利用这两个积分法则和积分表 I，我们可以计算一些简单的积分，关键的一步是将所给的被积函数，经过代数运算拆成几项，使每项都可用积分表 I 积出。

例 3 求下列不定积分。

(1) $\int\frac{(1-\sqrt{x})^3}{x}\mathrm{d}x$,　　(2) $\int\mathrm{e}^x(1+2^x)\mathrm{d}x$,

(3) $\int\mathrm{tg}^2x\,\mathrm{d}x$,　　(4) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

解 (1) $\int\frac{(1-\sqrt{x})^3}{x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}+3-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\ln x-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\ (x>0)。$$

(2) $\int\mathrm{e}^x(1+2^x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^x+\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}+C=\mathrm{e}^x+\frac{(2\mathrm{e})^x}{1+\ln2}+C。$$

(3) $\int\mathrm{tg}^2x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x-x+C$。

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\mathrm{arc\,tg}\,x+C$。

例 4 设 p 为正常数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0。$$

证 用积分中值定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sin\xi_n\int_n^{n+p}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\xi_n\cdot\ln\frac{n+p}{n}\right)=0,\quad n\leqslant\xi_n\leqslant n+p。$$

例 5 估计积分值

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x。$$

解法 1 因为 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}。$$

积分得

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant I\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解法 2 用积分中值定理，

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sin\xi\cdot\ln 2$$

$\frac{\pi}{4}\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$，因为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\xi\leqslant 1$，所以

$$0.49\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2\leqslant I\leqslant\ln 2\approx 0.69.$$

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ 2, & x\geqslant 1,\end{cases}\quad\text{求 } F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

解 当 $-1\leqslant x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}0\mathrm{d}t=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=0+\int_{0}^{x}t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2};$$

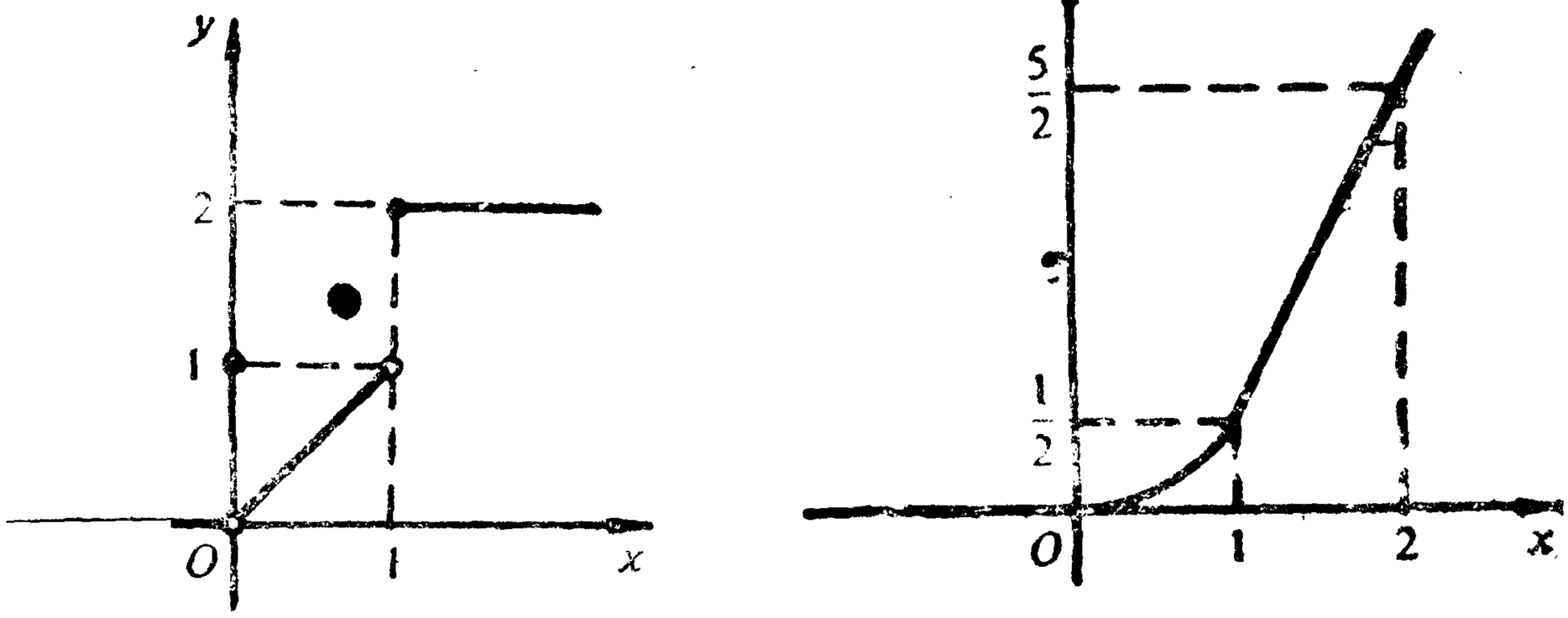
当 $x>1$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}t\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+2(x-1)=2x-\frac{3}{2};$$

即得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\frac{3}{2}, & x>1.\end{cases}$$

$y=f(x)$与 $y=F(x)$的图形见图 3.3。在 $f(x)$的可去间断点 $x=0$ 处 F 可导，而在 $f(x)$ 的跳跃间断点 $x=1$ 处 F 不可导。



$y=f(x)$　　$y=F(x)$

图　3.3

例 7　计算定积分

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$$

解　因为

$$\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=|\sin x-\cos x|$$

$$=\begin{cases}\cos x-\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4},\\ \sin x-\cos x, & \dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

所以

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=[\sin x+\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}.$$

§3.3　习　题

1. 求下列函数的指定阶导数.

(1) $y=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，求 y'；

(2) $y=\int_{-x}^{-\sqrt{x}}\cos\pi t^2\,\mathrm{d}t$，求 y'；

(3) $y=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，其中 f 连续可导，求 y''；

(4) $y=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$，$f$ 连续　g_1，g_2 可导，求 y'.

2. 求下列函数在指定区间上的极值.

(1) 求 $y=\int_0^x\frac{3t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在区间[0，1]上的最大值和最小值；

(2) 求 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$上的极值.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}$，(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x[(1+t)\ln(1+t)-t]\mathrm{d}t}{x^3}$，

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\operatorname{arc\,tg}t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$，(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t}{x^6}$.

4. 试证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=0$，(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x=0$，

(3) $\left|\int_{-2\pi}^{2\pi}x^2\sin e^x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{16\pi^3}{3}$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\operatorname{arc\,tg}(at)\mathrm{d}t}{x^3}=1$，求 a 值.

6. 设函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x)\leqslant0$，试证函数

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在(a,b)内有 $F'(x)\leqslant0$.

7. 求下列积分：

(1) $\int_{-1}^1(x-1)(x+2)\mathrm{d}x$，　　(2) $\int\frac{(3-t)^3}{t^2}\mathrm{d}t$，

(3) $\int\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$，　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}$，

(5) $\int\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$，　　(6) $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos2x}\mathrm{d}x$，

(7) $\int_{-2}^2|x^2-1|\mathrm{d}x$，　　(8) $\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|\mathrm{d}x$.

8. 用施瓦兹不等式证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$,

(2) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\leqslant 2\pi\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}\quad(|k|<1)$.

§3.4 换元积分法

本节介绍与复合函数求导方法相对应的积分方法，这种积分方法称为换元积分法。换元积分法是基本积分法之一，其基本思想是通过适当的变量代换，将所求的积分变换成积分表中的积分，从而求出积分。

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$x=\varphi(t)$ 在区间 J 上有连续导数，且 $\varphi(J)\subset I$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\,\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \quad (4.1)$$

证 设 F 是 f 在 I 上的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

据复合函数微分法有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t))=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(\varphi(t))\varphi'(t),\quad t\in J.$$

因此，$F\circ\varphi$ 是 $(f\circ\varphi)\varphi'$ 在 J 上的一个原函数，由不定积分定义有

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(t))+C,$$

而 $F(\varphi(t))=F(x)$，于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

应用公式(4.1)有两种途径，下面分别讨论之。

1. 不定积分的凑微分法

若 $f(x)\mathrm{d}x$ 可利用微分运算凑成

$$f(x)\mathrm{d}x = g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x),$$

且可求得 $g(u)$ 的原函数 $G(u)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = G(\varphi(x)) + C.$$

具体计算时一般不必写出换元关系 $u=\varphi(x)$。请看以下例题。

例 1 计算下列不定积分。

(1) $\int (ax+b)^m \mathrm{d}x (m \neq -1)$，　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$，

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)}$，　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$。

解 (1) $\int (ax+b)^m \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int (ax+b)^m \mathrm{d}(ax+b)$

$$= \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)} = \int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C.$$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

例 2 求下列不定积分。

(1) $\int \sqrt{a^2+x^2}\, x\mathrm{d}x$，　(2) $\int \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x$，

(3) $\int \sin^2 x\, \mathrm{d}x$，　(4) $\int \sin mx \sin nx\, \mathrm{d}x (m \neq n)$。

解 (1) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(a^2+x^2)$

$$= \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(2) $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(-1)}{\cos x}\,\mathrm{d}\cos x = -\ln|\cos x| + C.$

(3) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\mathrm{d}(2x)$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(4) $\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) + C.$$

例 3 求下列不定积分.

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x$,　　(2) $\int \mathrm{tg}^5 x \sec^3 x\,\mathrm{d}x$,

(3) $\int \mathrm{tg}^6 x\,\mathrm{d}x$,　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

解 (1) $\int \sin^2 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 \mathrm{d}\sin x$

$$= \int \sin^2 x(1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

(2) $\int \mathrm{tg}^5 x \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}\cos x$

$$= \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{2}{5\cos^5 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

(3) $I_6 = \int \mathrm{tg}^6 x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^4 x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,x - \int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - I_4$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - I_0,$$

而 $I_0 = \int \mathrm{d}x = x + C_1$，所以

$$I_6 = \int \operatorname{tg}^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1 + (\mathrm{e}^x)^2} = \operatorname{arc\,tg}\mathrm{e}^x + C.$

例 4 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ 与 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \mathrm{d}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

$$= \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

例 5 求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5}\mathrm{d}x$,　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x}}\mathrm{d}x$,

(3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x - x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2 - 2x + 5}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - 2x + 5)}{x^2 - 2x + 5} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

(2) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x^2-2x)}{2\sqrt{x^2-2x}} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$$

$$= \sqrt{x^2-2x} + 2\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x}\,| + C.$$

(3) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}(2-2x)+2}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(2x-x^2)}{2\sqrt{2x-x^2}} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + 2\arcsin(x-1) + C.$$

从这个例子可学会计算积分

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

的方法.

2. 不定积分的变量变换法

设函数 $x=\varphi(t)$ 有单值反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t$$

$$= G(t)+C = G(\varphi^{-1}(x))+C.$$

这里要求容易求出 $g(t)$ 的原函数 $G(t)$.

例 6 求下列不定积分，其中常数 $a>0$.

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$,

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, (4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $x=a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$, 代入得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x=\int a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

因 $\sin t=\frac{x}{a}\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，故

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(2) 令 $x=a\,\mathrm{tg}\,t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x=\frac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$，代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

因 $\mathrm{tg}\,t=\frac{x}{a}$，由图3.4可见，$\sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$，

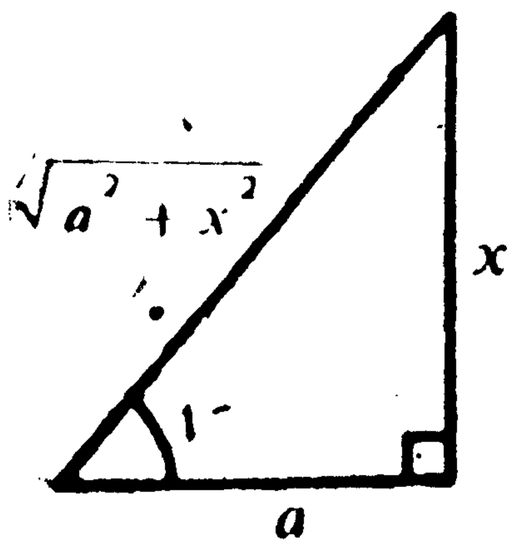


图 3.4

$\cos t=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$，故

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\arctg\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+C.$$

(3) 作倒变换 $x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，

当 $x>a>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{1-a^2t^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin at+C$$

$$=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

当 $x<-a<0$ 时，令 $s=-x>a>0$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{s^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{s}+C$$

$$=\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

(4) 令 $x+\frac{\pi}{4}=u$, 则

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sin^2 u-\cos^2 u}{\sin u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin u\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

3. 定积分的情况

定理 2 设 f 在区间 I 上连续，变换 $x=\varphi(t)$ 满足：

1° φ 在区间 J 上连续可导，且 $\varphi(J)\subset I$；

2° α,β 是 J 内两点，它们在 I 中的对应点为 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

证 定理 1 已证明，若 F 是 f 在 I 上的一个原函数，则 $F\cdot\varphi$ 是 $(f\circ\varphi)\varphi'$ 在 J 上的一个原函数，所以

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

由于定积分在换元时同时改变积分限，因此省去了不定积分换元中求得原函数后代回原积分变量这一步。

例 7 求 $I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解 方法同例 6(1)，令 $x=a\sin t$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，代入得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2.$$

注 I值等于半径为a的圆面积的1/4.事实上，$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 正表示圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 第一象限部分的面积。同样，其上半圆的面积为

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\pi a^2.$$

例 8 计算 $I=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$。

解 作变换 $x=\mathrm{tg}\,t$，它在 $J=\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有连续导数，则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

例 9 设 f 是定义在 R 上以 T 为周期的函数，且在任何有界区间上分段连续，则 $f(x)$ 在长度为 T 的任何区间上的积分值相同，即有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

证 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$，

对右边第三个积分，令 $x=t+T$，则有

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x,$$

代入即得所要结果。 □

例 10 设函数 f 在$[-a,a]$上分段连续，试证：

(1) 当 f 为奇函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 当 f 为偶函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$

对右边第一个积分作变换 $x = -t$，则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\mathrm{d}x.$$

(1) 当 f 为奇函数时，$f(-x) = -f(x)$，所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 当 f 为偶函数时，$f(-x) = f(x)$，所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$ □

例 11 计算 $I = \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解 作变换 $x = \pi - t$，则

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t - I,$$

所以

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}[-\operatorname{arctg}(\cos t)]_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

§3.4 习　　题

1. 求下列被积函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{(5x-2)^{5/2}}$,　　(2) $x\,e^{x^2}+e^{-2x}$,

(3) $\dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$,　　(4) $\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$,

(5) $\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,　　(6) $\dfrac{1}{2+3x^2}$,

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$,　　(8) $\dfrac{1}{2-3x^2}$,

(9) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$,　　(10) $\sin mx\cos nx(m\neq n)$,

(11) $\sin^2 x\cos^4 x$,　　(12) $\dfrac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$,

(13) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$,　　(14) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$,

(15) $\dfrac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$,　　(16) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$,

(17) $\dfrac{1}{x\ln x}$,　　(18) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$,

(19) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+2e^x}}$,　　(20) $\dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$,

(21) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+3x-1}}$,　　(22) $\dfrac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}$,

(23) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$,　　(24) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$,

(25) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$,　　(26) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$,

(27) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$,　　(28) $\sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}$,

(29) $\dfrac{x}{x^8-1}$,　　(30) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{x^2+x+1}dx$,　　(2) $\int_0^a x^3\sqrt{2ax-x^2}\,dx$　$(a>0)$,

(3) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x}dx$　$(a>1)$,　(4) $\int_2^4\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$,

(5) $\int_8^{27}\dfrac{dx}{x(\sqrt[3]{x}-1)}$,　　(6) $\int_0^a\dfrac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x^2}{1+\sin x^2} dx$,　　(8) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta - \sin^3\theta}\, d\theta$.

3. 计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$, ($m$, n 正整数),

(2) $\int_{-a}^{a} x^3 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ($a>0$),

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$ (a, b 正常数),

(4) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{|x|}\, dx$.

4. 比较积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad 与 \quad -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

的大小.

§3.5　分部积分法　杂例

1. 分部积分法

分部积分法是基本积分法之一，它是与乘积求导公式相对应的积分公式.

定理　设函数 u 和 v 在区间 I 内有连续导数，则有

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \qquad (5.1)$$

若 $a, b \in I$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (5.2)$$

证　公式(5.2)可由公式(5.1)及牛顿-莱布尼兹公式导出.

因为 $(uv)' = u'v + uv'$，而这三项都是 x 的连续函数，它们的不定积分均存在，故积分得

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

移项即得式(5.1). □

这两个公式称为**分部积分公式**．通常可简记为

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,\quad \int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

分部积分法是将 $u\,\mathrm{d}\,v$ 的积分转化为 $v\,\mathrm{d}u$ 的积分，使用它的关键是适当选取 $u(x)$ 和 $v(x)$，将困难的积分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 化为容易的积分 $\int v\,\mathrm{d}u$．下面举例说明如何用这个重要积分法．

例 1　x^k(k 为正整数)与 e^x，$\sin x$，$\cos x$乘积的积分．

(1) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,　　(2) $\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\cdot 2\,x\,\mathrm{d}x$

$$= x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\,x\right)$$

$$= \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

(2) $\int x\,\sin\,2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\cos 2x$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

例 2　幂函数与对数函数、反三角函数乘积的积分．

(1) $\int x^k \ln x\,\mathrm{d}x$,　　(2) $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\ tg}\,x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int x^k\,\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)$

$$= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \int \frac{x^k}{k+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x - \frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1} + C.$$

(2) $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\ tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{arc\,tg}\,x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arc\ tg} x]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

例 3 求 $I_1 = \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ 与 $I_2 = \int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x (ab \neq 0)$.

解 $$I_1 = \int \sin bx\,\mathrm{d}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,\mathrm{d}e^{ax}$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{b^2}{a^2}I_1.$$

所以

$$I_1 = \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

从第一步还可得到 I_1 与 I_2 的关系：

$$aI_1 + bI_2 = e^{ax}\sin bx + C,$$

由此可得

$$I_2 = \int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

特别，取 $a = b = 1$，则有

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

例 4 求 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$.

解 $$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sec x\,\mathrm{d}\operatorname{tg} x = \sec x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx,$$

所以

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

例 5 求 $\int \sqrt{x^2+a} \, dx$.

解
$$\int \sqrt{x^2+a} \, dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \left(\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}} \right) dx.$$

所以

$$\int \sqrt{x^2+a} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}\int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}} dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C.$$

至此又得到一些较简单函数的积分，列在下面便于查阅。

积分公式表 Ⅱ

16. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

19. $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$

20. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

24. $\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$

25. $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

26. $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

2. 杂例

例 6 求不定积分 $\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解 先作变换 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, 代入得

$$\begin{aligned}\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x&=\int\sin t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=-2\int t\,\mathrm{d}\cos t\\&=-2(t\cos t-\int\cos t\,\mathrm{d}t)\\&=-2t\cos t+2\sin t+C\\&=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

例 7 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x\quad(m\text{ 为自然数})$$

并求其值.

解 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x.$$

下面来计算 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x$, 首先推导递推公式.

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(m-1)\sin^{m-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{m-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m,$$

所以

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \tag{5.3}$$

而 $I_0 = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$，故逐次应用递推公式(5.3)可得：

当 m 为偶数 $2n$ 时(n 为自然数)

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}. \tag{5.4}$$

当 m 为奇数 $2n+1$ 时

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n+1}\cdots\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{5.5}$$

例 8 证明华利斯公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

证 对 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，据例 7 式(5.4)，(5.5)，有

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{2}{\pi}, \tag{5.6}$$

因对 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 有

$$0\leqslant I_{2n+1}\leqslant I_{2n}\leqslant I_{2n-1},$$

即

$$1\leqslant\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leqslant\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}},$$

而由式(5.3)，知

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1+\frac{1}{2n}\to 1\ (\text{当 } n\to\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

再用式(5.6)即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$ □

例 9 泰勒公式的积分型余项.

设函数 f 在点 a 的邻域 $U(a,r)$ 内有直到 $n+1$ 阶连续导数，则有

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t,\quad \forall x\in U(a,r).$$

证 $\forall x\in U(a,r)$，泰勒公式余项

$$r_n(x)=f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]$$

满足

$$r_n(a)=r_n'(a)=\cdots=r_n^{(n)}(a)=0,\quad r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),$$

用分部积分公式，便得

$$\begin{aligned}r_n(x)&=\int_a^x r_n'(t)\mathrm{d}t=-\int_a^x r_n'(t)\mathrm{d}(x-t)\\&=-(x-t)r_n'(t)\Big|_{t=a}^{x}+\int_a^x r_n''(t)(x-t)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\int_a^x r_n''(t)\mathrm{d}[(x-t)^2]=\frac{1}{2!}\int_a^x r_n'''(t)(x-t)^2\mathrm{d}t\\&=\cdots=\frac{1}{n!}\int_a^x r_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

积分型余项在幂级数理论中有重要应用，下面来看它的两种特殊形式. 因 $f^{(n+1)}(x)$ 连续，且对固定的 n，$(x-t)^n$ 在$[a,x]$或$[x,a]$上不变号，据积分中值定理可得

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x(x-t)^n\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$$\xi=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1,$$

及

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)).$$

前者就是拉格朗日型余项，后者称为**柯西型余项**。

例 10 求不定积分

$$\int |x-1| \mathrm{d}x.$$

解法 1 先求出一个原函数。

当 $x \geqslant 1$ 时

$$\int |x-1| \mathrm{d}x = \int (x-1) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x.$$

当 $x < 1$ 时

$$\int |x-1| \mathrm{d}x = \int (1-x) \mathrm{d}x = x - \frac{x^2}{2} + \alpha.$$

因原函数在 $x=1$ 处连续，所以要满足

$$\frac{1}{2} - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha = -1,$$

代入得到了一个原函数，而

$$\int |x-1| \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - x + C, & x \geqslant 1, \\ x - \dfrac{x^2}{2} - 1 + C, & x < 1. \end{cases}$$

解法 2 $$\int |x-1| \mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(x-1) \int (x-1) \mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{sgn}(x-1) \cdot \frac{(x-1)^2}{2} + C$$

$$= \frac{(x-1)|x-1|}{2} + C.$$

说明 因 $f(x) = |x-1|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，因此，它的原函数有连续导数。在积分时要去掉绝对值，就要分成二段积，各有一个积分常数，但要注意在分段点 $x=1$ 处每个原函数是连续的，因此，必须满足“连接条件”，两个积分常数不是独立的，原积分的积分常数仍是一个。

3.5 习　　题

1. 求下列被积函数的不定积分。

(1) $\ln(2x)$,　　(2) $\operatorname{arc\,tg}(3x)$,

(3) $x^3\cos x$;　　(4) $\dfrac{\arcsin x}{x^2}$,

(5) $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$,　　(6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

(7) $x\operatorname{arc\,tg} x$,　　(8) $\sin x\ln(\operatorname{tg} x)$,

(9) $(\arcsin x)^2$　　(10) $x(\operatorname{arc\,tg} x)^2$,

(11) $x^3e^{-x^2}$,　　(12) $e^{\sin x}\sin x\cos x$。

2. 求下列被积函数的不定积分。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-2}}$,　　(2) $\sqrt{x^2-5x+7}$,

(3) $\sqrt{2x-x^2}$,　　(4) $(1-x^2)^{3/2}$,

(5) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6x+13}}$,　　(6) $x\sqrt{1+x+x^2}$,

(7) $e^{-|x|}$,　　(8) $\max\{1, x^2\}$。

3. 计算下列定积分。

(1) $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$,　　(2) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$,

(3) $\int_0^{\pi}e^x\cos^2 x\,dx$,　　(4) $\int_1^3\sqrt{|x(x-2)|}\,dx$,

(5) $\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$,　　(6) $\int_0^{\pi}\dfrac{x\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+3\cos^2 x}}\,dx$,

(7) $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$,　　(8) $\int_0^{\pi}\theta\cos^{2n}\theta\,d\theta$。

4. 已知 $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f'(2)=5$, 求

$$\int_0^1 xf''(2x)\,dx.$$

§3.6　有理函数与三角函数有理式的积分

1. 有理函数的积分

两个多项式函数之商称为**有理分式函数**，我们总假设分子与

分母之间没有公因子。若分子的次数小于分母的次数，称为**真分式**，否则称为**假分式**。对假分式，可用多项式除法把它化为一个多项式与一个真分式之和，而多项式是容易积分的，因此只需讨论真分式的积分。对有理真分式的积分，主要技巧是用代数学中将真分式拆成有限个最简分式之和的技巧，而这些最简分式的积分都不难求得。

定理 设多项式

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

其中 $a, \cdots, b, p, q, \cdots, r, s$ 均为实数；$p^2-4q<0, \cdots, r^2-4s<0$；$\alpha, \cdots, \beta, \lambda, \cdots, \mu$ 为正整数，则既约真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可唯一地分解成下列最简分式(部分分式)之和：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta}}\\&+\frac{H_1x+K_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{H_\lambda x+K_\lambda}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\cdots\\&+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^{\mu}},\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中，系数 $A_i, B_i, H_i, K_i, R_i, S_i$ 等都是实常数。

式(6.1)中系数确定的方法见后面的例子，其中出现的最简分式有以下四种：

(1) $\dfrac{A}{x-a}$，　(2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$，

(3) $\dfrac{Hx+K}{x^2+px+q}$　(4) $\dfrac{Hx+K}{(x^2+px+q)^k}$，

$p^2-4q<0$，　$k=2, 3, \cdots$。

前三种的积分较简单，

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$。

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$　$(k=2, 3, \cdots)$。

$$(3)\ \int\frac{Hx+K}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\frac{H}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}$$

$$+\left(K-\frac{Hp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}$$

$$=\frac{H}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2K-Hp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

对第(4)种的积分，记 $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$，作变换 $x+\frac{p}{2}=t$，则得

$$\int\frac{Hx+K}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x=\int\frac{Ht+K-\frac{Hp}{2}}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{H}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}+\left(K-\frac{Hp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$$

$$=\frac{H}{2}\cdot\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(K-\frac{Hp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}.$$

而最后一个积分

$$I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$$

可由递推公式求出．事实上，用分部积分得

$$I_k=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{k+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k(I_k-a^2I_{k+1}),$$

所以得到递推公式

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k\quad(k\text{为自然数}).$$

综上所述，有理函数的积分问题理论上已彻底解决，任一有理函数的积分都可用有理函数、对数函数及反正切函数之和的有限形式表示出来，而实际困难是分母 $Q(x)$ 的因式分解．

例 1 求 $\int \frac{3x^2-x}{(x+1)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数分解成最简分式之和. 令

$$\frac{3x^2-x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

去分母得

$$3x^2-x=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1).$$

确定系数 A, B, C 需要 3 个方程，可用比较同类项的系数得到它们，也可令 x 取特殊值得到它们. 例如，在上式中

令 $x=1$，得 $2=2C\Rightarrow C=1$,

令 $x=-1$，得 $4=4A\Rightarrow A=1$,

令 $x=0$，得 $0=A-B+C\Rightarrow B=A+C=2$,

故

$$\int \frac{3x^2-x}{(x+1)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x+1|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\alpha,$$

其中 α 为积分常数.

例 2 求 $\int \frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 令

$$\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

去分母得

$$3x^2+2x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x,$$

比较同类项系数得

$$\left.\begin{array}{ll} x^4\text{：} & A+B=0 \\ x^4\text{：} & C=0 \\ x^2\text{：} & 2A+B+D=3 \\ x^1\text{：} & C+E=2 \\ x^0\text{：} & A=1 \end{array}\right\} \quad \text{解得} \quad \left\{\begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=0, \\ D=2, \\ E=2. \end{array}\right.$$

故

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x+2}{(x^2+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+2\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)+\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+\alpha\,,$$

其中 α 为积分常数.

注意，有时也可将被积函数直接拆成最简分式之和，如例2，

$$\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1+2x(x+1)}{x(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x(x^2+1)}+\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}\,.$$

2 三角函数有理式的积分

三角函数经过最限次四则运算所得的函数称为三角函数有理式，因 $\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x,\sec x,\csc x$ 都可用 $\sin x,\cos x$ 的有理式表示，故三角函数有理式都可表示为 $R(\sin x,\cos x)$，其中 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数. 本段讨论

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\,.$$

1) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，(例如，有 $\sin x$ 的奇次因子)，则可作代换 $\cos x=t$ 化为有理函数的积分

例 1 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}$.

解 令 $\cos x=t$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{-\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t^2)}$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.$$

2) 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，(例如，有 $\cos x$ 的奇次因子)，则可作代换 $\sin x = t$ 化为有理函数的积分

例 2 求 $\int \frac{dx}{\cos^3 x + 3\cos x}$.

解 作代换 $\sin x = t$，则

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x + 3\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x (\cos^2 x + 3)}$$

$$= \int \frac{dt}{(1-t^2)(4-t^2)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2-1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t-2} \right| \right) + C$$

$$= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$$

3) 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则可作代换 $t = \operatorname{tg} x$ 或 $t = \operatorname{ctg} x$ 化为有理函数的积分

例 3 求 $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

解法 1 作代换 $t = \operatorname{tg} x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$，则有

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt = \int \frac{d\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t} + C \quad (t>0 \text{ 或 } t<0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\sqrt{2} \operatorname{tg} x} + C \quad (x>0 \text{ 或 } x<0).$$

解法 2 $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{dx}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)}{\cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,2x}{1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

注 若要求定积分

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x},$$

利用不定积分的结果，有

(1) $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\frac{\mathrm{tg}^2 x-1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=0,$

(2) $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

(1) 的结果是错误的，这是因为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}^2x-1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}$ 只是 $\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ 在 $x>0$ 的区间或 $x<0$ 的区间上的原函数，不是 $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$ 上的原函数。如果考虑到被积函数是偶函数，则可用以下算法：

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}^2x-1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

还要指出，在以上计算中用到了

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{arc\,tg}x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x+\to\infty}\mathrm{arc\ tg}\,x=\frac{\pi}{2}.$$

4) 一般情况　作半角代换 $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$，总可把 $R(\sin x,\cos x)$ 的积分化为有理函数的积分

令 $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$，$x=2\,\mathrm{arc\,tg}\,t$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

所以

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

例 4 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$ $(a>0)$.

解 令 $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $x=2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

代入得

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{1+a\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{(1+a)+(1-a)t^2}\mathrm{d}t.$$

若 $0<a<1$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}t\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}t\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}t\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

若 $a=1$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\mathrm{d}t=t+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

若 $a>1$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(a-1)t^2-(a+1)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-1}\,t-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}\,t+\sqrt{a+1}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-1}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{a+1}}\right|+C.$$

从以上讨论可见，尽管作半角代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 总可把三角函数有理式的积分化为有理函数的积分，但运算往往很烦，因此，当能用整角代换或其他方法解决时，一般不用半角代换。例如，对

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x \qquad (m, n \text{ 为整数}),$$

如果用半角代换，得到的有理函数的积分极其复杂，若用整角代换，运算要简单些，如果能化成倍角的三角函数有理式的积分则更简单。

例 5 求不定积分 $\int \cos^6 x \,\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}\int(1+\cos 4x)\mathrm{d}x \\ &\quad +\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)\mathrm{d}\sin 2x \\ &= \frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3x}{16}+\frac{3}{64}\sin 4x \\ &\quad +\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C \\ &= \frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.\end{aligned}$$

例 6 求不定积分 $\int\frac{5\cos x}{\sin x+2\cos x}\,\mathrm{d}x$。

解 原式 $=\int\frac{2(\sin x+2\cos x)+(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\,\mathrm{d}x$

$$=2x+\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

§3.6 习　　题

1．求下列被积函数的不定积分。

(1) $\dfrac{x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+2x+5}$, (2) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$,

(3) $\dfrac{x^3+2x-5}{x^2+x-2}$, (4) $\dfrac{x}{x^3-1}$,

(5) $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$, (6) $\dfrac{x^4}{x^3-x^2+x-1}$,

(7) $\dfrac{x^4-x^3-x^2-3x}{x^6+x^4-x^2-1}$, (8) $\dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$,

(9) $\dfrac{2x^4+x^3+4x^2-3x+1}{x^3+2x-3}$, (10) $\dfrac{1}{x(x^3+1)^2}$.

2. 求下列被积函数的不定积分.

(1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$, (2) $\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$,

(3) $\dfrac{\sin^5 x}{\cos^4 x}$, (4) $\dfrac{1}{\sin x\cos^4 x}$,

(5) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$, (6) $\dfrac{1}{2+3\operatorname{tg}x}\quad\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(7) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$, (8) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$,

(9) $\dfrac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, (10) $\dfrac{4\sin x-3\cos x}{(2\sin x+\cos x)^2}$.

§3.7 简单无理函数的积分及其他

当被积函数是无理函数时，积分的基本方法是作适当的代换将它化为有理函数的积分. 这是很不易做到的，下面举例说明对一些简单无理函数是如何作代换来积出的，其中 R 是有理函数，a, b, c, d 是常数，$m, n\in\mathrm{N}$.

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型积分 $(ad-bc\neq 0)$

作代换

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,\quad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},$$

即可将它化为有理函数的积分.

例 1 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^6+x^5+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}+x^2}}$.

解 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = t$, $x = \frac{1}{t^3-1}$, $\mathrm{d}x = \frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$,

$$\text{原式} = \int \frac{(t^3-1)^2}{t+1} \cdot \frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t = -3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{3}{2}t^2+3t-3\ln|t+1|+C$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+3\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$-3\ln\left|\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$$

2. $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$ 型积分

作代换

$$\sqrt[l]{ax+b} = t \quad (l \text{ 是 } m, n \text{ 的最小公倍数})$$

可将它化为有理函数的积分.

例 2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}$.

解 因被积函数中根指数的最小公倍数为 6, 故作代换 $t = \sqrt[6]{x+1}$ 可消除根式.

$$t = \sqrt[6]{x+1}, \quad x = t^6-1, \quad \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 6t-6\operatorname{arctg}t+C$$

$$= 6\sqrt[6]{x+1}-6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

*3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型积分 ($b^2-4ac\neq 0$)

关于这类积分, 在前面已经碰到过一些较简单的情况, 例如, 将 ax^2+bx+c 配方后用三角函数代换法化为三角函数有理式的

积分；用倒变换等。这里介绍三种欧拉代换，经过这些代换可将它化为有理函数的积分。

1）若 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异的实根 λ，μ，即

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

这种情况可用第 1 段的方法解决。实际上，令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}=t(x-\lambda)$$

即可。

2）若 $a>0$，令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x\ (\text{或}\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x),$$

两边平方，可得到

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t},\ \mathrm{d}x=\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}\,)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

这样就将原积分化为 t 的有理函数的积分了。

3）若 $c>0$，令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}\quad(\text{或}\ \sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}\,)$$

类似 2)就可将原积分化为 t 的有理函数的积分。

例 3 求 $F=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4x^2-3x-1}}$。

解法 1 令

$$\sqrt{4x^2-3x-1}=\sqrt{(4x+1)(x-1)}=t(x-1),$$

则

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-4},\ \mathrm{d}x=\frac{-10t}{(t^2-4)^2}\mathrm{d}t,\ \sqrt{4x^2-3x-1}=\frac{5t}{t^2-4},$$

$$F=\int\frac{-2(t^2-4)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}+10\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$=-2\,\mathrm{arc\ tg}\,t+\frac{10}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\mathrm{arc\,tg}\,t\right)+C$$

$$=3\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x-1}+\frac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x}+C.$$

解法 2　令 $\frac{1}{x}=t$，则

$$F=\int\frac{-|t|}{\sqrt{4-3t-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\operatorname{sgn}\left(\int\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(4-3t-t^2)}{\sqrt{4-3t-t^2}}+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2}}\right)$$

$$=\operatorname{sgn}t\left(\sqrt{4-3t-t^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2t+3}{5}\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x}+\operatorname{sgn}x\cdot\frac{3}{2}\arcsin\frac{2+3x}{5x}+C.$$

此题还可用欧拉代换 $\sqrt{4x^2-3x-1}=t-2x$ 及三角代换 $x-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}\sec t$ 求解，因计算较烦，这里不一一写出。

4. 其　他

虽然连续函数的原函数一定存在，但不一定能用初等函数表示。在上节证明了有理函数及三角函数有理式的积分一定能用初等函数表示，但是，有些很简单的初等函数，其原函数不能用初等函数表示(俗称积不出来)。例如，已经证明，积分

$$\int\sin x^2\,\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\quad\int\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

等等都积不出来。在学过级数后可将它们用无穷级数形式表示出来。而在实际问题中则大多是定积分，可用近似计算求出定积分的近似值。

要注意，如果在某个结果中有几个积分积不出来，则应尽可能将它们化成同一形式，有时可将积不出的积分消去而将原积分求出。

例 4 已知 $f'(\ln x)=\dfrac{x\ln x}{(1+\ln x)^2}$，求 $f(x)$。

解 令 $\ln x=t$，$x=e^t$，则

$$f'(t)=\frac{e^t\cdot t}{(1+t)^2}=\frac{e^t}{1+t}-\frac{e^t}{(1+t)^2},$$

积分得

$$f(t)=\int\frac{e^t}{1+t}dt-\int\frac{e^t}{(1+t)^2}dt=\int\frac{e^t}{1+t}dt+\int e^t d\left(\frac{1}{1+t}\right)$$

$$=\int\frac{e^t}{1+t}dt+\frac{e^t}{1+t}-\int\frac{e^t}{1+t}dt=\frac{e^t}{1+t}+C,$$

所以

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x}+C.$$

§3.7 习 题

1. 求下列被积函数的不定积分。

(1) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$，　(2) $\dfrac{1}{x^3\cdot\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}}$，

(3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$，　(4) $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$，

*(5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$，　*(6) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$，

(7) $\dfrac{1}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}$，　(8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}$。

2. 求下列被积函数的不定积分。

(1) $\dfrac{1}{(1+e^x)^2}$，　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$，

(3) $e^{-x}\sqrt{1+e^x}$，　(4) $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2 e^x$，

(5) $x\,e^x\sin x$，　(6) $\cos^2\sqrt{x}$，

(7) $\operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x})$，　(8) $\dfrac{1}{x^6(x^2+1)}$，

(9) $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$，　(10) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$，

(11) $\dfrac{1}{(x^3+2^3)^2}$。

§3.8　定积分的近似计算

本节介绍两个基本的近似计算公式.

1. 梯形公式

用几何直观帮助理解. 定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$在几何上表示曲边梯形$ABCD$的面积(见图3.5),现将区间$[a, b]$$n$等分,小区间长度为

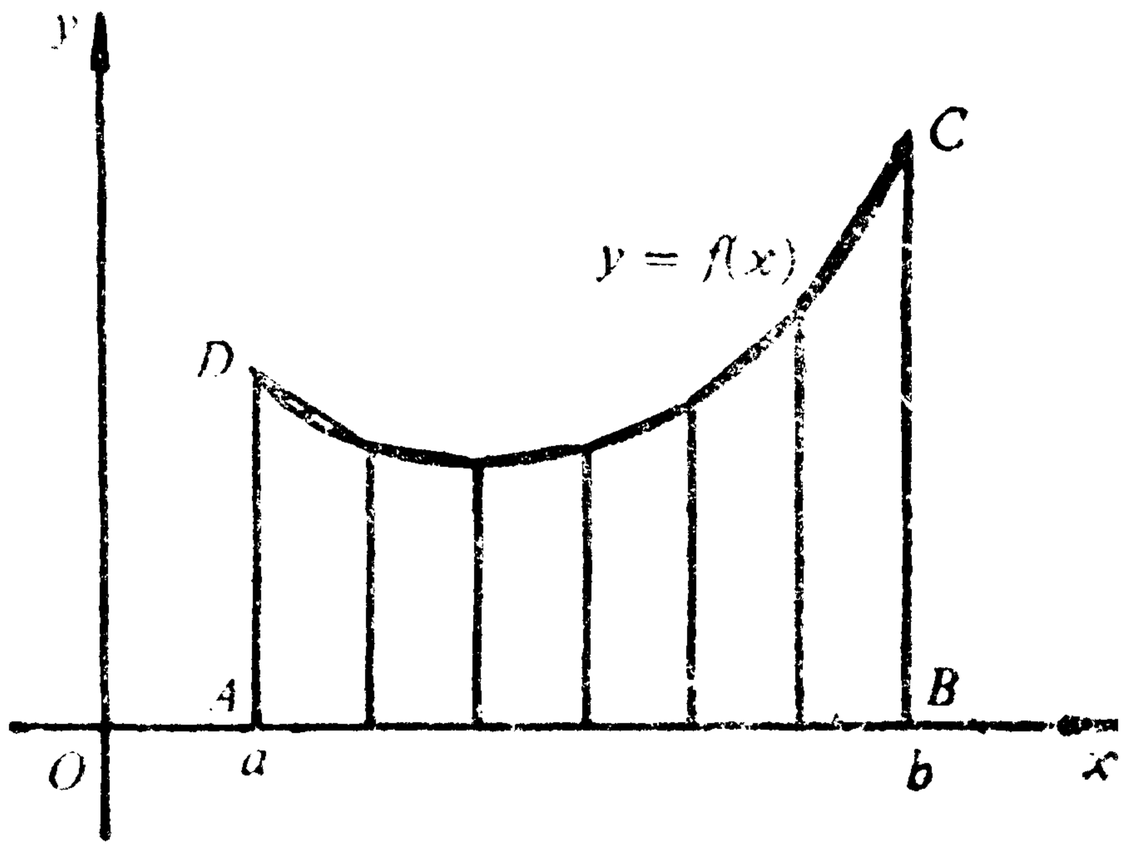


图　3.5

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},$$

分点为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$y_i=f(x_i),$$

过各分点作平行于y轴的直线,将曲边梯形$ABCD$分成n个小曲边梯形,对每个小曲边用连接端点的弦代替,用小梯形的面积来近似小曲边梯形的面积,这些小梯形面积依次为

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x,\quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x,\quad \cdots,\quad \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x.$$

相加即得近似计算定积分的**梯形公式**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}\right)=T_n. \quad (8.1)$$

当在$[a, b]$上有$|f''(x)|\leqslant M_2$时，可以证明用式(8.1)计算，误差不超过$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$，当n增大时，它是$1/n^2$级的无穷小。

2. 辛普生公式(抛物线公式)

在计算每个小曲边梯形面积的近似值时，梯形公式是用直线代替曲线，辛普生(Simpson)公式是用抛物线$y=ax^2+bx+c$代替曲线。具使做法是，把区间$[a, b]$$2n$等分，小区间长度为$\Delta x=\frac{b-a}{2n}$，分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b,$$

$$f(x_i)=y_i,$$

相应地把曲边梯形分成$2n$个小曲边梯形。先看$[x_0, x_2]$上的二个小曲边梯形。如图3.6所示。用过三点$(x_i, y_i)(i=0, 1, 2)$的抛物线$y=ax^2+bx+c$代替曲线，a, b, c由方程组

$$\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=y_0, \\ ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2, \end{cases}$$

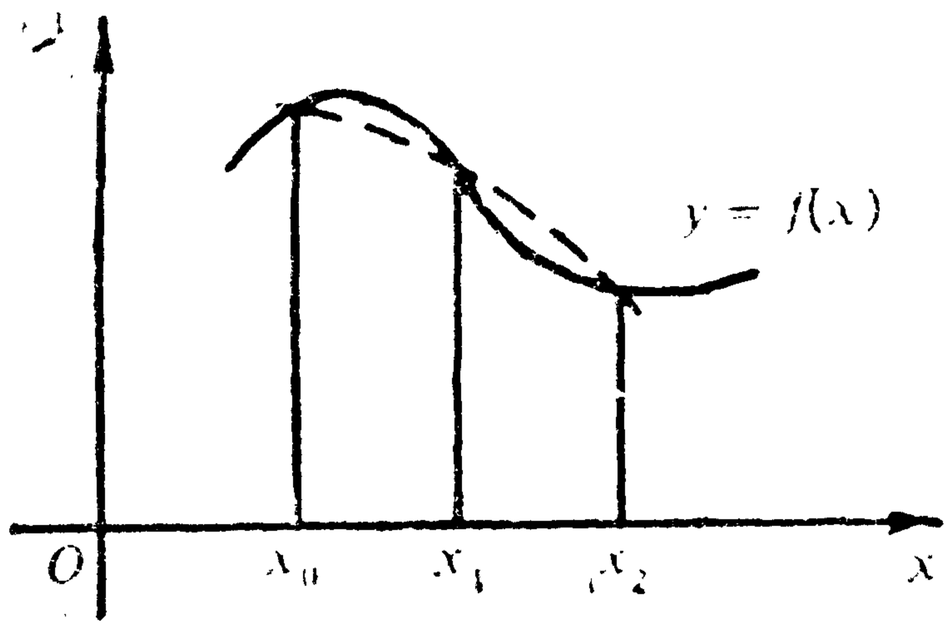


图 3.6

唯一确定。因$x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$，代入得

$$a\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{4}[a(x_2^2+x_0^2+2x_0x_2)+2b(x_2+x_0)+4c]=y_1,$$

于是，这两个小曲边梯形的面积近似为

$$\int_{x_0}^{x_2}(ax^2+bx+c)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}(x_2^3-x_0^3)+\frac{b}{2}(x_2^2-x_0^2)+c(x_2-x_0)$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}[2a(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3b(x_2 + x_0) + 6c]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}[(ax_2^2 + bx_2 + c) + (ax_0^2 + bx_0 + c) +$$

$$+ a(x_2^2 + x_0^2 + 2x_2x_0) + 2b(x_2 + x_0) + 4c]$$

$$= \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

一般可得在$[x_{2i-2}, x_{2i}]$上的两个小曲边梯形面积的近似值为

$$\frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

相加即得近似计算定积分的**辛普生公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})] = S_{2n}. \qquad (8.2)$$

如果在$[a, b]$上$|f^{(4)}(x)|$有最大值M_4，可以证明用式(8.2)计算的误差不超过$\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4$. 当$n$增大时，它是$1/n^4$级的无穷小. 在同样的计算量下，当然用辛普生公式计算比用梯形公式计算精确.

例 计算$\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,\mathrm{d}x$的近似值(将$[0, 2]$ 10等分).

解 将区间$[0, 2]$ 10等分，$\Delta x = 0.2$，$f(x) = \sqrt{4+x^3}$，

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	2.000	2.002	2.016	2.053	2.124	2.236	2.393	2.597	2.845	3.136	3.464

(1) 梯形公式

$$T_{10} = \frac{2}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + \cdots + y_9\right)$$

$$= 0.2(2.732 + 21.402)$$

$$= 4.827.$$

(2) 辛普生公式

$$S_{10}=\frac{2}{30}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{15}(5.464+4\times 12.024+2\times 9.378)$$

$$=4.821.$$

由 $f(x)=\sqrt{4+x^3}$ 不难求出

$$f''(x)=\frac{3x}{4}\left(1+\frac{12}{4+x^3}\right)\frac{1}{\sqrt{4+x^3}},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{9x^2}{16}\left[\frac{1}{(4+x^3)^{3/2}}+\frac{216}{(4+x^3)^{5/2}}-\frac{2160}{(4+x^3)^{7/2}}\right],$$

因而，当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时

$$|f''(x)|\leqslant\frac{6}{4}\times 4\times\frac{1}{2}=3=M_2,$$

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant\frac{9\times 4}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{216}{32}-\frac{2160}{128}\right)=53.44=M_4,$$

故 $T_{10}=4.827$ 的误差小于

$$\frac{2^3\times 3}{12\times 10^2}=0.02,$$

而 $S_{10}=4.821$ 的误差小于

$$\frac{2^5\times 53.44}{180\times 10^4}<0.001.$$

§3.8 习 题

用梯形公式和辛普生公式求下列积分的近似值。

1. $\ln 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$，把[1，2]10 等分。

2. $\int_0^1\frac{\arctg x}{x}dx$，把[0，1]10 等分。

§3.9 定积分在几何上的应用

1. 平面图形的面积

在实际应用中，常用一种既方便又不违背定积分概念的“微元法”来导出某个量的定积分表示式．我们以曲边梯形的面积为例来描述这种方法．

设 $f(x)\geqslant 0$ 在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

表示图 3.7 所示的曲边梯形的面积，且

$$A(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

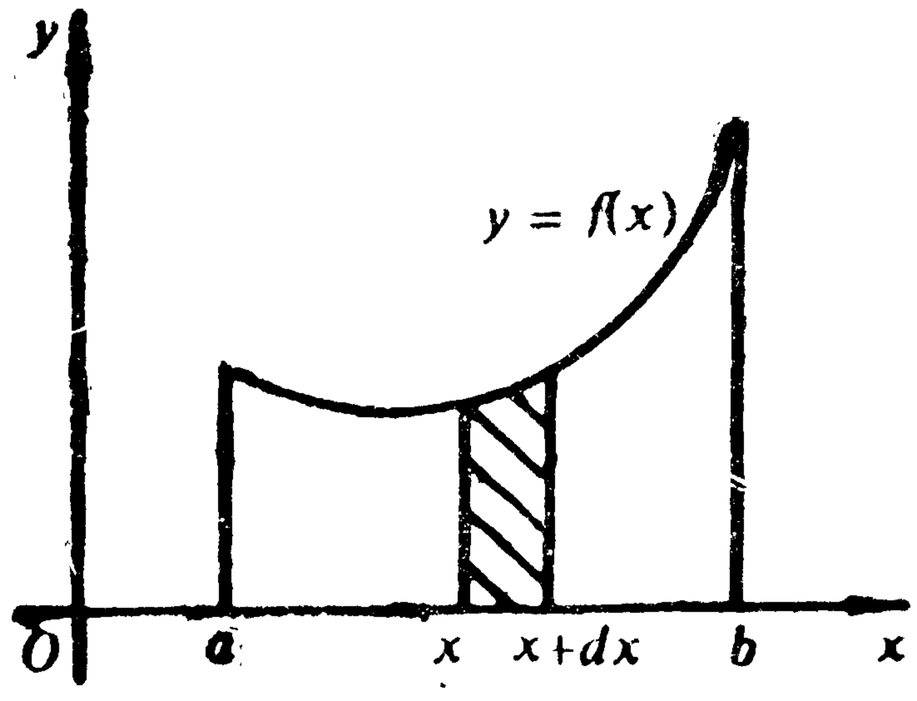


图 3.7

可微，微分 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$ 表示区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上面积 $\Delta A=A([x,x+\mathrm{d}x])$ 的微分近似值．因此，要求面积 $A([a,b])$ 的积分表达式，关键的一步是：求出在代表性小区间$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$上面积 $A([x,x+\mathrm{d}x])=\Delta A$（图 3.7 中阴影部分）的微分近似值，它等于以 $\mathrm{d}x$ 为底以 $f(x)$ 为高的矩形面积，即

$$\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}A,$$

这里 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$ 称为**面积微元**．

然后再对 $\mathrm{d}A$ 在$[a,b]$上积分即得总面积 $A([a,b])$

$$A([a,b])=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

一般，要求总量 $Q([a,b])$，先求其微元 $\mathrm{d}Q$，即是在代表性小区间$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$上的量 $Q([x,x+\Delta x])=\Delta Q$ 的微分近似值

$$\Delta Q=Q([x,x+\mathrm{d}x])\approx q(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}Q,$$

其中 $q(x)$ 是定义在$[a,b]$上的分段连续函数，则

$$Q([a,b])=\int_a^b q(x)\mathrm{d}x.$$

本节与下一节就用微元法来推导一些公式.

1) 直角坐标系中平面图形的面积

设函数 y_1, y_2 在区间 $[a,b]$ 上分段连续, 且 $y_1(x)\leqslant y_2(x)$, 则平面区域

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$$

的面积为

$$A=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x. \tag{9.1}$$

事实上,如图 3.8 所示, 在代表性小区间$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$上的小竖条面积$A([x,x+\mathrm{d}x])$可用以$\mathrm{d}x$为底,以$[y_2(x)-y_1(x)]$为高的小矩形面积来近似, 故得面积微元为

$$\mathrm{d}A=[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x,$$

再在 $[a,b]$ 上积分即得公式(9.1).

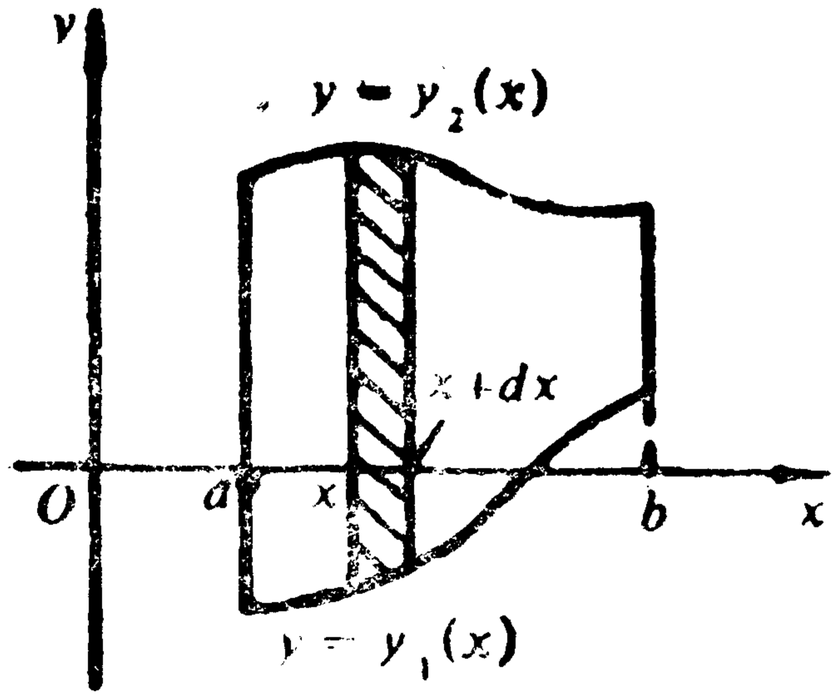


图 3.8

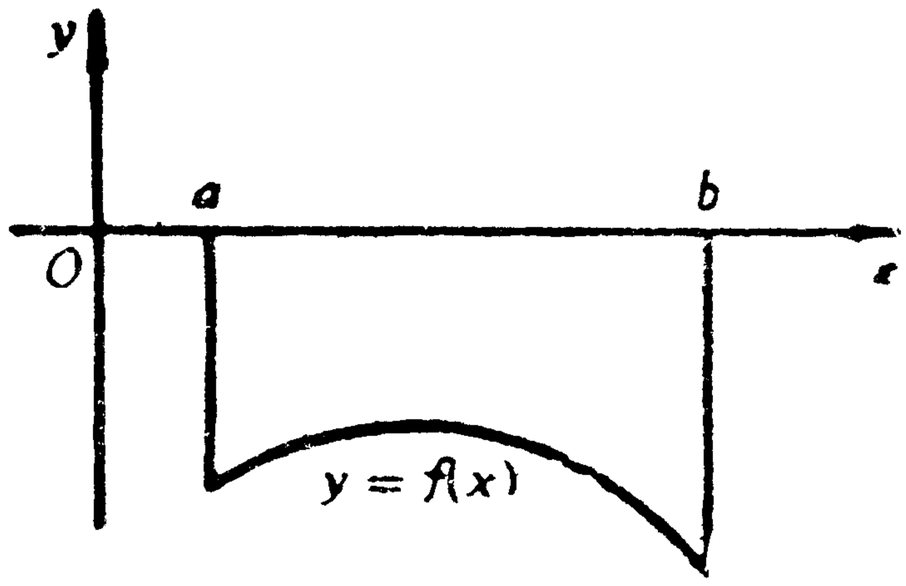


图 3.9

特别,如图 3.9 所示的区域

$$a\leqslant x\leqslant b,\ f(x)\leqslant y\leqslant 0$$

的面积为

$$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

类似可得图 3.10 所示区域

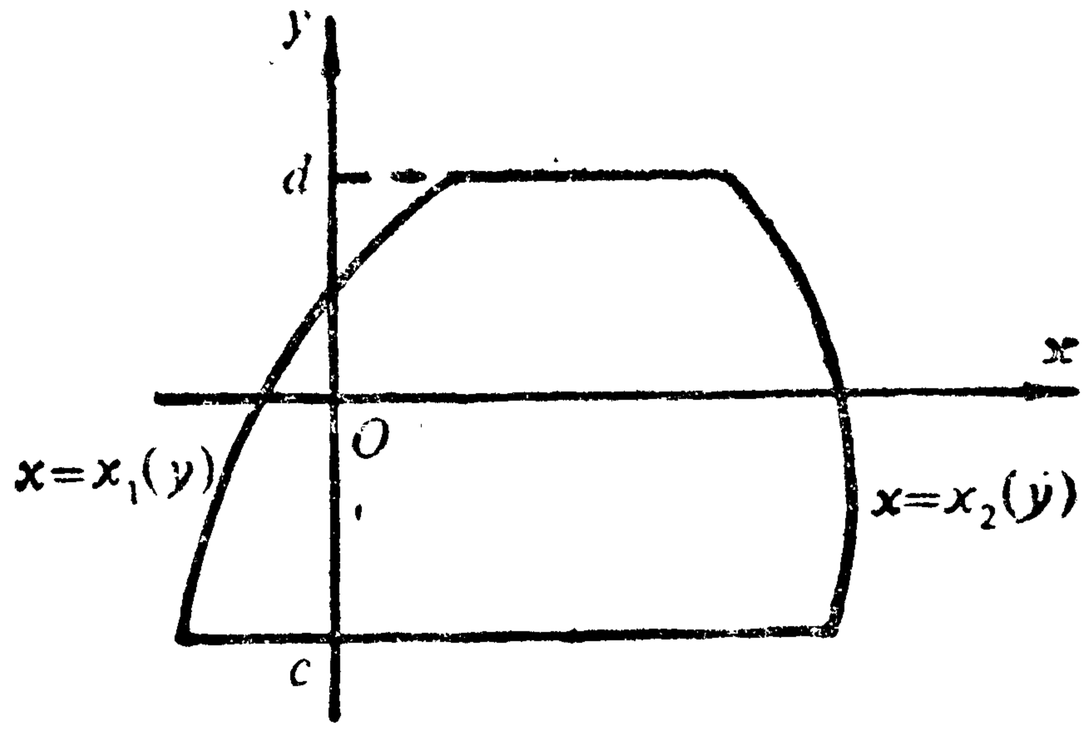


图 3.10

$$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

的面积为

$$A=\int_c^d[x_2(y)-x_1(y)]\mathrm{d}y. \tag{9.2}$$

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围区域的面积 A.

解 如图 3.11，由对称性知，面积 A 是第一象限部分面积的 4 倍，

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\&=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi}{4}a^2=\pi ab.\end{aligned}$$

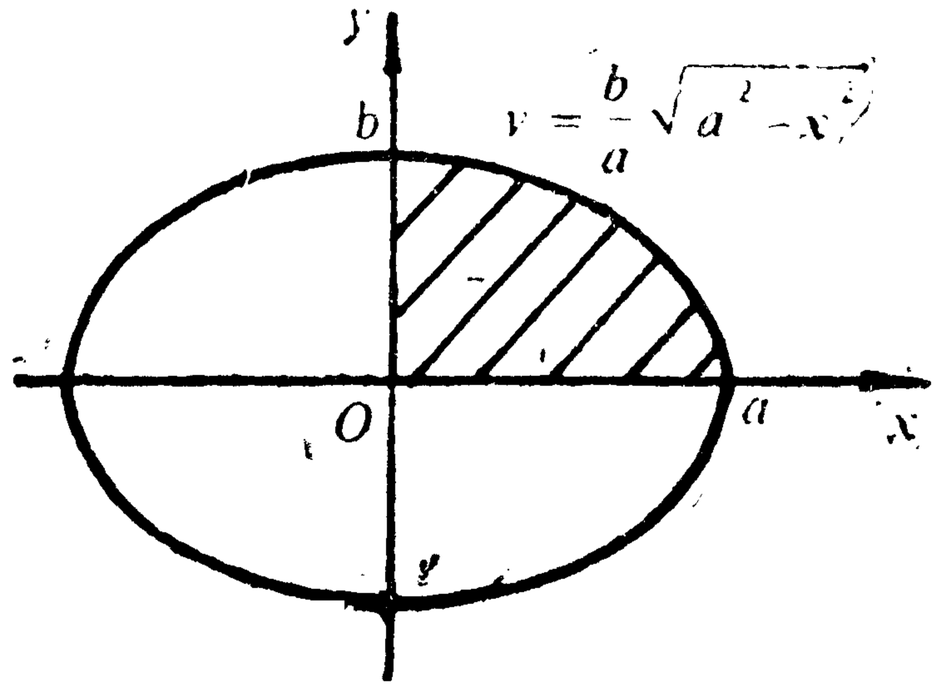


图 3.11

例 2 求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成区域的面积 A.

解 解联立方程

$$\begin{cases}y^2=2x,\\y=x-4,\end{cases}$$

得它们的两个交点为 $A(2,-2)$ 和 $B(8.4)$，见图 3.12.

解法 1 用公式(9.1)计算，因 OAB 由两段组成，所以要用直

线 $x=2$ 将区域分成两块，面积分别记为 A_1、A_2，于是

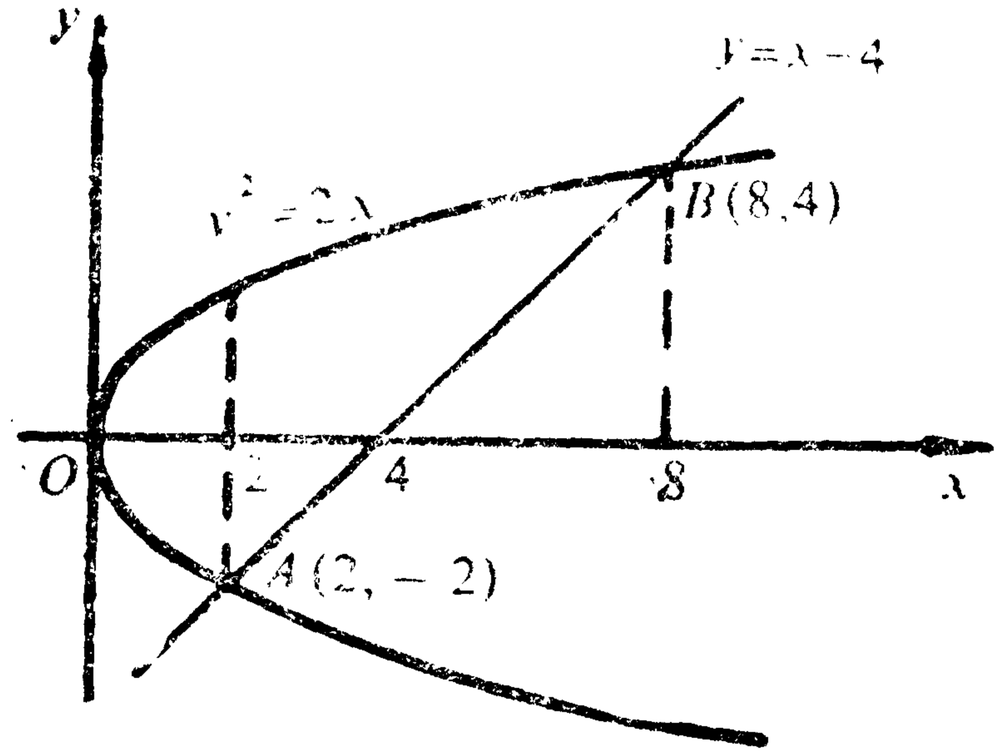


图 3.12

$$A=A_1+A_2$$

$$=\int_0^2(\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x}))\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_2^8(\sqrt{2x}-(x-4))\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{16}{3}+\left(\frac{56}{3}-6\right)=18.$$

解法2 用公式(9.2)计算

$$A=\int_{-2}^{4}\left((y+4)-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=18.$$

注 1 若所给图形的边界线不满足图 3.8 和图 3.10 的条件，则需先用一些坐标线将图形分成几块，使每块都满足条件，用相应的公式(9.1)或(9.2)求出各块面积，相加得到总面积.

注 2 当曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 给出时，则图 3.7 所示的曲边梯形的面积 A 可表示为

$$A=\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)\mathrm{d}t,\qquad(9.3)$$

其中 t_1，t_2 满足 $x(t_1)=a$，$x(t_2)=b$，且 x 与 t 一一对应. 如例1，若将椭圆用参数方程 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，$t\in[0,2\pi]$表示，则

$$A=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{\pi}{4}=\pi ab.$$

2) 极坐标系中平面图形的面积

设 D 为极坐标系中一平面区域(图 3.13)

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\},$$

其中 $r(\theta)$ 为连续函数，则区域 D 的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.\qquad(9.4)$$

事实上，如图 3.13 所示，在任意小区间$[\theta, \theta+\mathrm{d}\theta]\subset[\alpha, \beta]$上的小扇形面积 $A([\theta, \theta+\mathrm{d}\theta])$ 可用以 $r(\theta)$ 为半径，$\mathrm{d}\theta$ 为中心角的小圆扇形面积来近似，故得面积微元 $\mathrm{d}A$ 为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r\mathrm{d}\theta\cdot r=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

对 θ 在$[\alpha, \beta]$上积分即得公式(9.4)。

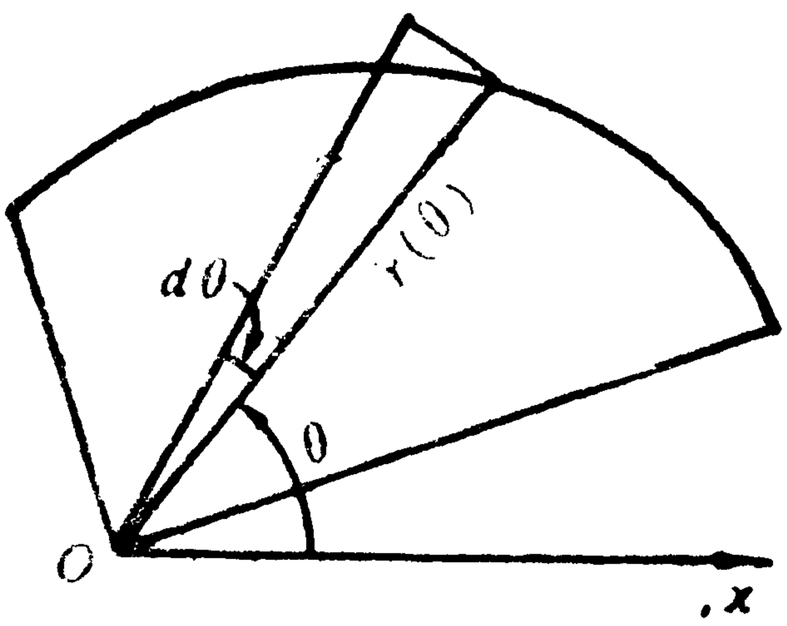


图 3.13

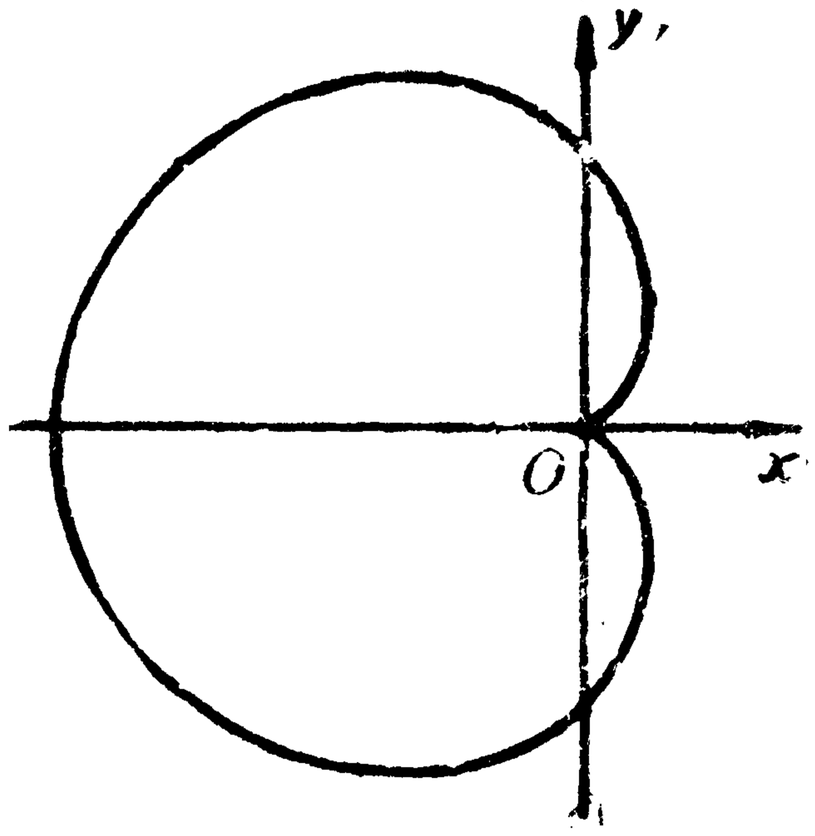


图 3.14

例 3 求心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$所围区域(见图 3.14) 的面积 A。

解 极角 θ 的变化范围可看作$[0, 2\pi]$，所以

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi=\frac{3}{2}\pi a^2。\end{aligned}$$

2. 已知横截面面积的立体体积

有一立体，若它的与某个方向 l (可取作 x 轴)垂直的横截面面积可求出，设为 $A(x)$，$x\in[a, b]$，且 $A(x)$在 $[a, b]$ 上分段连续，则立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x。\tag{9.5}$$

事实上，如图 3.15 所示，在任意小区间$[x, x+\mathrm{d}x]\subset[a, b]$上薄片的体积$V([x, x+\mathrm{d}x])$可用以$A(x)$为底面积，以$\mathrm{d}x$为高的薄柱体体积来近似，故得体积微元为

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x,$$

对x在$[a, b]$上积分即得公式(9.5)。

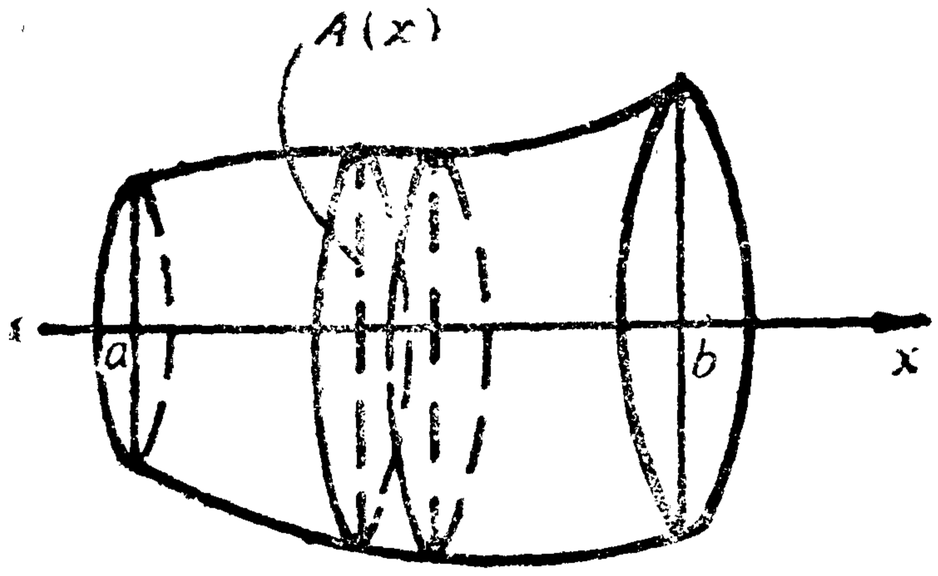


图 3.15

作为重要特例可得旋转体体积的公式。

(1) 设立体是由平面图形

$$D=\{(x, y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

绕x轴旋转一周得到，如图 3.16 所示，f在$[a, b]$上分段连续。在点x处的横截面是以$f(x)$为半径的圆，所以$A(x)=\pi[f(x)]^2$，代入式(9.5)即得旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x \quad \left(\text{记为}\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x\right). \tag{9.6}$$

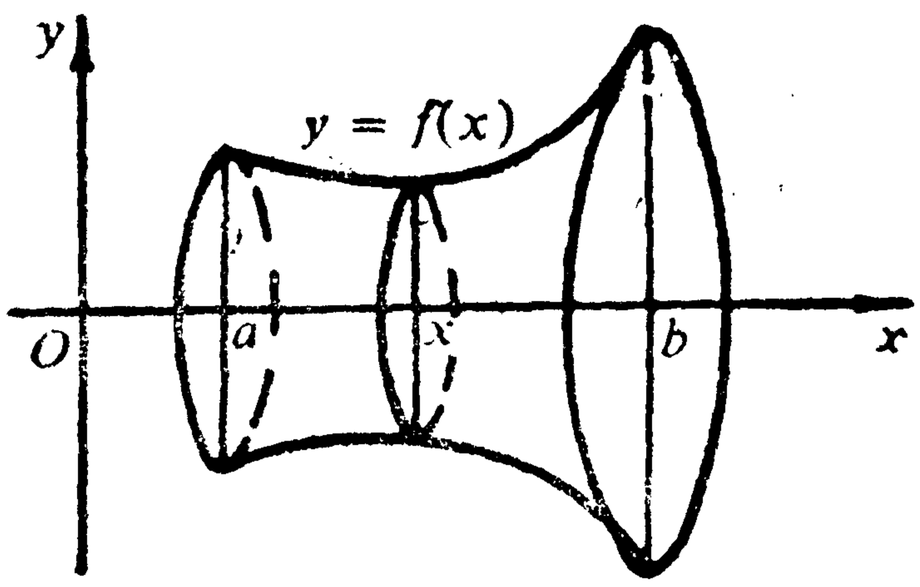


图 3.16

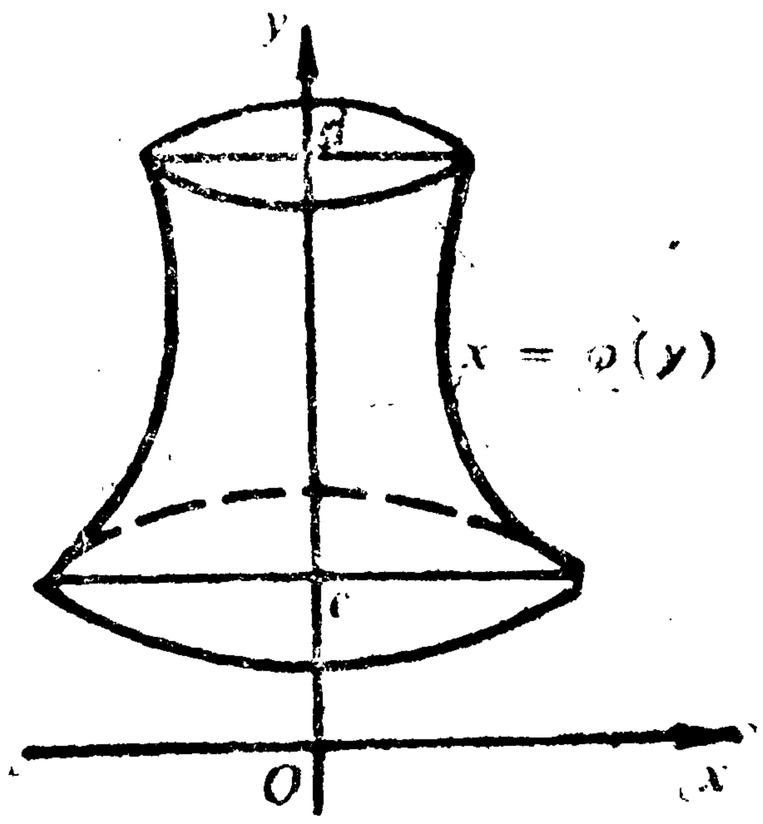


图 3.17

同理可得平面图形

$$\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\varphi(y),\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

绕y轴旋转一周得到旋转体(图 3.17)的体积为

$$V_y = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \mathrm{d}\, y \quad \left(\text{记为}\pi \int_c^d x^2 \,\mathrm{d}\, y\right). \tag{9.7}$$

(2) 设立体是由平面图形

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

绕 y 轴旋转一周得到，如图 3.18 所示，则 $V([x, x+\mathrm{d}x])$ 是一厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆筒（在图 3.18 中用阴影线表示），其体积的近似值为

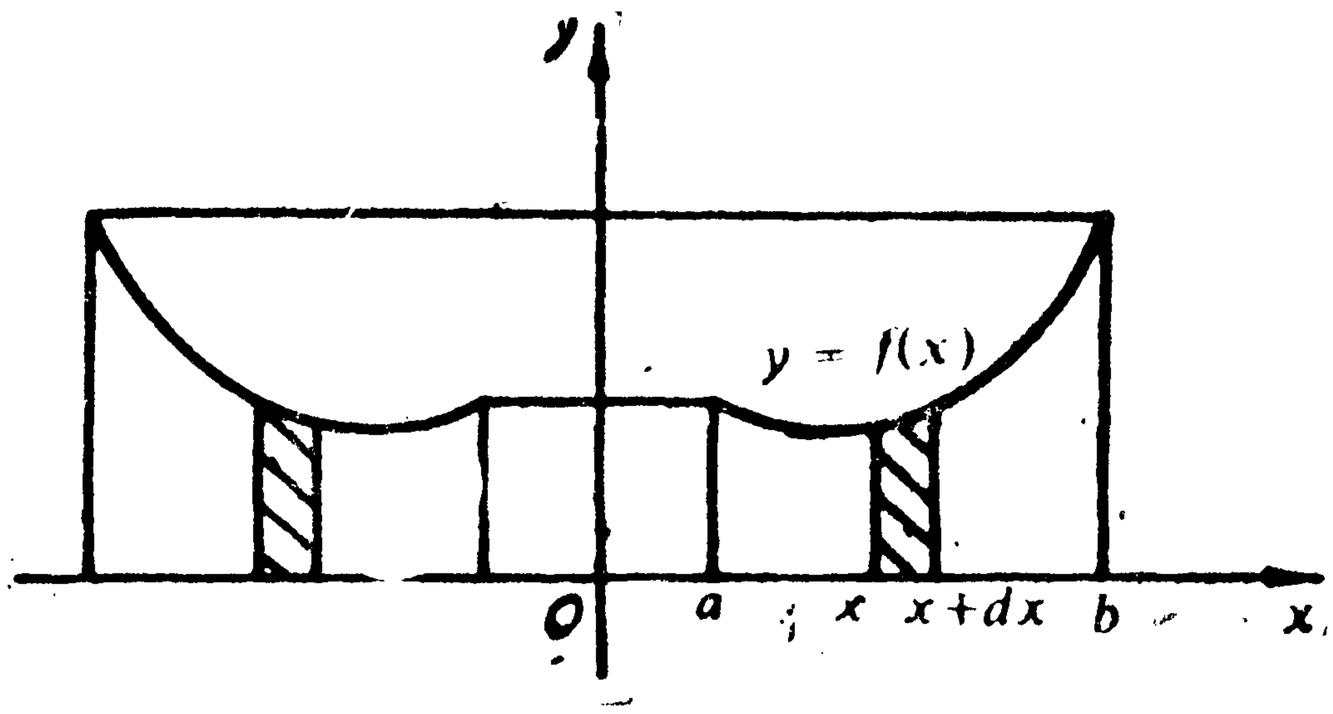


图 3.18

$$\mathrm{d}V = 2\pi x \,\mathrm{d}x \cdot f(x) = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x,$$

故得旋转体体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{记为 } 2\pi \int_a^b xy \,\mathrm{d}x\right). \tag{9.8}$$

例 4 取一正椭圆柱体，椭圆长、短半轴分别为 a, b，过下底椭圆的长轴作一平面，其斜角为 α，这平面从椭圆柱体上切下一个楔形(如图 3.19 所示)，求这楔形的体积.

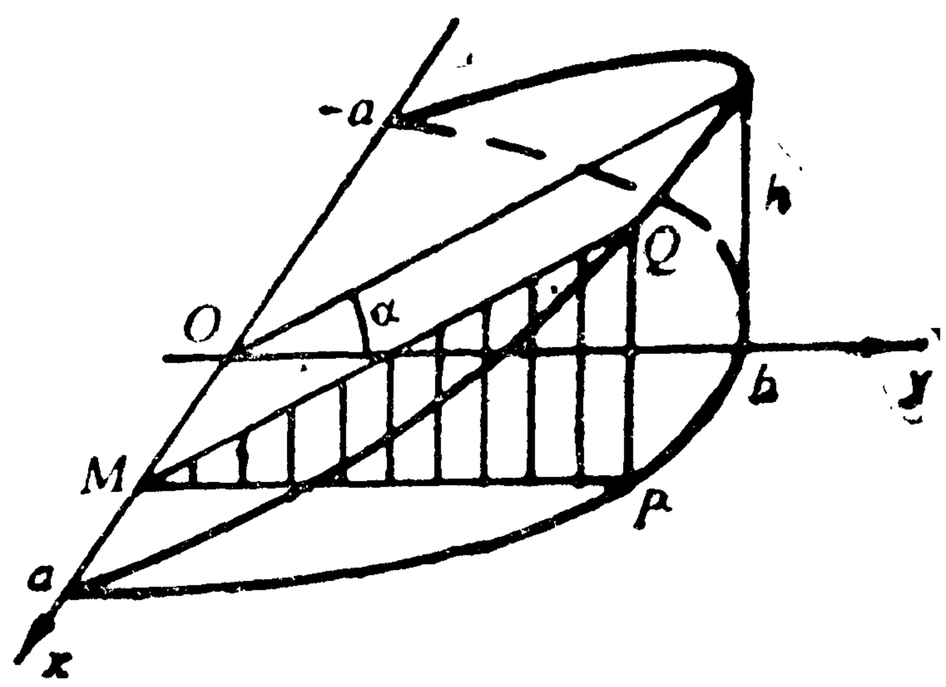


图 3.19

解 在下底面上取坐标系如图 3.19，则椭圆的方程为

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

在 x 处用垂直于 x 轴的平面截立体得截面为三角形 MPQ，

其底长 $MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，高为 $PQ=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$，故得 $\triangle MPQ$ 的面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}MP\cdot PQ=\frac{b^2\mathrm{tg}\,\alpha}{2a^2}(a^2-x^2),$$

故所求体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\frac{b^2\mathrm{tg}\,\alpha}{2a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}ab^2\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{3}abh,$$

其中 $h=b\,\mathrm{tg}\,\alpha$。

例 5 设平面图形 D 是由 $y=x^2$，x 轴，$x=2$ 围成(如图 3.20 所示)，求 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所成的两个旋转体体积。

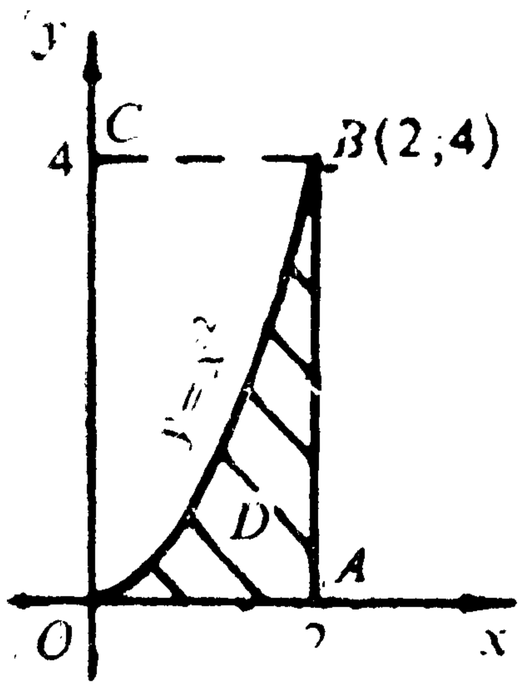


图 3.20

解 $V_x=\pi\int_0^2(x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}$。

用式(9.7)计算 V_y，它是矩形 $OABC$ 及曲边三角形 OBC 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积之差，即有

$$V_y=\pi\int_0^4[2^2-(\sqrt{y})^2]\mathrm{d}y$$

$$=16\pi-\pi\int_0^4 y\mathrm{d}y=8\pi。$$

若用式(9.8)计算 V_y，则有

$$V_y=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^4=8\pi。$$

3. 平面曲线的弧长与弧微分

1) 平面曲线的弧长

在初等数学中求圆周长所用的方法是利用内接正多边形（通常用 $6n$ 边形)的周长作为圆周长的近似值，再令边数无限增多取极限就求出圆周长之值。下面我们用类似的方法来建立平面连续曲线弧长的概念及计算公式。

设有一曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上依次任取分点

$$A=P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}, P_i, \cdots, P_{n-1}, P_n=B,$$

将 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 小段，依次用直线连接相邻两分点得到一条折线，如图 3.21 所示. 折线长

$$p=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$$

可作为 $\overset{\frown}{AB}$ 弧长的近似值. 当分点数目 $n\to\infty$，每段弦长 $|P_{i-1}P_i|\to 0$ 时，如果 $p\to s$（有限，且与对 $\overset{\frown}{AB}$ 的分法无关），则称曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的，s 就是其弧长. 下面根据这一定义来推导弧长的计算公式.

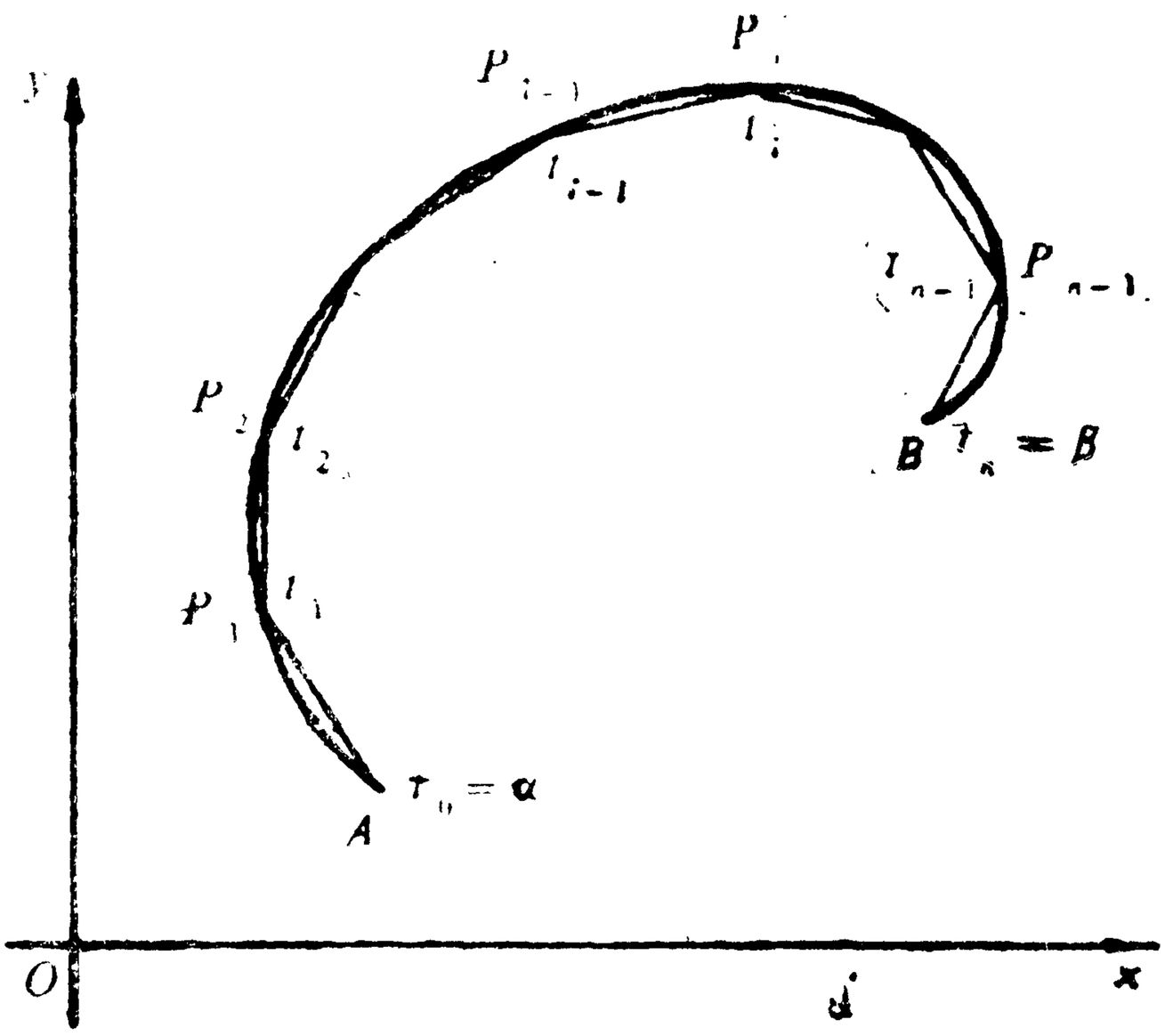


图 3.21

定理 设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

其中 α 和 β 分别是点 A 和点 B 对应的参数值，函数 φ，ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，则 $\overset{\frown}{AB}$ 可求长，且弧长 s 为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\quad\left(\text{记为}\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t\right).\tag{9.9}$$

证 如图 3.21，在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取分点 P_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 将 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 小段，点 $P_i(x_i, y_i)$ 对应的参数值为 t_i $(i=0,1,2,$

…, n)，即

$$x_i=\varphi(t_i),\quad y_i=\psi(t_i),$$

记

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}>0,\quad \lambda=\max\{\Delta t_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\},$$

则弦 $P_{i-1}P_i$ 的长度为

$$|P_{i-1}P_i|=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}.$$

应用拉格朗日中值定理，有

$$|P_{i-1}P_i|=\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}\,\Delta t_i,\quad t_{i-1}<\xi_i,\eta_i<t_i,$$

因此折线长

$$\begin{aligned}p&=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}\,\Delta t_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\,\Delta t_i+d,\end{aligned}$$

其中

$$d=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right)\Delta t_i.$$

因为

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\,\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

因此只要证明 $\lim\limits_{\lambda\to0}d=0$，也就证明了定理．由于

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2}\right|=\left|\frac{(c+d)(c-d)}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+d^2}}\right|\leqslant|c-d|,$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right|\\&\qquad\leqslant|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|,\end{aligned}$$

因为 $\psi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，因而一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|\Delta t_i|<\delta$ 时，$|\eta_i-\xi_i|<|\Delta t_i|<\delta$，有 $|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|<\varepsilon$，从而

$$d\,|<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon(\beta-\alpha)\quad\text{即}\quad\lim_{\lambda\to0}d=0.\qquad\square$$

在直角坐标系中，若弧$\overset{\frown}{AB}$的方程为

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 a，b 分别是点 A，B 的 x 值，设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续可导，取 x 为参数，代入式(9.9)便得弧长公式

$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{记为}\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\right). \tag{9.10}$$

同样，若弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为

$$x=g(y), \quad c\leqslant y\leqslant d,$$

其中 c，d 分别对应点 A，B 的 y 值，设函数 g 在 $[c, d]$ 上连续可导，取 y 为参数，即得弧长公式

$$s=\int_c^d \sqrt{1+g'^2(y)}\,\mathrm{d}y \quad \left(\text{记为}\int_c^d \sqrt{1+x'^2}\,\mathrm{d}y\right). \tag{9.11}$$

在极坐标系中，设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$r=r(\theta), \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

其中 α，β 分别对应点 A，B 的 θ 值，设函数 r 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导，取 θ 为参数，把曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 写成以极角 θ 为参数的参数方程

$$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta,\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

由于

$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$
$$y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$
$$x'^2(\theta)+y'^2(\theta)^2=r'^2(\theta)+r^2(\theta),$$

代入式(9.9)便得弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.12}$$

例 6 计算以下曲线段的弧长 s

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=t+\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

解 曲线形状见图 3.22，

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+(1+\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

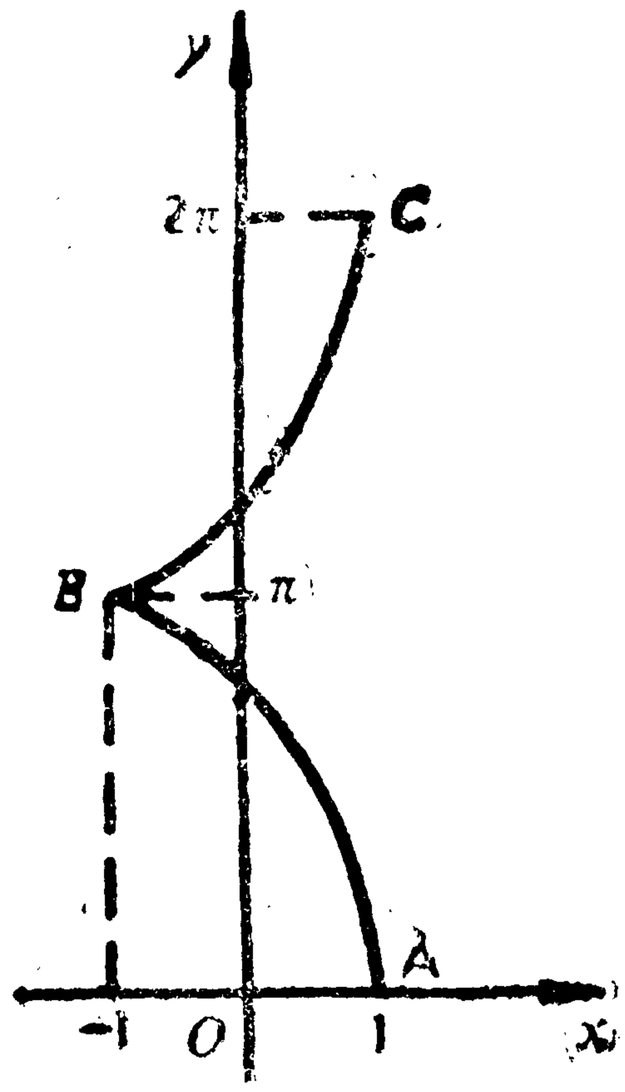


图 3.22

$$= \int_0^{2\pi} \left| 2\cos\frac{t}{2} \right| \mathrm{d}t = 2\left[\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\cos\frac{t}{2} \right) \mathrm{d}t \right]$$

$$= 2(2+2) = 8.$$

例 7 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长 l.

解 $r' = -a\sin\theta$,

$$\sqrt{r'^2 + r^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2(1+\cos\theta)} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|,$$

故

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \mathrm{d}\theta = 8a \quad \text{(见例 6)}.$$

例 8 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的周长 l.

解 设椭圆的参数方程为

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

记 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率,则可得椭圆的周长为

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

令 $t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$,则上式化为

$$l = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.13}$$

函数 $\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\theta}$ 的原函数不能用初等函数的有限形式表示,其积分只能用数值法计算.

注 凡经变换能化为下列三种类型之一的积分都称为椭圆积分:

第一类椭圆积分

$$F(k, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}};$$

第二类椭圆积分

$$E(k,\theta)=\int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta;$$

第三类椭圆积分

$$G(k,\theta,h)=\int_0^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

其中 $0<k<1$，h 是常数(可以是复数)。

2) 弧微分的表达式

设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程给出

$$x=\varphi(t)\quad y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

对 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点 $P(\varphi(t),\psi(t))$，据式(9.9)，$\overset{\frown}{AP}$ 的长度为

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

这是变上限的积分，其微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\qquad(9.14)$$

式(9.14)称为**弧长微分**(简称**弧微分**)公式。写成一般形式就是

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\quad\text{或}\quad\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2.\qquad(9.15)$$

在直角坐标系中，弧微分的表达式为：

$$\begin{aligned}&\text{对 } y=f(x),\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\quad(\text{记为 }\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x)\\&\text{对 } x=g(y),\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+g'^2(y)}\,\mathrm{d}y\quad(\text{记为 }\sqrt{1+x'^2}\,\mathrm{d}y)\end{aligned}\qquad(9.16)$$

在极坐标系中，弧微分的表达式为

对 $r=r(\theta)$，

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

(记为 $\sqrt{r'^2+r^2}\,\mathrm{d}\theta$)。

(9.17)

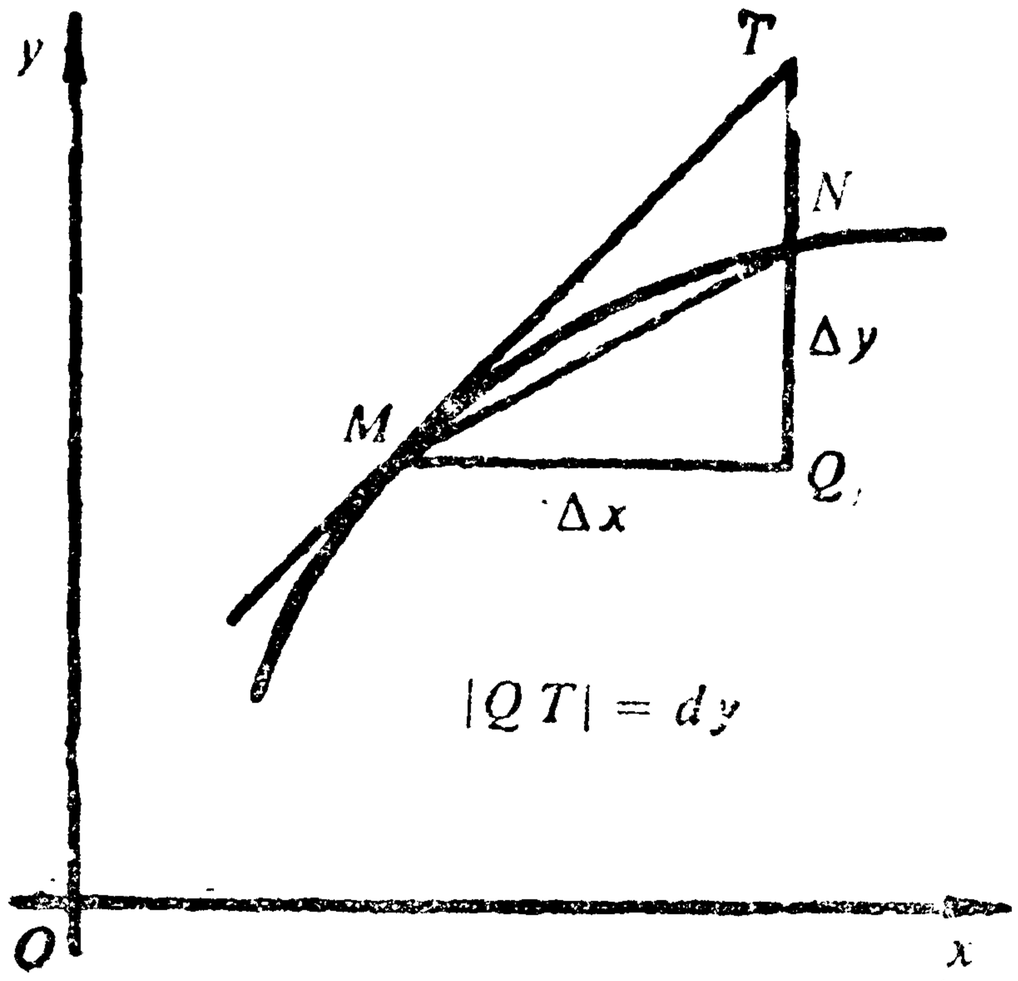


图 3.23

注 如图 3.23 所示，当 $\Delta x\to 0$ 时，弧 $\overset{\frown}{MN}$ 之长 $=\Delta s$，弦 MN 之长 $=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 及切线 MT 之长 $=\sqrt{dx^2+dy^2}$，三者是等价无穷小，因此，在使用

微元法时，三者常不严格区分。

4. 旋转面的面积

设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为

$$y=f(x)\geqslant 0,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 f 在 $[a,b]$ 上连续可导。将 $\overset{\frown}{AB}$ 绕 x 轴旋转一周得到一旋转面（见图 3.24）。下面来推导求旋转面面积的公式。

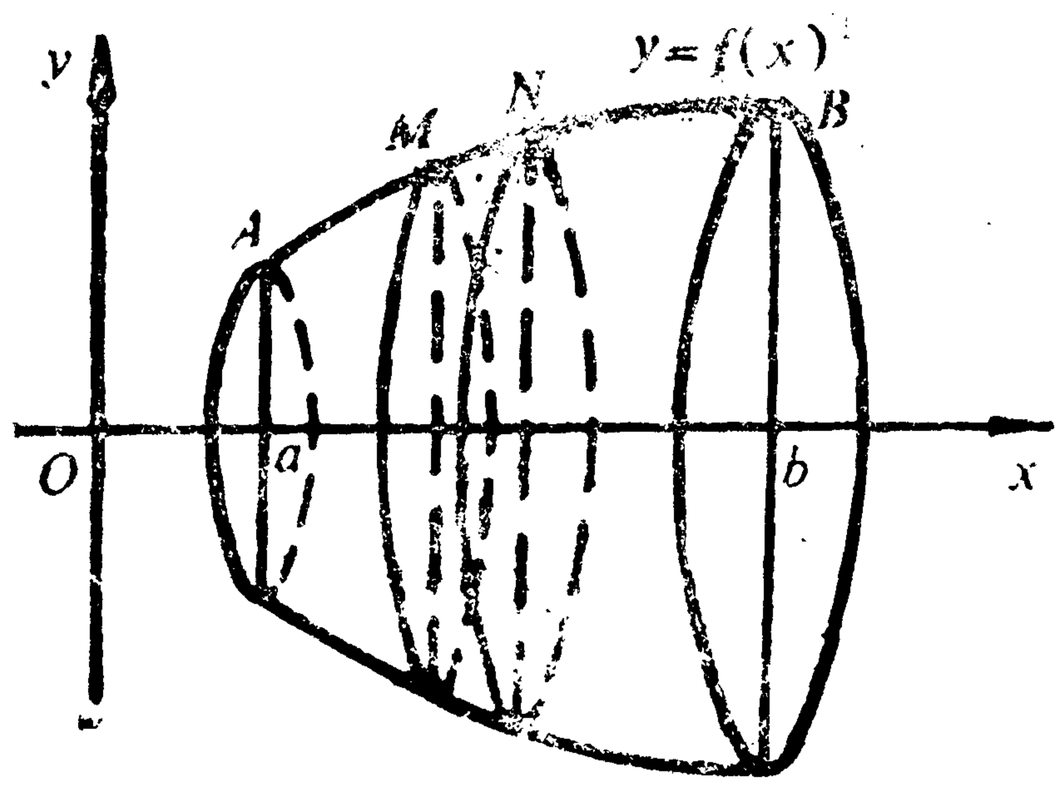


图 3.24

用任一分法把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，过每一分点作一平面垂直于 x 轴，这些平面把整个旋转面分割为 n 个小曲面片。在代表性小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上小曲面片的面积 ΔA 近似等于以 y 和 $y+\mathrm{d}y$ 为上、下底半径，以 $\mathrm{d}s$ 为侧高的薄圆锥台的侧面积，即

$$\Delta A\approx\pi[y+(y+\mathrm{d}y]\mathrm{d}s\approx 2\pi y\mathrm{d}s=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{d}A,$$

再在 $[a,b]$ 上积分即得旋转面的面积为

$$A_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\left(\text{记为 } 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\right).\qquad(9.18)$$

由于旋转面的面积微元可表示为

$$\mathrm{d}A_x=2\pi y\,\mathrm{d}s,$$

因此，当曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程或极坐标方程给出时，也有相应的旋转面面积公式。

$\overset{\frown}{AB}$ 方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

时，有

$$A_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{9.19}$$

$\overset{\frown}{AB}$ 方程为极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

时，有

$$A_x=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.20}$$

类似可得绕 y 轴旋转一周所得的旋转面面积 A_y 相应为

$$\mathrm{d}A_y=2\pi x\,\mathrm{d}s.$$

$$A_y=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{9.21}$$

$$A_y=2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{9.22}$$

$$A_y=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\cos\theta\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.23}$$

例 9　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 绕 x 轴旋转和绕 y 轴旋转所得旋转面面积 A_x 和 A_y。

解　用参数方程

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

根据对称性，

$$\begin{aligned}A_x&=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{4\pi b}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}\,\mathrm{d}(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)\\&=-\frac{4\pi b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}{2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}\right.\\&\quad\left.+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}b + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right]$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

$$A_y = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta + b^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta)$$

$$= \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta}{2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta + b^2}\right.$$
$$\left. + \frac{b^2}{2}\ln\left|\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta + \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta + b^2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}a + \frac{b^2}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right]$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}.$$

如果取弧长 s 作为参数，设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

这里 s 是曲线 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度，l 为曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的全长，如图3.25所示.

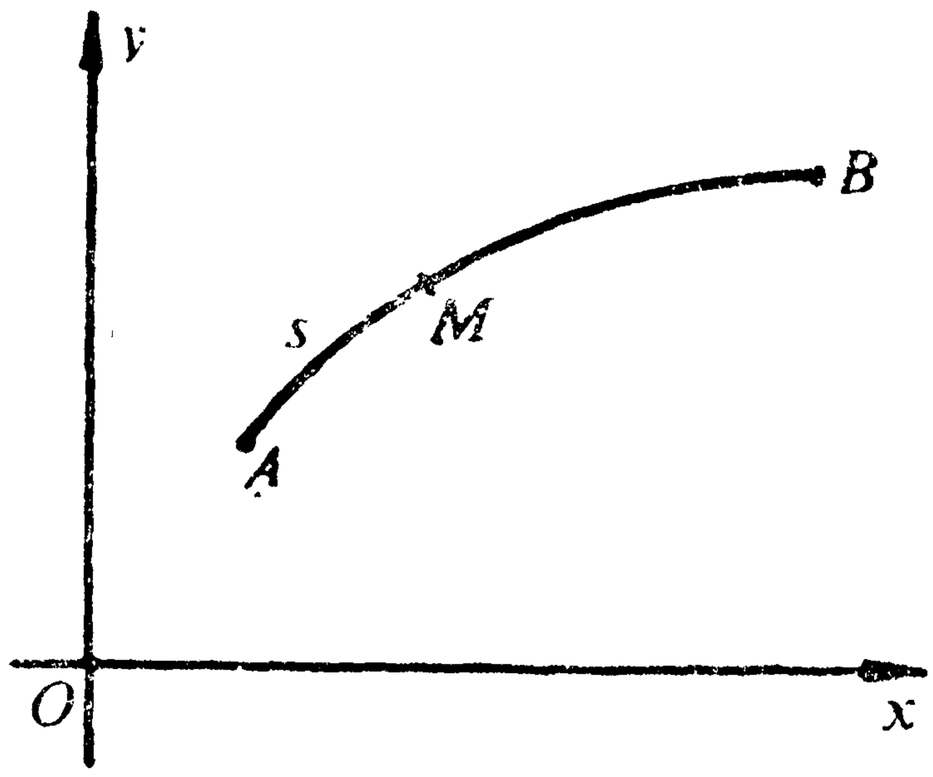


图 3.25

$x(s)$ 与 $y(s)$ 都连续可导，由弧微分公式(9.15)知

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1,$$

再利用公式(9.10)与(9.21)，则旋转面的面积公式分别化为

$$A_x = 2\pi\int_0^l y(s)\mathrm{d}s. \quad (9.24)$$

$$A_y = 2\pi\int_0^l x(s)\mathrm{d}s. \quad (9.25)$$

所以，曲线取弧长为参数，上面两式都比式(9.19)与(9.21)简单.

5. 平面曲线的曲率

很多问题的讨论都与曲线的弧长有关，即将要讨论的平面曲线的曲率问题就是一个例子. 曲率是用来表示曲线的弯曲程度的，而研究曲线的弯曲程度具有重要的实际意义，譬如在设计铁路、公路的弯曲时，需要考虑它的弯曲程度，如果弯曲得太厉害，车辆在高速行驶转弯时就容易造成出轨翻车事故. 在数学上怎样来表示曲线的弯曲程度呢?

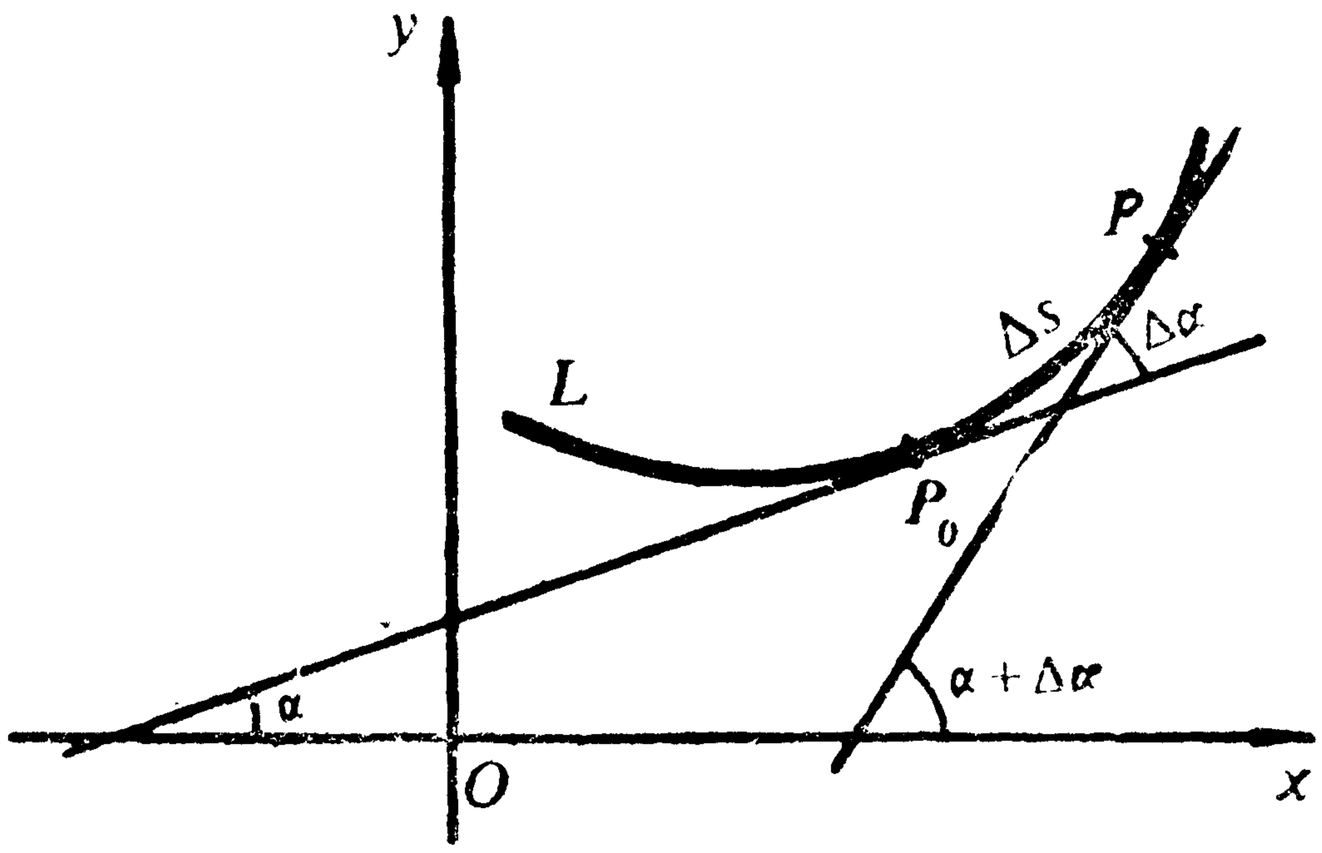


图 3.26

假设在平面上取定了右手直角坐标系 O-xy，P_0 是曲线 L 上一个定点，点 P 是 L 上点 P_0 邻近的任一点，记 $\overset{\frown}{P_0P}$ 的弧长为 Δs，曲线 L 在点 P_0 与 P 处的切线的倾角改变量为 $\Delta\alpha$，如图 3.26 所示，则称

$$\overline{k} = |\Delta\alpha/\Delta s|$$

为弧 $\overset{\frown}{P_0P}$ 的**平均曲率**，它表示曲线弧 $\overset{\frown}{P_0P}$ 的平均弯曲程度. 当 P 沿曲线 L 趋向 P_0 时($\Delta s\to 0$)，如果存在有限极限

$$k = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|,$$

则称 k 为曲线 L 在点 P_0 的**曲率**. 当 $k\neq 0$ 时曲率 k 的倒数 $1/k$ 称为**曲率半径**.

例 10 求直线和圆弧的曲率.

解 （1）对直线上任一段，$\Delta\alpha\equiv 0$，所以 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$，故 $k=0$，即直线的曲率处处为零，直线是不弯曲的。

（2）对半径为 R 的圆上任一段圆弧，其长度 $\Delta s=R\Delta\alpha$，$\Delta\alpha$ 是该弧所对的圆心角，也是该弧两端切线方向角的改变量，所以

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}\Rightarrow k=\frac{1}{R},$$

说明一个圆弧处处有相同的曲率，即弯曲程度相同，且圆弧的曲率等于半径的倒数。

下面推导曲率的计算公式。

设曲线的方程为 $y=f(x)$，函数 f 二阶可导。由导数的几何意义知，$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$，于是 $\alpha=\operatorname{arc\,tg} f'(x)$，

$$\mathrm{d}\alpha=\frac{f''(x)}{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

而

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=[1+f'^2(x)]\,\mathrm{d}x^2,$$

所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|f''(x)|}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

即得曲率的计算公式

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\cdot \tag{9.24}$$

例 11 求抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的曲率，并问在哪一点上曲率最大？

解 由于

$$y'=2ax,\quad y''=2a,$$

代入曲率的计算公式(9.24)，得到曲线上任一点处的曲率

$$k=\frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}\cdot$$

显然，当 $x=0$ 时，k 的分母最小，k 有最大值 $2a$。而当 $x=0$ 时 $y=0$，原点(0，0)恰是此抛物线的顶点，因而抛物线在顶点处的曲率最大。

例 12 设某工件的内表面的截线是抛物线 $y=0.25x^2$，现在要用砂轮磨削其内表面，问用直径多大的砂轮比较合适。

解 为了在磨削时能磨到截线各点，砂轮的半径应该小于或等于抛物线各点处曲率半径中的最小值(图3.27)。从例11知道，抛物线在其顶点处的曲率最大，曲率半径最小，对于本例题，在顶点 $O(0,0)$ 处有

$$\rho=\frac{1}{k}=\frac{1}{2\times 0.25}=2,$$

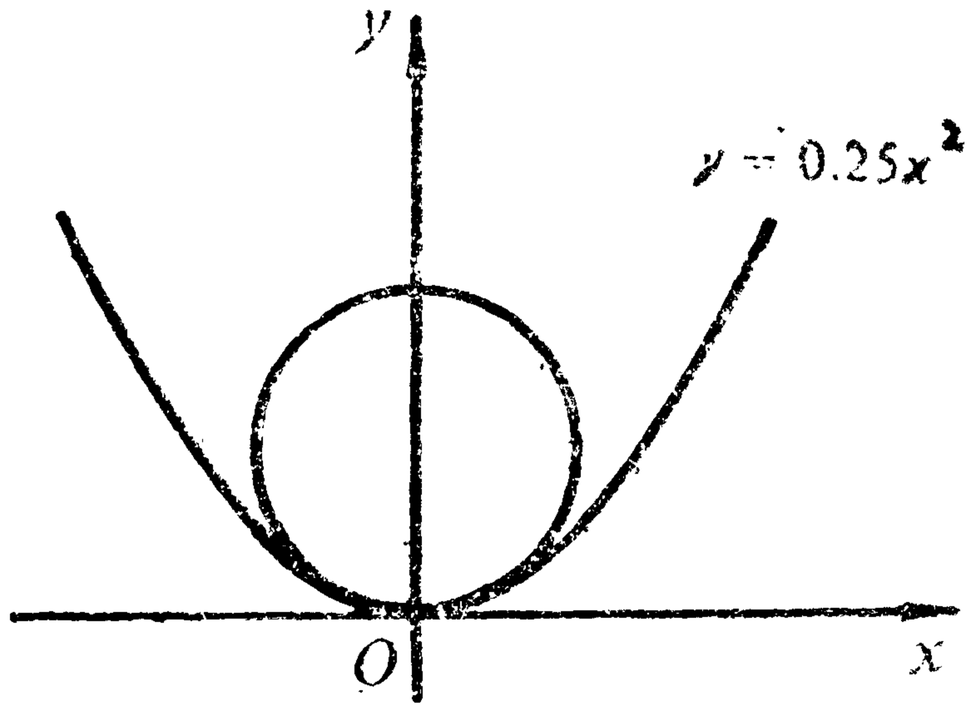


图 3.27

所以选用的砂轮半径不得超过2单位长，即其直径不得超过4单位长。

§3.9 习 题

1. 求下列曲线围成的平面图形的面积。

(1) $y^2=2x$, $x=\sqrt{8-y^2}$;

(2) $(y-x)^2=a^2-x^2 \quad (a>0)$;

(3) 星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

(4) 旋轮线一拱 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴;

(5) $r=a\cos 3\theta$;

(6) $r^2=a^2\cos 2\theta$;

(7) $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $r^2=\cos 2\theta$ 所围公共部分面积;

(8) 在$[0,\pi]$内由 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi$ 围成。

2. 求下列旋转体体积。

(1) $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\sin x\}$

1° 绕 x 轴， 2° 绕 y 轴。

(2) $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}, 0\leqslant y\leqslant 1\}$

1° 绕直线 $x=1$； 2° 绕直线 $x=2$。

(3) 由旋轮线一拱

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

与 x 轴围成区域，绕 x 轴。

(4) 心脏线 $r=1+\cos\theta$ 绕极轴。

(5) 圆 $(x-b)^2+y^2=a^2(b>a>0)$ 绕 y 轴。

3. 求以半径为 R 的圆为底，垂直于底圆某定直径的截面都是高为 h 的三角形之立体体积。

4. 两个半径为 a 的正圆柱，中心线互相垂直相交，求它们的公共部分的体积。

5. 求下列曲线段的弧长。

(1) $y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,\pi]$ 内部分。

(2) $3ay^2=x(x-a)^2$ 在 $[0,a]$ 内部分。

(3) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的全长。

(4) 旋轮线一拱 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$。

(5) $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$。

(6) $r=\mathrm{e}^{a\theta}$ 上从点 $(1,0)$ 到 (r,θ) 的一段。

(7) 四叶玫瑰线 $r=\cos 2\theta$ 一叶的周长。

6. 求下列旋转曲面的面积。

(1) 由 $y=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$，绕 x 轴旋转一周而成。

(2) 将抛物线 $y=x^2$ 自 $y=0$ 到 $y=2$ 的一段绕 y 轴旋转一周而成。

(3) 由 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转一周而成。

(4) 由双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$，1° 绕极轴；2° 绕 $\theta=\frac{\pi}{2}$，旋转一周而成。

7. 求下列曲线的曲率半径。

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；　　(2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$。

8. 曲线 $y=\ln x$ 上何处曲率最大？

§3.10　定积分在物理上的应用

1. 质心坐标

据力学知识，设有一质点组含有 n 个质点，分布在 xoy 平面上

的点 $P_i(x_i, y_i)$ 处，质量分别为 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则其质心坐标$(\bar{x}, \bar{y})$为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

现用它来建立平面曲线和平板的质心坐标公式。

1) 平面曲线的质心坐标

设有一光滑曲线弧$\overset{\frown}{AB}$，它的以弧长为参数的方程为

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

又设曲线上分布的密度函数 $\rho(s)$ 连续，现求 $\overset{\frown}{AB}$ 的质心$(\bar{x}, \bar{y})$。

用任意分法 D：

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_{i-1}<s_i<\cdots<s_{n-1}<s_n=l$$

将$[0, l]$分成 n 个小区间，相应的分点 $P_i(x_i, y_i)$

$$x_i=x(s_i), \quad y_i=y(s_i), \quad i=0, 1, \cdots, n$$

把 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 小段，当 $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ 很小时，每小段弧都很短，可看成一个点，这样就把 AB 分成为一个有 n 个质点的质点组，它们近似地位于点(x_i, y_i)处，质量近似为 $m_i=\rho(s_i)\Delta s_i$、于是其质心坐标为

$$\bar{x}_D=\frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i x(s_i)}{\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i}, \quad \bar{y}_x=\frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i y(s_i)}{\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i}.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \to 0$取极限，便得

$$\bar{x}=\lim_{\lambda \to 0} \bar{x}_D=\frac{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)x(s_i)\Delta s_i}{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i}=\frac{\int_0^l \rho(s)x(s)\mathrm{d}s}{\int_0^l \rho(s)\mathrm{d}s},$$

$$\bar{y}=\lim_{\lambda \to 0} \bar{y}_D=\frac{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)y(s_i)\Delta s_i}{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)\Delta s_i}=\frac{\int_0^l \rho(s)y(s)\mathrm{d}s}{\int_0^l \rho(s)\mathrm{d}s}.$$

显然，曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的质量

$$M=\int_0^l \rho(s)\mathrm{d}s,$$

因而

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_0^l \rho(s)x(s)\mathrm{d}s,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_0^l \rho(s)y(s)\mathrm{d}s. \tag{10.1}$$

特别，若密度分布均匀（$\rho=$常数），则 $M=\rho l$，式(10.1)成为

$$\bar{x}=\frac{1}{l}\int_0^0 x\,\mathrm{d}s,\quad \bar{y}=\frac{1}{l}\int_0^l y\,\mathrm{d}s, \tag{10.2}$$

这时质心完全由曲线的形状决定，故式(10.2)也称为 $\overset{\frown}{AB}$ 的形心坐标。

公式(10.1)和(10.2)是以弧长 s 作参数的一般公式，便于记忆，当 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程是直角坐标方程，参数方程或极坐标方程时，将 $\mathrm{d}s$ 用相应的弧微分公式代入，积分限换为相应变量的值就可得到相应的公式。

例如，当 $\overset{\frown}{AB}$ 用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

表示时，函数 x，y 在$[\alpha,\beta]$上连续可导，则形心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{l}\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t,\quad \bar{y}=\frac{1}{l}\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t. \tag{10.3}$$

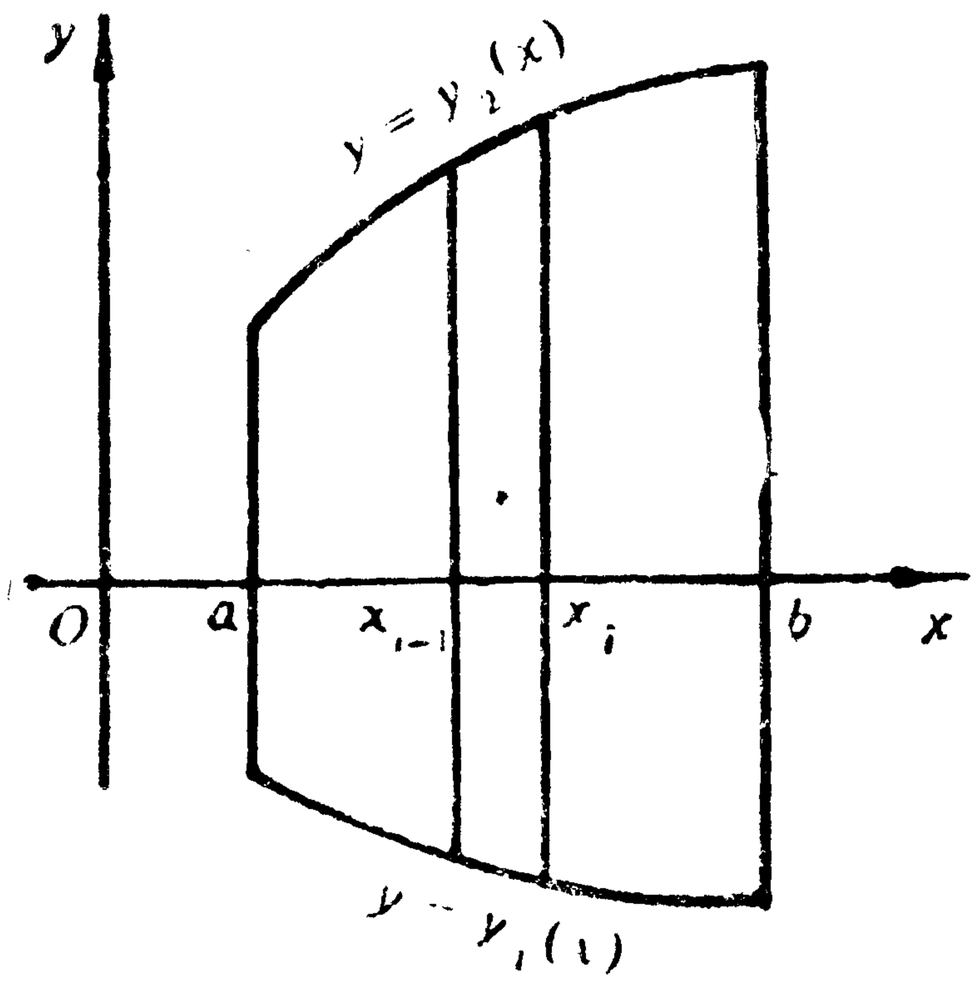


图 3.28

2）平面图形的形心

设有一均匀平面板（如图3.28，密度$\rho=$常数）

$$D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,$$

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

其中函数 y_1，y_2 在$[a,b]$上连续，求 D 的形心坐标。

用任意分法将$[a,b]$分成 n个小区间，过各分点作 x 轴的垂线，把区域 D 分成 n 个小竖条，考虑代表性小区间$[x_{i-1},x_i]$对应的小竖条，其质量

$$\Delta M_i \approx \rho[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\Delta x_i,$$

并近似地认为小竖条的质量集中在它的中心点 M 处，M 的坐标近似为 $\left(x_i, \frac{1}{2}[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\right)$，因此整个平板就看作是一个质点组，故所求质心坐标为

$$\bar{x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \rho[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\Delta x_i}$$

$$= \frac{\int_a^b x[y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x} = \frac{1}{A}\int_a^b x(y_2 - y_1)\mathrm{d}x \tag{10.4}$$

$$\bar{y} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[y_2(x_i) + y_1(x_i)]\rho[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho[y_2(x_i) - y_1(x_i)]\Delta x_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x} = \frac{1}{2A}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\mathrm{d}x,$$

其中 $A = \int_a^b (y_2 - y_1)\mathrm{d}x$ 是区域 D 的面积。

注 由对称性可知，形心位于图形的对称轴，对称中心上。

例 1 求旋轮线一拱

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

的形心。

解 $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$，

旋轮线一拱的弧长 l 为

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = 8a.$$

由图 3.29 可见，图形对称于直线 $x = \pi a$，故 $\bar{x} = \pi a$，

$$\bar{y}=\frac{1}{8a}\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{4a}{3},$$

即形心位于点 $\left(\pi a,\ \frac{4}{3}a\right)$.

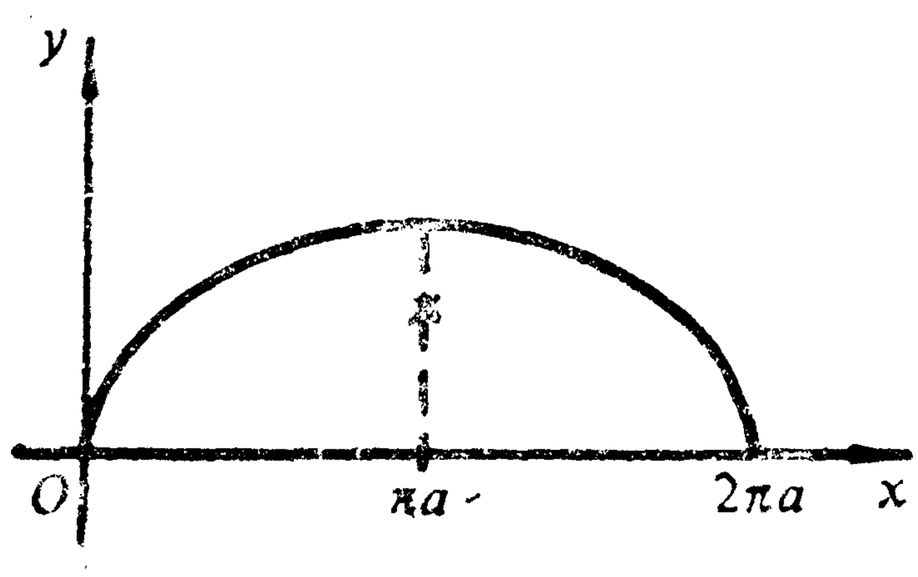


图 3.29

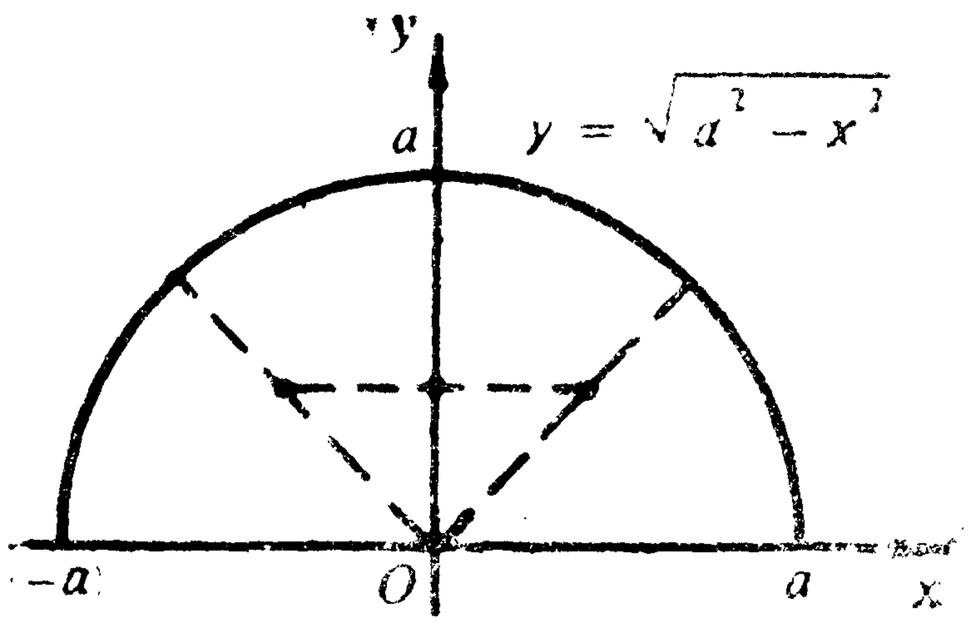


图 3.30

例 2 设圆的半径为 a，取坐标系如图 3.30，求第一象限部分扇形域的形心及上半圆形域的形心.

解 第一象限部分图形对称于直线 $y=x$，形心在其上，所以

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{2\cdot\dfrac{\pi a^2}{4}}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4a}{3\pi}\approx 0.42a.$$

因第一象限部分的形心为 $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4a}{3\pi}\right)$，由对称性知，第二象限部分的形心为 $\left(-\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4a}{3\pi}\right)$，故上半圆形域的形心为 $\left(0,\ \frac{4a}{3\pi}\right)$.

2. 变力作功

设物体在常力 f 的作用下沿 x 轴从点 a 移动到点 $b\ (b>a)$，当力的方向与运动方向一致时，力所作的功为

$$W=f\cdot(b-a).$$

若力的方向平行于 x 轴，力的大小是位置 x 的函数，$f=f(x)$，函数 f 在 $[a,\ b]$ 上连续，则物体在力 f 的作用下从点 a 移动到点 b 所作的功为

$$W=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{10.5}$$

事实上，用任意分划把$[a, b]$分成n个小区间，在代表性小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$上力f变化很小，近似等于$f(x)$，则在该小区间上所作的功为

$$\Delta W\approx f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}W,$$

再从a到b积分即得式(10.5)。

例 3 把质量为m的火箭从地球表面铅直向上发射，试求将火箭推到高度H时需作的功。若想让火箭脱离地球引力不再返回地面，需作功多少？这时火箭的初速度v_0至少要多大？

解 取火箭的发射点为原点O，铅直向上的方向为Ox轴方向。记R为地球半径，M为地球质量，据万有引力定律，火箭在x处所受的引力为

$$f=\frac{kmM}{(R+x)^2},$$

其中k为引力常数。由于$x=0$时$f=mg$，可知$kM=R^2g$，g是重力加速度，所以

$$f(x)=\frac{R^2gm}{(R+x)^2},$$

于是火箭从地面推到高度H时，克服地球引力需作功

$$W=\int_0^H\frac{R^2gm}{(R+x)^2}\,\mathrm{d}x=R^2gm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right).$$

欲使火箭不返回地面，即令$H\to+\infty$，此时$W\to Rgm$，这就是让火箭脱离地球引力飞向太阳系需作的功。因此，在发射火箭时，给予火箭的动能$\frac{1}{2}mv_0^2$必须超过Rgm，即发射火箭的初速度v_0应满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2\geqslant Rgm \quad \text{即} \quad v_0\geqslant\sqrt{2gR}.$$

取$g=9.8$米/秒^2，$R=6370\times10^3$米，则

$$\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times9.8\times6370\times10^3}\approx11.2\text{千米/秒},$$

这个值称为第二宇宙速度，就是使火箭飞离地球的引力范围飞向太阳系其他星球所需的最小初速度.

例 4 一个正圆锥形水池(见图 3.31)，高为 H，底半径为 R，内盛满液体(密度为 ρ)，欲将液体全部从水池顶部抽出池外，需作功多少?

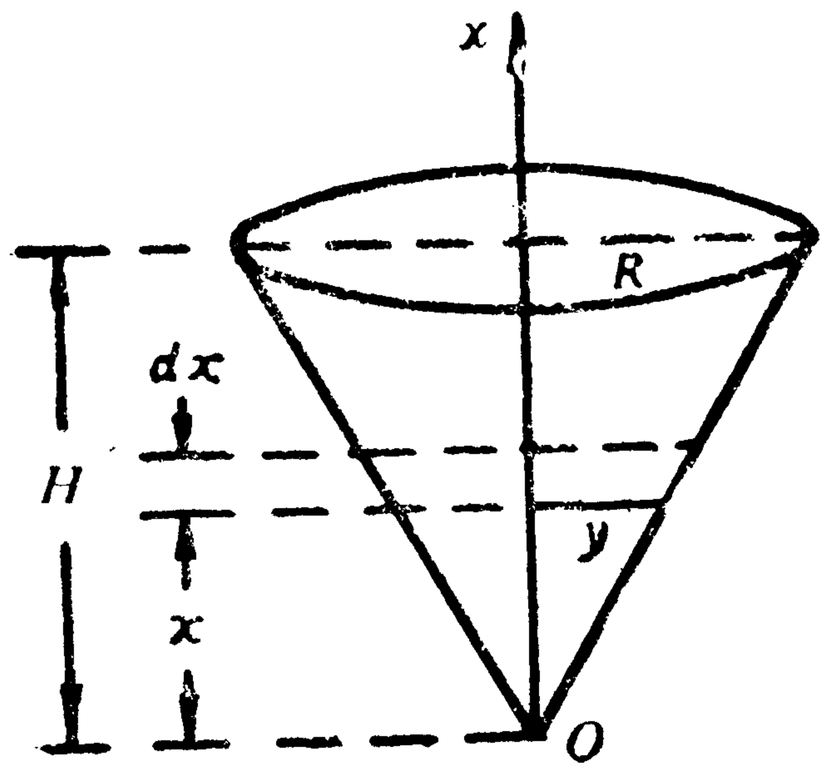


图 3.31

解 取 Ox 轴如图 3.31，在高为 x 处的截面半径为 $y=\frac{R}{H}x$，考虑在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 区间厚度为 $\mathrm{d}x$ 的一薄层水，这层水的重量近似为 $\pi y^2\cdot\mathrm{d}x\cdot\rho g$，将这层水移到顶部抽出池外，需作功(功的微元)

$$\mathrm{d}W=\rho g\pi y^2\mathrm{d}x(H-x)=\rho g\pi\frac{R^2}{H^2}x^2(H-x)\mathrm{d}x,$$

所以将池内水全部从顶部抽出需作功

$$W=\rho g\pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2(H-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\rho g\pi R^2H^2.$$

3. 水压力

设有一块平板，铅直浸在密度为 ρ 的液体中，求平板一侧所受的总压力.

如图 3.32 所示，在平板平面上取 x 轴铅直向下，液面为 y 轴，设曲边的方程为

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b,$$

且函数 y_1，y_2 在 $[a, b]$ 上连续. 据力学知识，在深度 h 处液体的压强 p 各个方向都一样，且 $p=\rho gh$，因此，在 x 处的压强为 $p(x)=\rho gx$，它

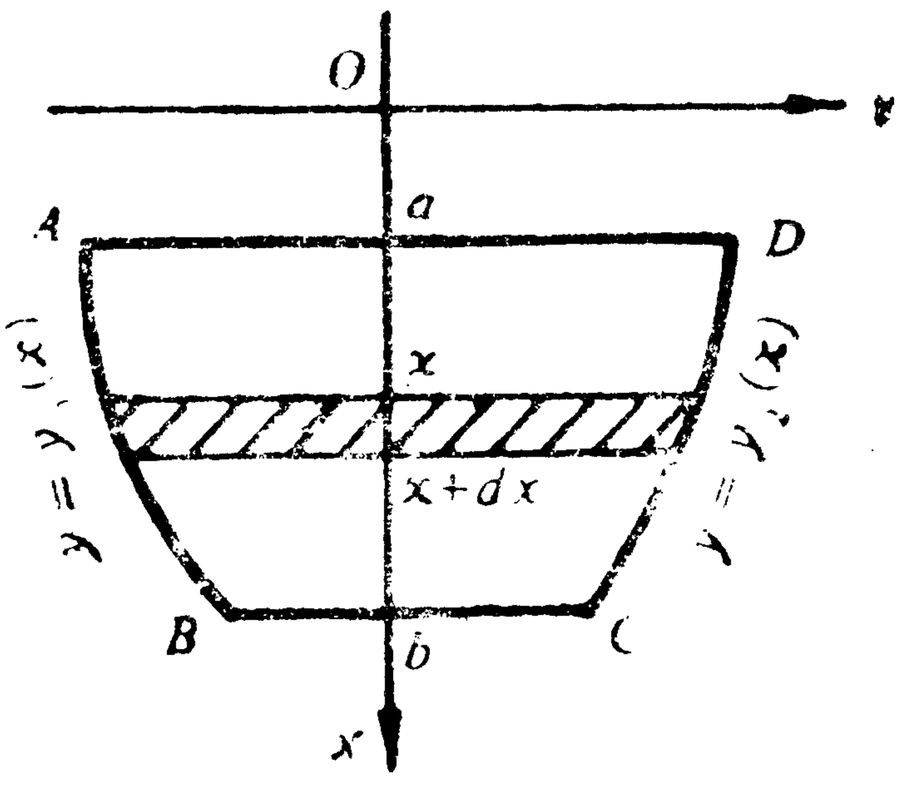


图 3.32

在$[a, b]$上连续。在小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$对应的小窄条上，所受压力的近似值(压力微元)为

$$\mathrm{d}P = \rho g x[y_2(x) - y_1 x)]\mathrm{d}x,$$

故平板所受的总压力为

$$P = \rho g \int_a^b x[y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x. \tag{10.6}$$

注意到平板$ABCD$的重心的x坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x(y_2(x) - y_1(x))\mathrm{d}x, \quad A = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\mathrm{d}x,$$

因此式(10.6)又可写成

$$P = \rho g \bar{x} A. \tag{10.7}$$

当平板的面积A和重心坐标$\bar{x}$已知时，用式(10.7)可很快求得它所受的总压力。

例 5 堤坝里有一半径为R的圆形泄洪涵洞，由一铅直闸门封闭住，水的密度$\rho = 10^3$千克/米^3，试问

(1) 湖水浸没涵洞一半时，闸门所受的压力P_1?

(2) 湖水恰好浸没整个涵洞时，闸门所受的压力P_2?

(3) 涵洞圆心在水下$H(>R)$米时，闸门所受的压力P_3?

解 取x轴铅直向下，原点在水面，见图 3.33。

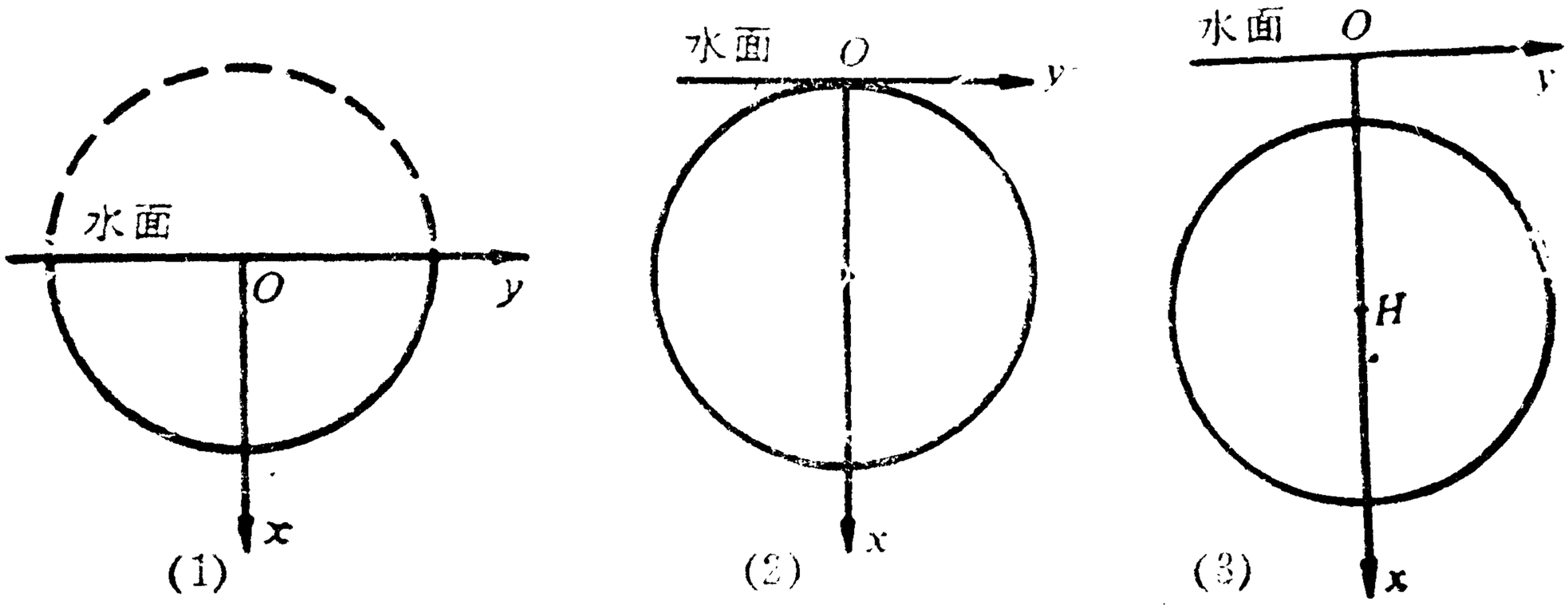


图 3.33

(1) 据式(10.6)，总压力P_1为

$$P_1 = \rho g \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\rho g \cdot \frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$

$$= \frac{2\times 10^3}{3} R^3 (\text{牛顿})$$

(2) 据式(10.7)得总压力 P_2 为

$$P_2 = 10^3 \cdot R \cdot \pi R^2 = 1000\,\pi R^3 \text{ (牛顿)}.$$

(3) $P_3 = 10^3 \cdot H \cdot \pi R^2 = 1000\pi R^2 H$(牛顿)。

§3.10 习　　题

1. 一根轴，长10米，线密度 $\rho = 6 + 0.3x$(千克/米)，其中 x 是到轴某一端的距离，求轴的质量。

2. 求下列曲线的形心。

(1) 半径为 R，圆心角为 $2\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ 的圆弧以及半圆周的形心。

(2) 由方程

$$x = a(3\cos\theta - \cos 3\theta),\ y = a(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

所定义的有两尖点的圆外旋轮线(也称外摆线)的上半弧($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$)的形心。

(3) 心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$。

3. 求下列平面图形的形心。

(1) $x = 2y$ 与 $y = 3x - x^2$ 所围图形。

(2) $y^2 = 2px$，$x = l$。

(3) 四叶玫瑰线 $r = a\cos 2\theta$ 一叶 $\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$。

4. 据虎克定律，在弹性限度内，弹簧的伸长与所受的力成正比。设 f。牛顿的力能使弹簧伸长 l_0 米，试问把弹簧拉长 l_0 米需作功多少(牛顿·米)?

5. 在一个半球形水池内贮满水，水池直径为80米，现欲从水池上部将水抽到池外，问需作功多少?

6. 水坝里有一竖立的矩形闸门，宽10米，深6米，闸门上下底边平行水面，试求:

(1) 水面在闸门顶上8米时闸门所受的压力?

(2) 水面再升高多少米时，闸门受力将加倍?

7. 设有一均匀细棒，质量为 M，长为 l。另有一质量为 m 的质点位于细棒的延长线上距棒中心 r 的地方($r > l/2$)，求棒与质点间的引力。

4 空间解析几何　向量

向量在近代应用数学的有用性在于：许多物理量可以用向量来表示，而且在某些方面向量的运算法则如同实数系的运算法则一样简单。

本章将介绍向量代数的基础知识，然后利用向量法研究空间中的平面与直线以及一些常见的曲面与曲线。在建立直角坐标系后，向量与坐标又可以互相转换，这又为我们提供了很大的方便。

§4.1　向量　直角坐标

1. 向量的概念

在研究物理学等实际问题时，常会遇到一类既有大小、又有方向的量，如力、位移、速度、加速度、力矩，电场强度、磁场强度等等，这类量叫做**向量**(也叫**矢量**)。另外还有一类只有数值大小而无方向的量，如质量、时间、长度、面积、密度、温度、能量等等，这类量叫做**数量**。向量通常用一有向线段表示，有向线段的长度表示向量的小大，有向线段的方向表示向量的方向。以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，书写时常在字母上面加箭头来表示向量，例如，$\vec{F}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{L}$ 等等。印刷时常用黑斜体字母表示向量，例如 F, V 等等。向量的长度叫做向量的**模**，也称为该向量的**欧几里得范数**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{F}|$, $|V|$ 等。

在实际问题中遇到的向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学中只讨论与起点无关的向量(所谓**自由向量**)，即只考虑向量的大小和方向，不考虑它的起点在何处，可任意作平行移动。因此，平移后能完全重合的向量都认为是相等的，所以很自然地定

义两个向量 a 和 b **相等**为：它们的模相等，方向相同，记作 $a=b$。

模为 0 的向量叫做**零向量**，记作 **0**（有时就写成 θ），零向量的方向可看作是任意的。

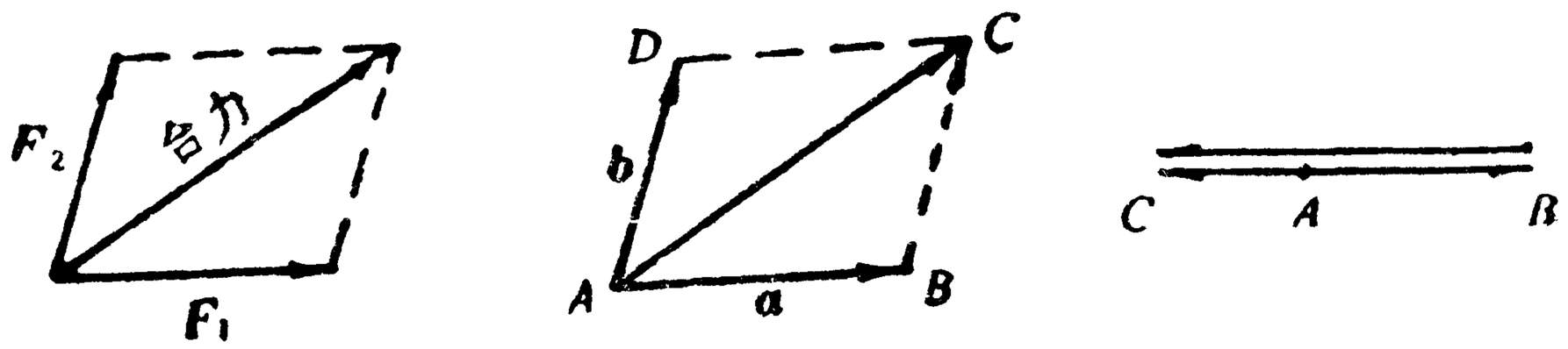
模为 1 的向量叫做**单位向量**。与非零向量 a 同方向的单位长向量记作 a°。

给定一向量 a，与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的**负向量**，记作 $-a$。

2. 向量的线性运算

1）向量的加法、减法

在力学中，求两力的合力用平行四边形法则，见图 4.1(1)，在物理中出现的向量都用这个方法来合成或分解。因此，我们用这个**平行四边形法则**来定义向量的加法运算。如图 4.1(2)，向量 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的**和**。又因为向量 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，因此，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，也就是说，若要求两个向量 a 与 b 的和 $a+b$，只要先作 $\overrightarrow{AB}=a$，再以其终点 B 作为 b 的起点作向量 $\overrightarrow{BC}=b$，则连接 a 的起点 A 与 b 的终点 C 的向量 $\overrightarrow{AC}$ 即是 $a+b$。这种法则叫做向量加法的**三角形法则**，当两个向量平行时，仍可用这个法则求和，如图 4.1(3)。从图4.1可明显看出，这两个求和法则是一回事。



(1)　　(2)　　(3)

图　4.1

由图 4.2 可见，向量的加法满足以下运算规律：

I_1　交换律

$$a+b=b+a.$$

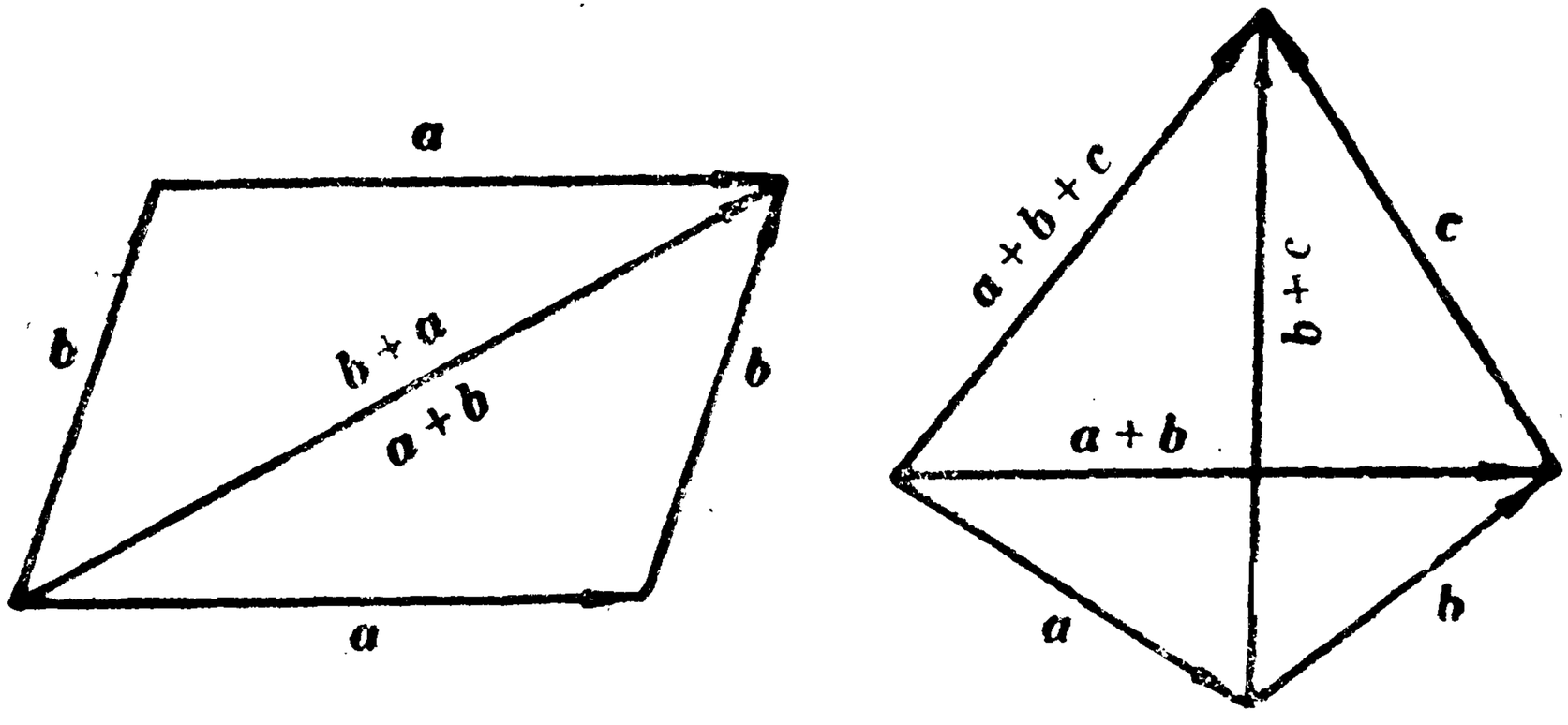
I_2 结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

根据零向量、负向量的定义及加法运算规律，立即可得

I_3 $a+0=0+a=a$.

I_4 $a+(-a)=(-a)+a=0$.



(1) (2)

图 4.2

关于两个向量的减法，规定 a 与 b 的差 $a-b$ 为

$$a-b=a+(-b),$$

向量之差的作图法为：$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$（见图4.3）.

注意，以上加法可推广到求任意有限个向量的和。给定m个向量 $a_1, \cdots, a_m$，从 A_0 出发作折线 $A_0A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m$，使 $\overrightarrow{A_0A_1}=a_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=a_2, \cdots, \overrightarrow{A_{m-1}A_m}=a_m$，则向量 $\overrightarrow{A_0A_m}=a_1+a_2+\cdots+a_m$，如图 4.4.

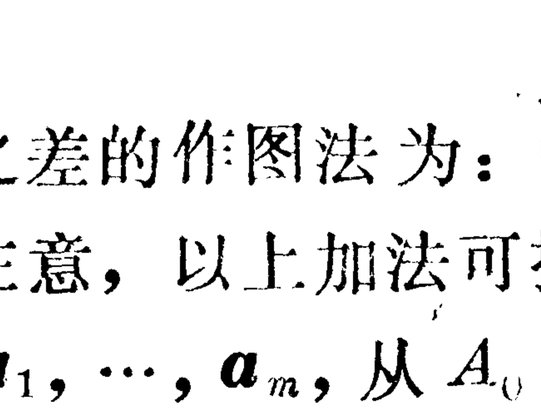


图 4.3

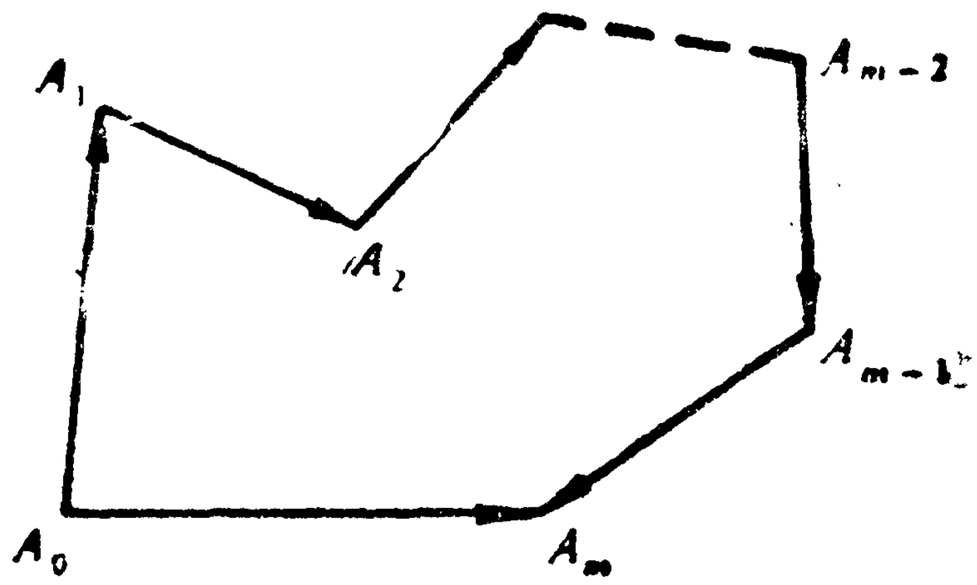


图 4.4

根据向量加法的三角形法则可得向量长度的三角不等式：

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

且等号只有当 a, b 中一个为零向量或者两者同向时成立。这个不等式可推广到有限个向量，有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_m|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|.$$

2）向量与数的乘法（简称**数乘**）

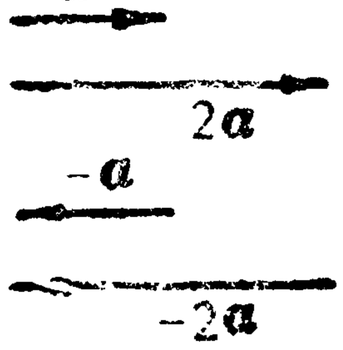


图 4.5

设 a 是一向量，λ 是一实数，定义 a 与 λ 的**乘积** λa 为一向量，其大小为 $|\lambda|\,|a|$，方向与 a 平行，当 $\lambda>0$ 时与 a 同向，当 $\lambda<0$ 时与 a 反向。见图 4.5。特别，

$$1\cdot a=a,\quad (-1)a=-a,$$

而当 $\lambda=0$ 或 $a=0$ 时，λa 为零向量。

数乘满足以下运算规律：

II_1 分配律

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b.\quad (\text{见图 4.6})$$

II_2 分配律

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

II_3 结合律

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a=\mu(\lambda a).$$

II_4 $1a=a$.

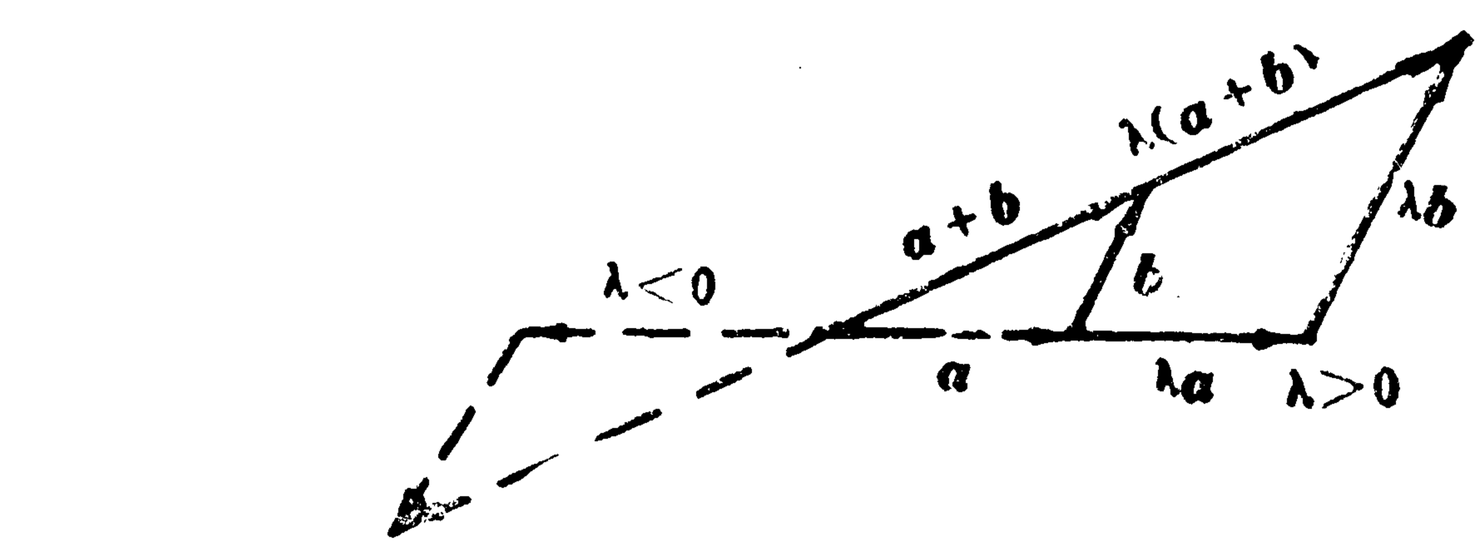


图 4.6

由定义可推出以下结论：

(1) 两个非零向量 a, b 平行（记作 $a\parallel b$）的充要条件为

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\quad(\lambda\text{ 为非零实数})。\tag{1.1}$$

事实上，若 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，取 λ 使 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，$\lambda$ 的正负号依 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向而定，因此有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；反之，若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，因 $\lambda\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$。

(2) 对非零向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}。\tag{1.2}$$

例 1 已知两个不平行的非零向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{OB}|=b$，求证：向量 $\overrightarrow{OC}=b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}$ 平分这两个向量的夹角 $\angle AOB$。

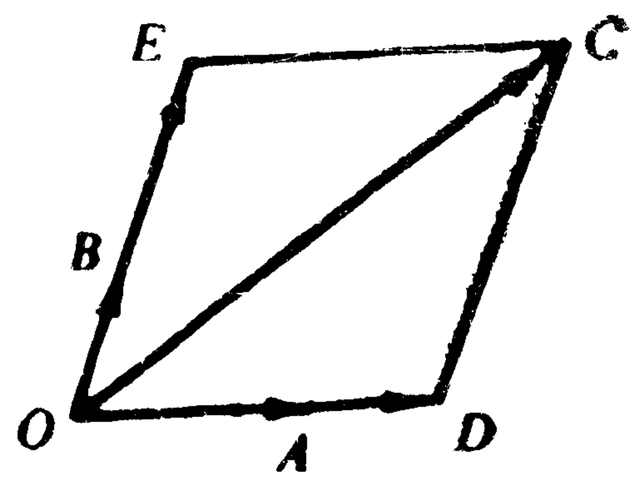


图 4.7

证 如图4.7，作 $\overrightarrow{OD}=b\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=a\overrightarrow{OB}$，则 $|\overrightarrow{OD}|=b|\overrightarrow{OA}|=ba$，$|\overrightarrow{OE}|=a|\overrightarrow{OB}|=ab$，所以 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OE}|$。

又 $\overrightarrow{OC}=b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$，所以 OC 是平行四边形 $ODCE$ 的对角线，而 $|OD|=|OE|$，因此，四边形 $ODCE$ 是菱形，因为菱形的对角线平分顶角，所以 OC 平分 $\angle DOE$，即 $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\angle AOB$。 □

总起来说，向量的加法与数乘可以象实数及多项式那样去运算，因为它们的运算规律是线性的，所以这两种运算统称为向量的**线性运算**。

3. 向量在数轴上的投影

先定义空间两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**夹角** θ：把两个向量平移到同一个起点 O，如图 4.8 所示，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\angle AOB$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

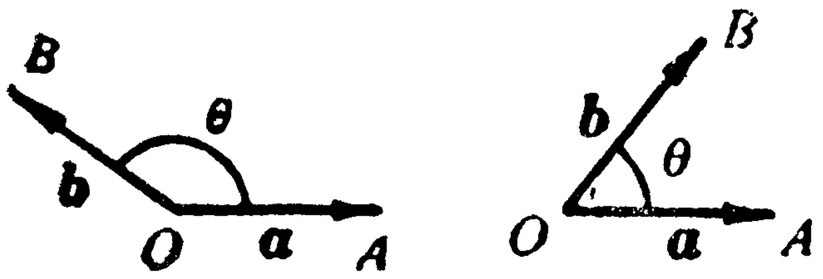


图 4.8

空间向量与数轴的夹角也如此定义，即是两个方向的夹角。

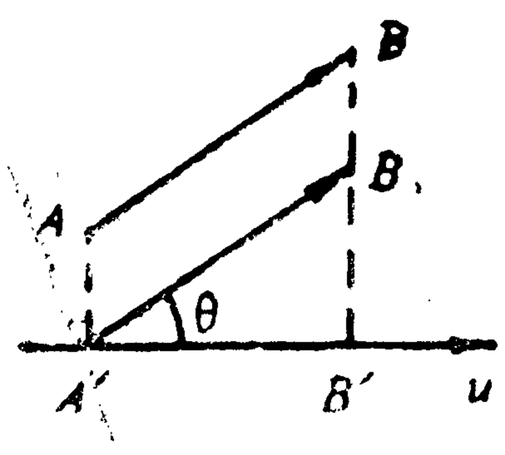
下面讨论向量 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 u 上

的投影.设$\overrightarrow{AB}$与数轴u的夹角为θ，称数$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$为$\overrightarrow{AB}$**在数轴**$u$**上的投影**，记为$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，即

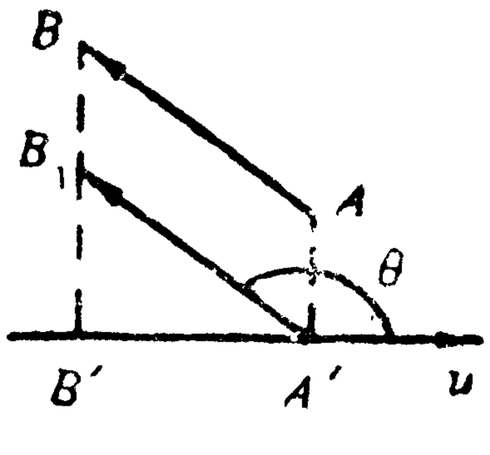
$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{1.3}$$

若过A，B各作数轴u的垂线AA'，BB'，垂足分别为A'，B'，则线段$A'B'$的长度等于$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$的绝对值，而$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$的正负号与$\cos\theta$的符号一致(见图4.9)。

对任意两个向量也有类似结果：记$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则



(1)



(2)

图 4.9

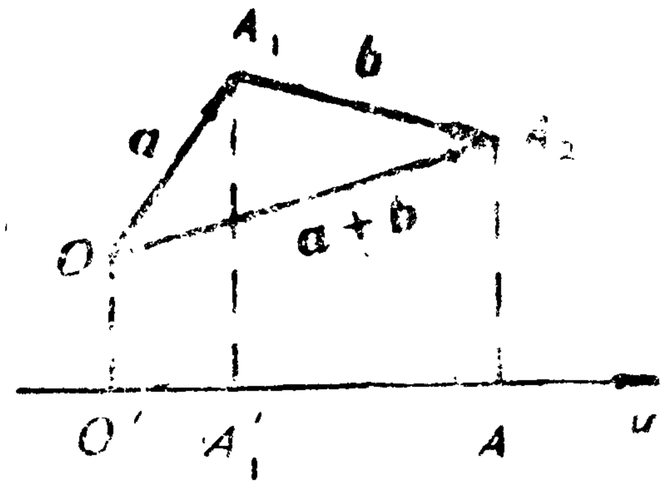


图 4.10

$$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta,\ \mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$$

显然，相等向量在同一轴上的投影相等；**向量的和在数轴上的投影等于各向量在该数轴上的投影之和.**如图4.10所示，有

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}. \tag{1.4}$$

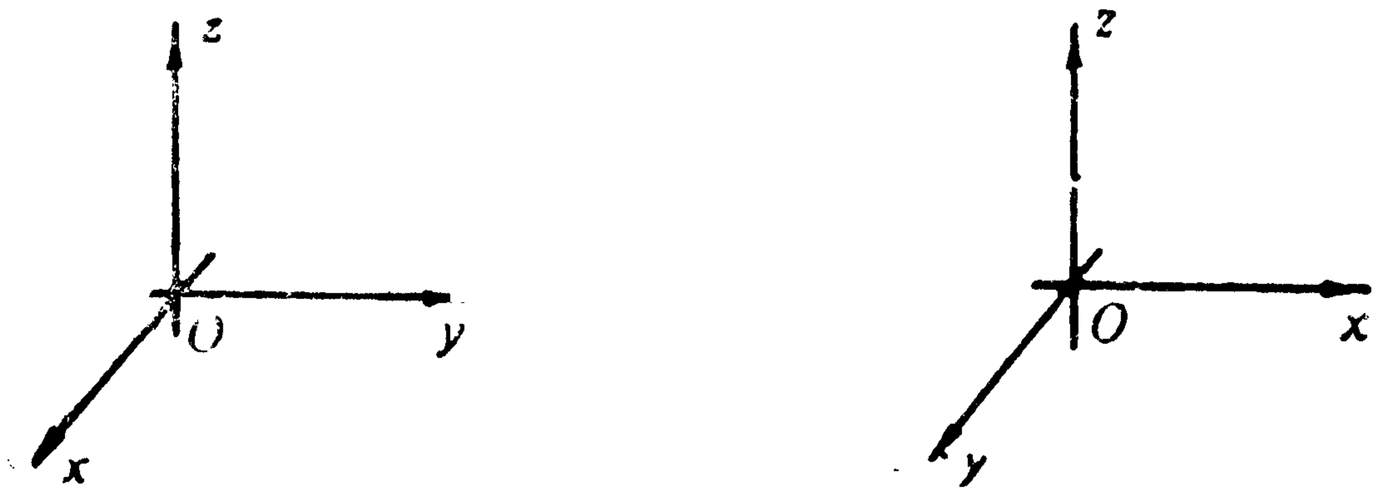
4. 空间直角坐标系

上面我们采用了几何方式来表示向量(以有向线段的概念)，如果引入坐标系，便可以用代数术语来描述。同理，三维空间中的一点对于一个坐标系而言，就能用有序三元数组(称为其坐标)来描述。为此，我们要引入坐标，向量的问题有时也可以通过数量来进行讨论。

1) 向量的坐标

为了建立直角坐标系，在通常三维空间中任取一点O，叫做坐标**原点**，以O点为起点，作三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$(称为**基向量**或**坐标向量**。称过O点分别以$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$为方向的有向直线

为 x 轴，y 轴，z 轴，它们都称为**坐标轴**. 过两根坐标轴的平面统称为**坐标平面**，它们分别是 xOy，yOz，zOx 平面. 关于坐标轴方向的规定如下：如果将右手的母指与食指分别指着 x 轴与 y 轴的方向，而中指的方向与 z 轴的方向一致，则称此坐标系为**右手坐标系**(图 4.11(a))，否则，称为**左手坐标系**(图 4.11(b)). 为了与工程、技术相一致，今后我们都采用右手直角坐标系.通常记为 $(O;\ xyz)$ 或$(O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.



(a)　　(b)

图　4.11

设 $\boldsymbol{a}$ 是三维空间中任意一个向量，将它平移到以坐标原点 O 为起点，令其终点为 M. 过点 M 作平行于 $\boldsymbol{k}$ 的直线，交 xOy 平面于点 Q，再过点 Q 作平行于 $\boldsymbol{j}$ 的直线，交 x 轴于点 A，如图 4.12 所示. 由向量的加法规则，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QM}.$$

因为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{QM}$分别与 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 平行，则

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{AQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{QM}=z\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad (1.5)$$

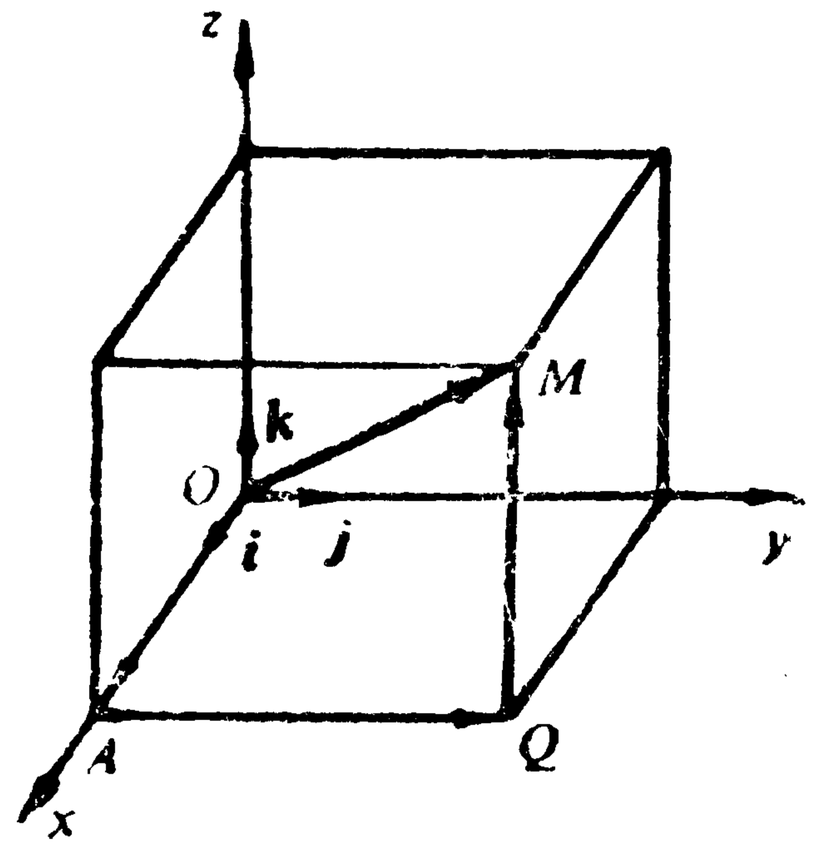


图　4.12

因此，有序三元数组$(x,\ y,\ z)$就与空间中向量 $\boldsymbol{a}$ 之间建立了一一对应关系，$(x,\ y,\ z)$就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系$(O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$中的坐标**或分量**，记作

$$\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z),$$

特别有

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

例 2（向量的模） 设有向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.6}$$

证 由立体几何知道，任何长方体对角线长的平方等于相邻三棱长的平方和. 由图 4.12 可得

$$|\boldsymbol{a}|^2=|\overrightarrow{OM}|^2=|x\boldsymbol{i}|^2+|y\boldsymbol{j}|^2+|z\boldsymbol{k}|^2,$$

由此即可推出式(1.6). □

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向由它与基向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角确定，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的夹角分别记为 α,β,γ，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，方向角的余弦叫做**方向余弦**，而 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标就是 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影，故有

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

因此，

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{1.7}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

式(1.7)是方向余弦的坐标表示式，从式(1.7)立即可得方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{1.8}$$

从式(1.8)可见，不是任给三个角度都可作为某一方向的方向角的，但若所给三个角度满足式(1.8)，则一定可找到一个方向以此三个角度为方向角.

2）点的直角坐标

根据向量的坐标，我们可以定义空间中点的坐标，因为在固定起点的情况下，向量与它的终点相互唯一决定.

定义（点的直角坐标） 在直角坐标系 $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 中，向量

$\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的位置向量，所谓**点的直角坐标**(简称**点的坐标**)就是它的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记作$M(x, y, z)$，其中x，y与 z 分别叫做点 M 的**横标，纵标**与**立标**。

换句话说，所谓点 M 在直角坐标系$(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$中的坐标$(x, y, z)$就意味着等式(1.5)成立。

图 4.12 中的折线 $OAQM$ 叫做点 M 的**坐标折线**。据坐标折线，我们就可以由点求坐标，由坐标定出点的位置。

三个坐标面把整个空间分成 8 个部分，每一部分称为**卦限**，其编号按平面上四个象限的次序，在 xOy 平面以上的部分依次为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ；在 xOy 平面以下的部分依次为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ。对于各卦限中的点，它们的坐标的符号有正有负，现归纳如下。

坐标＼卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅵ	Ⅴ	Ⅳ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

在xOy平面上的点，它的立标为 0，所以它的坐标是$(x, y, 0)$；同样，在 yOz 平面上点的坐标是 $(0, y, z)$，在 xOz 平面上点的坐标是$(x, 0, z)$。对 x 轴上的点，它的纵标和立标都是 0，所以它的坐标是$(x, 0, 0)$；同样，y 轴上点的坐标是$(0, y, 0)$，z 轴上点的坐标是$(0, 0, z)$。而原点 O 的坐标是$(0, 0, 0)$。在图 4.12 上，直线 MQ 平行于 z 轴，与 xOy 平面垂直，所以直线MQ上的点只有立标不同，横、纵坐标是相同的；同样，平行于 y 轴的直线上的点只有纵标不同，平行于 x 轴的直线上的点只有横标不同。而垂直于x轴的平面（平行于 yOz 平面）上的点的横标都相同，如图 4.12 上点 M，A，Q 的横标都相同；垂直于 y 轴的平面上的点的纵标都相同，垂直于 z 轴的平面上的点的立标都相同。

给定了坐标(x, y, z)要找点 M，一般可以先在 xOy 平面上找

出坐标为(x, y)的点Q，过Q作xOy平面的垂线，再在其上找坐标为z的点M。

3）用坐标作向量运算

向量有了坐标表示后，它的加、减、数乘运算都可化为坐标的运算。如设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

利用向量的线性运算规律可得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}&=\left(\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\ \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\ \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\right)\\&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),\end{aligned}\tag{1.9}$$

而两个非零向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$平行的充要条件$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$则可写成

$$b_i=\lambda a_i(i=1,2,3)\quad 或\quad \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda,\tag{1.10}$$

即两个非零向量平行的充要条件是相应的分量成比例。

空间任意两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$确定的向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)。\tag{1.11}$$

例 3（距离公式） 证明空间中的任意两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$间的距离是

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。\tag{1.12}$$

证 利用式(1.11)可得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

代入式(1.6)便有

$$|M_1M_2|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。\square$$

例 4（定比分点坐标） 给定两点$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2,$

z_2)，在直线AB上求一点P，使$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\neq-1)$。（见图4.13）

解 设P的坐标为(x, y, z)，则有

$$\overrightarrow{AP}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1),$$

$$\overrightarrow{PB}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z),$$

据题意$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，因此有

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\ y-y_1=\lambda(y_2-y),$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

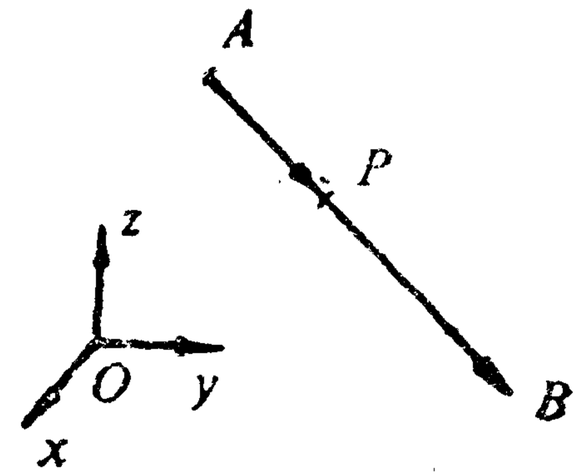


图 4.13

由此可解得点P的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.\quad (1.13)$$

特别，取$\lambda=1$，即点P是线段AB的中点，则得中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.\quad (1.14)$$

注 $\lambda=0$时P即点A，点B对应的$\lambda=\infty$，所以当$0<\lambda<+\infty$时，点P在A与B之间；当$-1<\lambda<0$时，点P在BA的延长线上；当$\lambda<-1$时，点P在AB的延长线上。

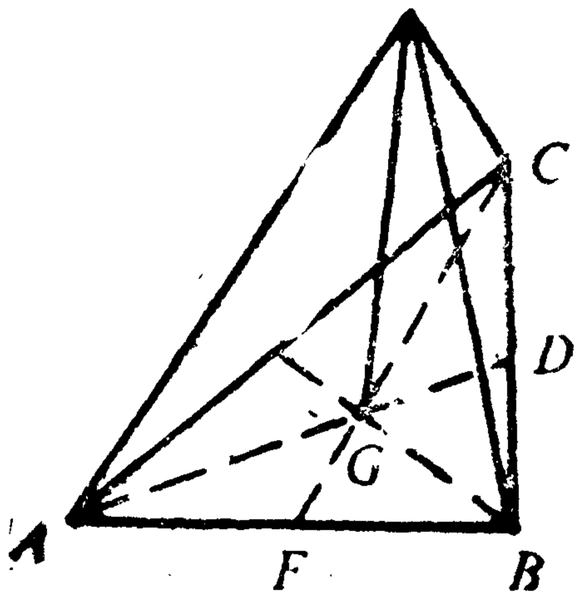


图 4.14

例5 （1）设G是三角形ABC的重心，O是空间任一点，证明

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

（2）设三角形的顶点的坐标为$A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$，$C(c_1, c_2, c_3)$，求其重心G的坐标。（见图4.14）

解 （1）$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}$，

所以

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG},$$

而

$$\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GF}=-2\overrightarrow{FG},$$

所以

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}+(-2\overrightarrow{FG})=0.$$

故

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

(2) 取 O 为坐标原点，则$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2, b_3)$，$\overrightarrow{OC}=(c_1, c_2, c_3)$，所以

$$\overrightarrow{OG}=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \quad \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \quad \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right),$$

故重心 G 的坐标为

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \quad \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \quad \frac{a_3+c_3+c_3}{3}\right).$$

上面讨论了形如

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

等的向量形式，把它们叫做三维向量．其几何观念以有向线段来解释，而其代数意义则用有序三元数组来说明，并且把向量运算转化为数组运算．特别是，向量的线性运算是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

根据第 2 段的讨论知道，向量的线性运算满足 8 条运算规律 I_1—I_4，II_1—II_4，这就是说，在三维空间中所有三维向量组成的集合内，所赋予的两种代数运算(加法与数乘)满足 8 条运算规律．实际上，这个重要事实对于有序四元数组，…，n元数组都成立．根据这个观点可导致一个抽象的数学概念，这便是第 13 章中的线性空间．

§4.1 习　　题

1．设 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，证明：对任一点 O，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$．

2．设 A，B，C，D 是四面体的顶点，M，N 分别是边 AB，CD 的中点，证明

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

3．三个向量有公共起点 O，并分别以三角形 ABC 的顶点为终点，证明：

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 的充要条件是点 O 是三角形中线的交点(重心)。

4. 设 $\boldsymbol{a}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,0,4)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$, 求 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$。

5. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{a}^\circ$, $\boldsymbol{b}^\circ$ 及等分 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的单位长向量 $\boldsymbol{c}$。

6. 已知三个力 $\boldsymbol{F}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{F}_2=(-2,3,-4)$, $\boldsymbol{F}_3=(3,-4,5)$, 同时作用于一点, 求合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方向余弦。

7. 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角。

8. 已知三点 $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $D(-3,0,1)$, 以 AB, AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 求点 C 的坐标。

9. 分别求点 $M(-3,4,5)$ 到原点, y 轴和 yOz 平面的距离。

10. 在 yOz 平面上, 求与三个点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$ 等距离的点。

11. 求证: 点 $A(-4,0,2)$, $B(-1,3\sqrt{3},2)$, $C(2,0,2)$, $D(-1,\sqrt{3},2+2\sqrt{6})$ 是一个正四面体的顶点; 并求这个四面体的外接球心。

12. 证明: 四面体相对棱的中点的连线交于其中点, 并用四面体顶点的坐标把交点的坐标表示出来。

§4.2 向量的数量积 向量积 混合积

1. 数量积(也称内积)

1) 定义

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2, 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 等于力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向的分力 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ 与 $|\boldsymbol{s}|$ 的乘积, 即

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(见图 4.15)。

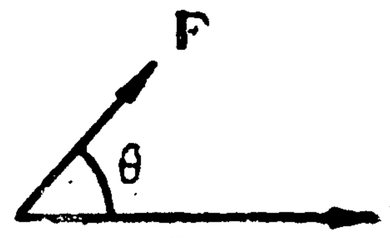


图 4.15

由此我们引进二个向量的数量积的定义。

定义 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(读作 $\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$)是一个实数, 它等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模及它们夹角 θ 的余弦的乘积, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由此定义，上述力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 上所作的功 W 就是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

因为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta,\ \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta,$$

所以有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},$$

即两个向量的数量积等于一个向量的模和另一个向量在这个向量上的投影的乘积.

2) 性质

由数量积的定义立即可推得以下性质：

(1) $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

这是因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$, $|\boldsymbol{b}|\neq0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直.

特别要注意，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不一定能推出：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为0，所以

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geqslant0,$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}^2=0$.

对基向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 由(2)、(3)可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\\&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

3) 运算规律

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

由定义显然可得.

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证 若三个向量中有一个是零向量，结论显然成立. 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$都是非零向量，则有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})$$
$$=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$ □

(3) 结合律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$，$\lambda$为实数.

证 只需证明前一等号，后一等号据交换律和前一等式可得. 当$\lambda=0$时显然成立.

当$\lambda\neq0$时，记$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ_1，由定义

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_1,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

当$\lambda>0$时，$|\lambda|=\lambda$，$\theta_1=\theta$，上两式显然相等；

当$\lambda<0$时，$|\lambda|=-\lambda$，$\theta_1=\pi-\theta$，所以

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\lambda|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\theta)$$
$$=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$ □

以上运算规律表明，点乘运算可按普通乘法运算规律进行，例如，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

等等.

4) 坐标表示式

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$
$$=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}$$
$$+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}$$
$$+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.$$

利用式(2.1)便得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

这就是两个向量数量积的坐标表示式。由此可得两个非零向量正交的充要条件是

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, 向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ, 则有

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\\&=\boldsymbol{a}^\circ\cdot\boldsymbol{b}^\circ\\&=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.\end{aligned}$$

因为 $|\cos\theta|\leqslant 1$, 故有

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,\quad \text{等号只在 } \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \text{ 时成立.}$$

或写成

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right)\quad\text{(柯西不等式)}.$$

例 1 求证三角形的三条高线相交于一点.

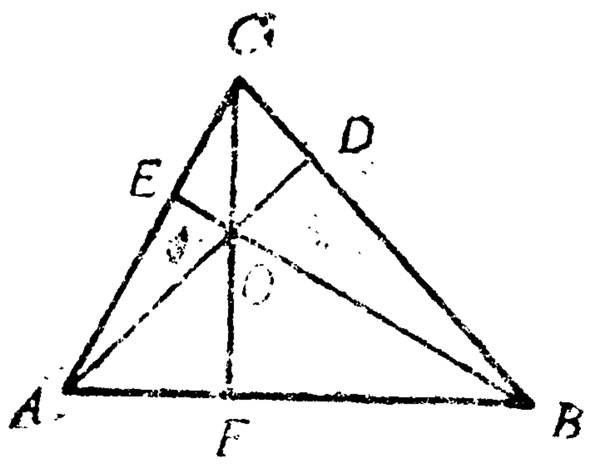


图 4.16

证 如图 4.16, 作 $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, BE 与 AD 交于点 O, 现证明 $CO\perp AB$.

$$\vec{AO}=\vec{AC}+\vec{CO},$$

$$\vec{BO}=\vec{BC}+\vec{CO},\quad \vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC},$$

因 $\vec{AO}\perp\vec{BC}$, $\vec{BO}\perp\vec{AC}$, 所以有

$$\vec{AO}\cdot\vec{BC}=\vec{AC}\cdot\vec{BC}+\vec{CO}\cdot\vec{BC}=0,$$

$$\vec{BO}\cdot\vec{AC}=\vec{BC}\cdot\vec{AC}+\vec{CO}\cdot\vec{AC}=0.$$

两式相减得

$$\vec{CO}\cdot(\vec{AC}-\vec{BC})=0\quad\text{即}\quad\vec{CO}\cdot\vec{AB}=0,$$

因此 $\vec{CO}\perp\vec{AB}$, 即 COF 是 AB 边的高线, 这就证明了三条高线交于一点 O. □

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(1,0,1)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及其夹角 θ.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+0+0=1$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

所以

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

两个向量的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 有时写成$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，由内积的分配律与结合律可得到

Ⅰ. 对于任意的实数 λ 与 μ，以及任意叁个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，有

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

对于内积的交换律可写为

Ⅱ. 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

利用内积的第三个性质，便有

Ⅲ. 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，有

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$.

在上一节中，我们曾指出，三维空间中所有三维向量组成的集合V_3赋予向量的线性运算满足 8 条运算规律，由此可得到线性空间的定义. 有趣的是，内积也可以类似的方式运用. 如果在V_3中再引进内积运算，且满足上面三个条件 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，由此可引进内积空间(参看第 15 章).

2. 向量积(也称外积)

1) 定义

设一物体的支点为 O，力 $\boldsymbol{F}$ 作用在物体上的 A 点，过 O 作力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线 AP 的垂线 OP，交AP于点 P，$|OP|$是力臂，$\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{F}$的夹角为θ，则力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{L}$ 的大小为(见图 4.17)

$$|\boldsymbol{L}| = |OP|\,|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{OA}|\sin\theta,$$

$\boldsymbol{L}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{F}$，指向按“右手法则”，即当右手的四个手指从$\overrightarrow{OA}$转向 $\boldsymbol{F}$ 时(转

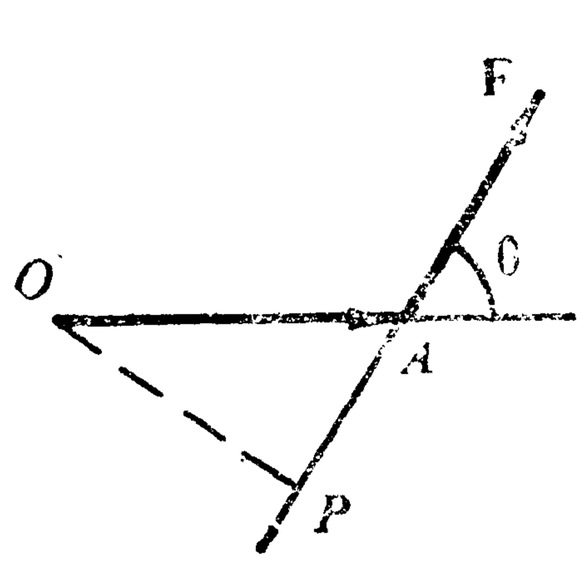


图 4.17

角是两者的夹角)，大姆指的指向就是 L 的指向. 由此引出两个向量的向量积的定义.

定义(向量积)　两个向量 a 与 b 的**向量积** $a\times b$ (读a叉乘b)是一个向量,其长度为

$$|a\times b| = |a|\,|b|\sin\theta(\theta\text{是}a, b\text{的夹角}),$$

方向垂直于 a 与 b, 并且$(a, b, a\times b)$构成右手系.

据此定义,上述力矩可记作 $L=\overrightarrow{OA}\times F$.

$|a\times b|$的几何意义是表示以 a, b 为邻边的平行四边形的面积.

2) 性质

由向量积的定义立即可推得以下性质:

(1) $0\times a = a\times 0 = 0$.

(2) 两个非零向量 a 与 b 平行的充要条件是

$$a\times b = 0.$$

这是因为 $|a|\neq 0$, $|b|\neq 0$, $a\times b=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0$, $\Leftrightarrow \theta=0$ 或 $\pi \Leftrightarrow a\parallel b$.

特别,$a\times a=0$. 对基向量 i, j, k,有

$$\left.\begin{aligned} &i\times i = j\times j = k\times k = 0,\\ &i\times j = k,\ j\times k = i,\ k\times i = j. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

3) 运算规律

(1) $a\times b = -b\times a$ (注意! 不满足交换律).

(2) 分配律: $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$.

(3) 结合律: $(\lambda a)\times b = \lambda(a\times b) = a\times(\lambda b)$.

(1),(3)由定义直接可得.

(2)的证明　a, b, c 中有一个为零向量时显然成立.设a, b, c 都是非零向量,只需证明

$$(a+b)\times c^0 = a\times c^0 + b\times c^0.$$

首先注意到,求 $a\times c^0$ 有以下作图法(见图 4.18).

把向量 $a=\overrightarrow{OA}$ 投影到与向量 c^0 垂直的平面上，得到向量

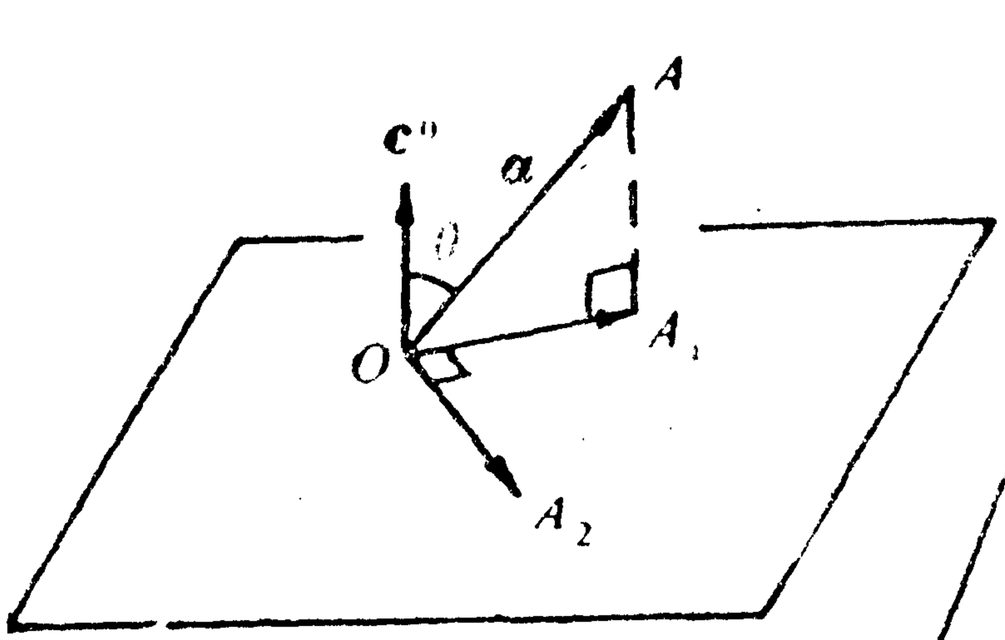


图 4.18

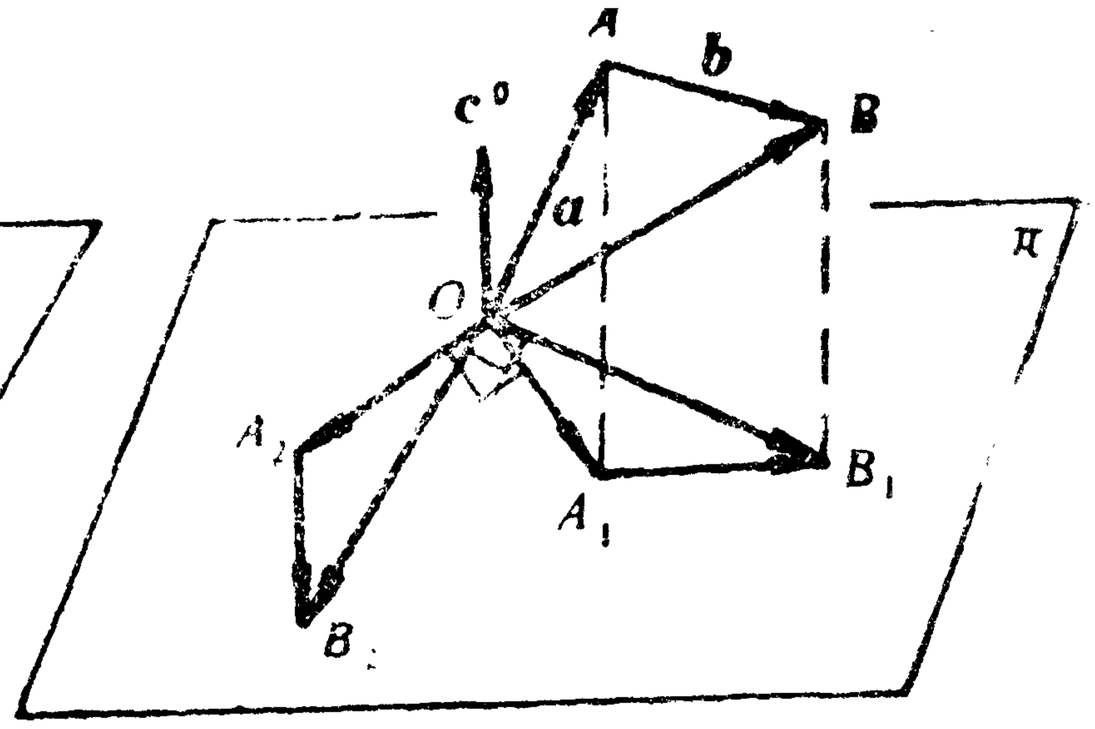


图 4.19

$\overrightarrow{OA_1}$，再将$\overrightarrow{OA_1}$在这平面上绕O顺时针方向旋转90°，得到向量$\overrightarrow{OA_2}$，则

$$\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0 = \overrightarrow{OA_1} \times \boldsymbol{c}^0.$$

这是因为$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$与$\overrightarrow{OA_1} \times \boldsymbol{c}^0$有相等的模

$$|\boldsymbol{c}^0||\boldsymbol{a}|\sin\theta = |\boldsymbol{a}|\sin\theta = |\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}|.$$

和相同的方向$\overrightarrow{OA_2}$.

过$\boldsymbol{c}^0$的起点O作平面π垂直$\boldsymbol{c}^0$，向量$OA = \boldsymbol{a}$，$AB = \boldsymbol{b}$，$OB = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$，它们在平面$\pi$上的投影为$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{OB_1}$(如图4.19)，显然有$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1}$，再将$\triangle OA_1B_1$在$\pi$上绕$O$点顺时针旋转90°，得到$\triangle OA_2B_2$，据以上向量积的作图法，应有

$$\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0, \quad \overrightarrow{OB_2} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}^0, \quad \overrightarrow{A_2B_2} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}^0.$$

但是，

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_2},$$

故有

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0 + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}^0.$$

4) 坐标表示式

先复习二、三阶行列式的计算. 二阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

关于 n 阶行列式的计算将在下一章中进行讨论.

现在讨论向量积的坐标表示式. 设

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},$$

则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\ &\quad + a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} \\ &\quad + a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

由式(2.2)可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

为了便于记忆,常把它写成三阶行列式的形式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 3 在 xOy 平面上有一平行四边形,设它的两邻边为向量 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, 0)$与 $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, 0)$,证明:该平行四边形的面积为

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$的绝对值.

证 据定义,$S = |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$,而

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$S = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{的绝对值.}$$

3. 混合积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 仍是一个向量，它还可以与另一个向量 $\boldsymbol{c}$ 又乘或点乘，我们称 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 为三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$，即

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| \cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

混合积 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 是这样的一个实数，它的绝对值 $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 这是因为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积，以此平行四边形为底，则平行六面体的高 $h = ||\boldsymbol{c}| \cos\theta|$（见图 4.20）.

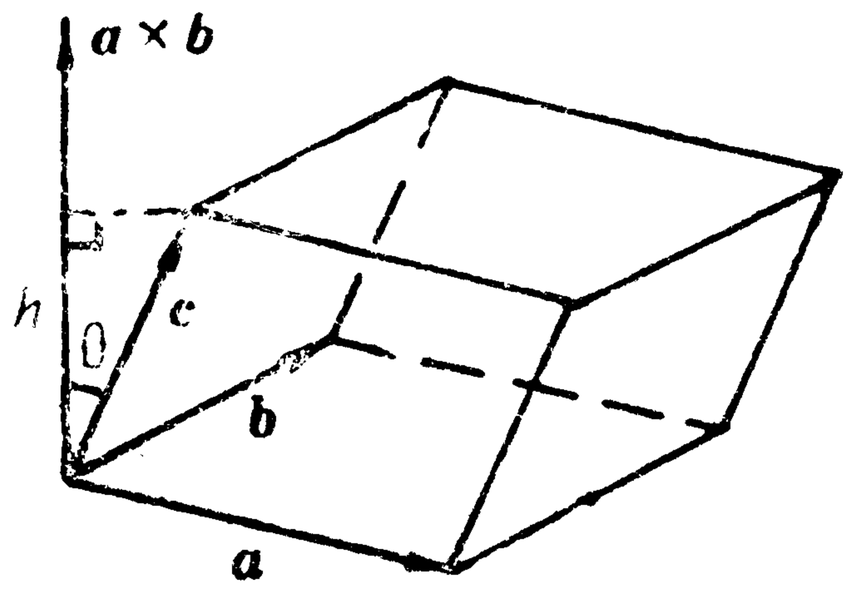


图 4.20

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$，则混合积的坐标表示式为

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由混合积的定义及坐标表示式立即可得以下性质：

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

$$= -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

(2) 对任意实数 λ, μ,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{c}_1 + \mu\boldsymbol{c}_2) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1,) + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2).$$

(3) 混合积等于零的充要条件是有一个向量等于零向量或者所有三个向量都平行于同一平面(称为**共面**)。

例 4 设四面体的四个顶点为 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体 $ABCD$ 的体积。

解 由立体几何知,四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体体积的 1/6,即

$$V=\frac{1}{6}|(AB, AC, AD)|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$$
$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1),$$

故有

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$ 的绝对值。

例 5 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为三个不共面的向量,求任意向量 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分解式

$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

解 两边与 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 取混合积,得

$$(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+y(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+z(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$
$$=x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

因 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面,$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\neq 0$,于是得

$$x=\frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

同理可得

$$y=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad z=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

例 6 证明公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

证 用坐标表示式证明。设

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3),$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(x_1, x_2, x_3),$$

则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

$$x_1=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=c_3(a_3b_1-a_1b_3)-c_2(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1$$

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_1,$$

同理可得

$$x_2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_2,$$
$$x_3=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_3.$$

合并三式即得所要证的公式.

§4.2 习　题

1. 已知三角形 ABC 的两边是向量 $\overrightarrow{AB}=(2,1,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3,2,6)$, 求三角形的三内内角.

2. 证明：向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 垂直.

3. 下列等式是否正确?

(1) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$;　　(2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2$;

(3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$;　　(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$;

(5) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

4. 设一平面平行于向量 $3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, 证明：向量 $2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直于这个平面.

5. 证明恒等式：

$$2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2,$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是不平行的非零向量, 上述等式与怎样的几何事实相应?

6. 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(4,5,3)$ 的单位向量.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$, 求

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;　　(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;　　(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;　　(6) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

8. 下列推断是否正确?

(1) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

9. 已知三点 A, B, C 的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$, 证明三点在一直线上.

10. 已知三角形 ABC 的顶点坐标是 $A(1,2,3)$, $B(2,0,6)$, $C(0,3,1)$, 求其面积 S.

11. 已知三点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, 求$\triangle ABC$的面积.

12. 求证拉格朗日恒等式:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

13. 证明: 四点 $A(1,0,1)$, $B(4,4,6)$, $C(2,2,3)$, $D(10,14,17)$ 在同一平面上.

14. 证明: 向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,-3,6)$与 $\boldsymbol{c}=(3,-4,5)$共面, 并找出 λ、μ, 使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

15. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,0,4)$, $\boldsymbol{c}=(-3,1,-1)$, $\boldsymbol{d}=(4,4,-1)$, 试求出 λ, μ, ν, 使$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$.

16. 已知四面体的顶点为 $A(1,2,1)$, $B(-1,3,4)$, $C(-1,-2,-3)$和 $D(0,-1,3)$, 求它的体积.

§4.3 平　　面

通过前几节的学习,大家已熟悉了向量的概念及其代数运算,这一节和下一节就用向量作工具来讨论空间的平面、直线及相互关系等问题.

1. 平面方程

我们来建立任意平面在空间直角坐标系 O-xyz 中的方程.

已知一个平面 π, 垂直于平面 π 的直线叫做它的**法线**, 垂直于平面 π 的任一非零向量叫做它的**法向量**. 因此, 平面 π 上的任何向量都垂直于它的法向量.

从立体几何知道，过空间一点只能作一个平面垂直于一已知直线，所以，过点 M_0，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面 π 是唯一确定的.

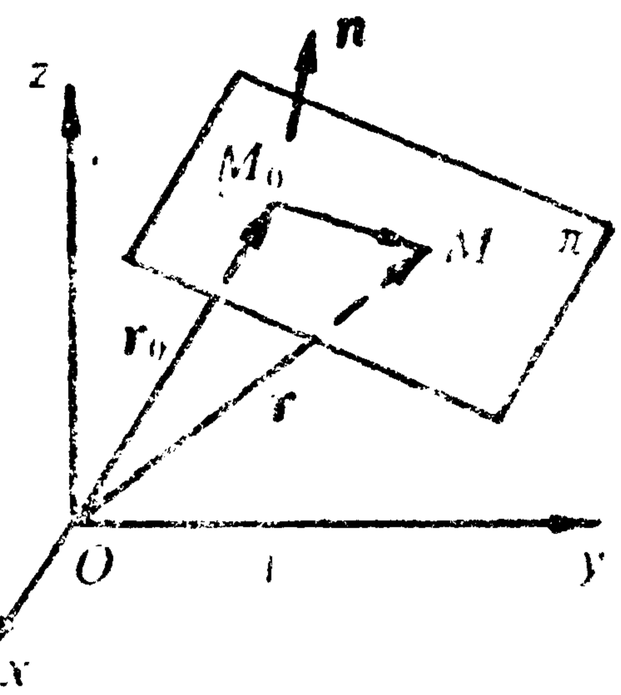


图 4.21

若已知平面过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$为非零向量，如图 4.21 所示. 设 $M(x, y, z)$ 是平面 π 上的任意一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必和 $\boldsymbol{n}$ 垂直，因此，

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (3.1)$$

如果记 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0}=(x_0, y_0, z_0)$，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=(x-x_0, y-y_0, z-z_0).$$

因此，式(3.1)可写成

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0. \qquad (3.2)$$

写成用坐标表示的形式就是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.3)$$

因此，平面 π 上任一点的坐标(x, y, z)都满足方程(3.3)；反之，满足式(3.3)的任何点 (x, y, z) 都落在过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$为法线的平面 π 上. 所以，式(3.3)叫做平面π的方程，而平面 π 叫做方程(3.3)的图形. 由于方程(3.3)由点 M_0 和法向量 $\boldsymbol{n}$ 确定，故称式(3.3)为平面的**点法式方程**，而把方程(3.2)称为平面的**向量方程**.

将方程(3.3)写成形式

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0), \qquad (3.4)$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，方程(3.4)称为平面的**一般方程**. 可见在空间直角坐标系中，任一平面的方程都是三元一次方程；任何三元一次方程的图形都是平面.

注意，在平面方程(3.3)或(3.4)中，x, y, z的系数组成的非零向量(A, B, C)就是这个平面的一个法向量.

例 1　已知不共线的三点 $M_1(2,-1,-3)$，$M_2(-1,3,-2)$，$M_3(0,3,-1)$，求过这三点的平面方程.

解　所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(4,4,-4)=4(1,1,-1),$$

故所求的平面方程为

$$(x-2)+(y+1)-(z+3)=0,$$

即

$$x+y-z-4=0.$$

2. 特殊位置的平面方程

熟悉一些特殊平面有时是很方便的. 下面来说明一些特殊形式的平面方程在直角坐标系中所处的特殊位置.

(1) $Cz+D=0(C\neq 0)$：平面平行于 xOy 平面；特别，若 $D=0$，方程成为 $z=0$，平面即是 xOy 平面.

这是因为平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 平行于 z 轴，平面垂直于 z 轴，因此平行于 xOy 平面. 类似可得，

$Ax+D=0(A\neq 0)$：平面平行于 yOz 平面；特别，若 $D=0$，方程 $x=0$ 表示 yOz 平面.

$By+D=0(B\neq 0)$：平面平行于 xOz 平面；特别，若 $D=0$，方程 $y=0$ 表示 xOz 平面.

(2) $By+Cz+D=0(B^2+C^2\neq 0)$：平面平行于 x 轴；特别，若 $D=0$，平面通过 x 轴.

这是因为 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴垂直. 同理可知，

$Ax+Cz+D=0(A^2+C^2\neq 0)$：平面平行于 y 轴；特别，若 $D=0$，平面通过 y 轴.

$Ax+By+D=0(A^2+B^2\neq 0)$：平面平行于 z 轴；特别，若 $D=0$，平面通过 z 轴。

注意，以上表明，**若平面方程中不出现某变量，则该平面就平行于某坐标轴。**

(3) $Ax+By+Cz=0(A^2+B^2+C^2\neq 0)$：平面过坐标原点。

(4) 如果所有系数都不等于零，则用 $-D$ 去除方程，得到

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1,$$

令 $-\frac{D}{A}=a$，$-\frac{D}{B}=b$，$-\frac{D}{C}=c$，则得以下形式的平面方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.5}$$

因为平面与 x 轴的交点为 $(a,0,0)$，与 y 轴的交点为 $(0,b,0)$，与 z 轴的交点为 $(0,0,c)$，见图4.22，所以，a，b，c 依次称为平面在 x，y，z 轴上的**截距**，并且把方程 (3.5) 称为平面的**截距式方程**。

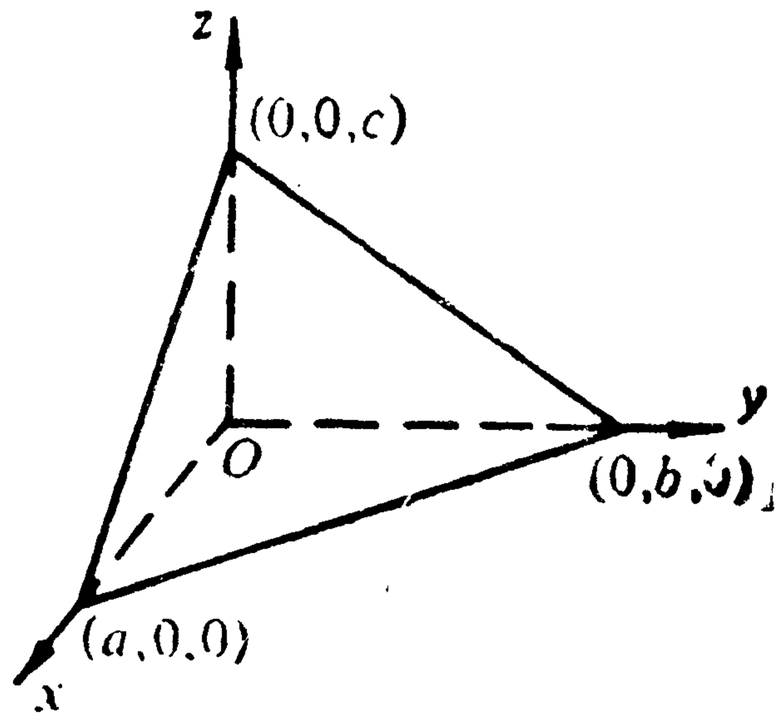


图 4.22

例 2 求通过 y 轴和点 $(1,2,-3)$ 的平面方程。

解 设过 y 轴的平面方程为

$$Ax+Cz=0,$$

又因过点 $(1,2,-3)$，因此有

$$A\times 1+C\times(-3)=0, \quad \text{即} \quad A=3C,$$

故得所求平面方程为

$$3Cx+Cz=0, \quad \text{即} \quad 3x+z=0.$$

3. 点到平面的距离

已知一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与一平面 π

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0,\quad \boldsymbol{n}=(A,B,C),$$

$\boldsymbol{n}$ 为非零向量，求点 M_1 到平面 π 的距离 d。

在 π 上任取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

则距离 d 等于 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的绝对值(见图 4.23)，即

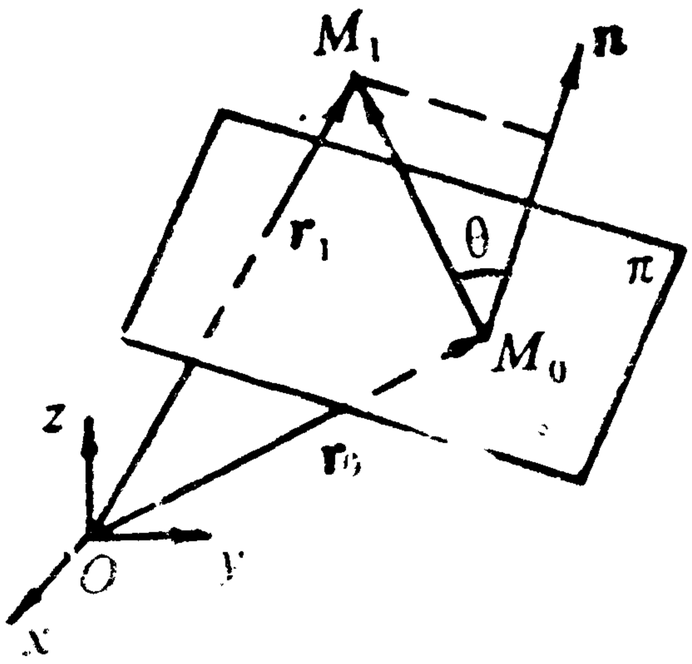


图 4.23

$$d=|\,|\overrightarrow{M_0M_1}|\cos\theta\,|$$

$$=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. 平面的相互位置

设有两个不同的平面，其方程为

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_3:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$均为非零向量．则有

(1) 两个平面相交的充分必要条件是方程中 x, y, z 的对应系数不成比例。

(2) 两个平面平行的充分必要条件是方程中 x, y, z 的对应系数成比例，但常数项不与这些系数成比例。

(3) 两个平面重合的充分必要条件是方程中所有对应系数成比例。

证　首先证明充分性。

(1) 由已知条件知道，三个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不等于零，不妨设

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是，在平面 π_1 与 π_2 的方程联立所得到的方程组中令 $x=0$，则得

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

它有解，这说明平面 π_1 与 π_2 有公共交点。

(2) 由于

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1 \quad (\lambda \neq 0),$$

但是，$D_2 \neq \lambda D_1$，因此，平面 π_2 的方程可写成

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0.$$

因为 $D_1 \neq D_2/\lambda$，所以平面 π_2 与 π_1 没有公共点，即 π_1 与 π_2 平行。

(3) 由于

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad D_2 = \lambda D_1, \quad (\lambda \neq 0),$$

于是，平面 π_2 的方程变为

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0.$$

这就是 π_1 的方程，故平面 π_1 与 π_2 重合。

根据上面的结果，可用反证法证明定理的必要性。 □

两个平面 π_1 与 π_2 的夹角 θ 就是它们的法向量的夹角（或它的补角），有

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

因此，两个平面 π_1 与 π_2 垂直的充要条件为

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

若有三个不同的平面，

$$\left.\begin{aligned}\pi_1:\ & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ \pi_3:\ & A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

其法向量 $\boldsymbol{n}_i=(A_i, B_i, C_i)(i=1, 2, 3)$均为非零向量。三个平面间的关系是，或者相交于一点；或者平行于某条直线，特别，都通过某一条直线。

若式(3.6)的三个平面交于一点，即方程组(3.6)有唯一解，充要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{即} \quad (\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{n}_3\neq 0.$$

若 $\Delta=0$，三个法向量共面，则三平面将平行于某条直线。这时，三个平面的位置可能是以下情况之一：

(1) 三平面平行；

(2) 二平面平行与另一平面相交；

(3) 三个平面两两相交的交线平行；

(4) 三个平面都通过某一条直线。

读者可以利用第 5 章线性代数方程组理论给以严格证明。

§4.3 习　　题

1. 求过点 $M_0(2, 3, 4)$，且与平面 $4x-3y+z-2=0$ 平行的平面方程。

2. 已知不共线的三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，证明：过这三点的平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

3. 求过点 $M_0(2, -1, 1)$和 x 轴的平面方程。

4. 求过两点$(2, -1, 1)$和$(4, 1, 5)$且平行于 x 轴的平面方程。

5. 一平面过原点和点 $M_0(4, -3, 2)$，并与平面$2x+3y-z-8=0$垂直，求这平面的方程。

6. 一平面过原点，并与两平面

$$2x+y-3z=0, \quad x-y+z=0$$

垂直，求这平面的方程。

7. 求点到平面的距离。

(1) 点(4, 2, 1)到平面 $x+2y+2z-16=0$；

(2) 点(−1, 2, 4)到平面 $x-y+1=0$。

8. 已知原点到平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (abc\neq 0)$$

的距离为 p，证明：

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

9. 在 y 轴上求一点，使它到平面

$$2x+3y+6z-6=0 \quad 与 \quad 3x+6y-2z-18=0$$

有相等的距离。

10. 求两个平面

$$3x+2y+6z-3=0 \quad 与 \quad 4x+3y+12z-5=0$$

之间的二面角的平分面方程。

11. 一平面经过两点(0, 4, 0), (0, 0, −1)，并与平面 $y+z-2=0$ 的交角为 $\pi/3$，求这平面的方程。

12. 求三个平面

$$x+y+z=2, \quad 2x-y-z=4, \quad x-2y+3z=7$$

的交点。

§4.4 直　　线

1. 直线的方程

要确定空间一条直线，只要给出以下三个条件之一：

(1) 作为两个平面 π_1 与 π_2 的交线；

(2) 经过两个不同的点 M_1, M_2；

(3) 经过一点 M_1，且平行于向量 α。

因此，给定上面任一个条件都可求得直线方程的一种形式。

1）一般式方程

当直线 L 作为两个平面 π_1 和 π_2

$$\left.\begin{aligned}\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

的交线时，两个平面方程中的一次项系数不成比例，两平面方程的联列方程组(4.1)就表示交线 L 的方程。这是因为交线 L 上的点的坐标都满足方程组(4.1)，满足(4.1)的点 (x, y, z) 既在 π_1 上又在 π_2 上，必在 π_1 与 π_2 的交线 L 上。式(4.1)称为**直线的一般方程。**

2）点向式方程

直线上任一非零向量称为直线的方向向量。

给定一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$与一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(l, m, n)$，则对过点 M_0 以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方向向量的直线 L 上的任一点 $M(x, y, z)$，都有 $\overrightarrow{M_0M}\ /\!/\ \boldsymbol{\alpha}\Leftrightarrow$ 两向量的坐标成比例，即得

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{4.2}$$

这就是直线的**点向式方程**，也称为**标准方程。**

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标(l, m, n)叫做这条直线的一组**方向数。**显然，一条直线的方向数有无穷多组。

式(4.2)是连等式，可写成二个独立等式的联立，即写成一般方程

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\[2ex] \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}.\end{cases}$$

若要将直线 L 的一般方程(4.1)写成点向式方程(4.2)形式，只要在直线 L 上随便找一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和平行于直线的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 就行了。$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$。

3）两点式方程

给定两个不同的点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，则过这两点的直线 L 的方向向量可取为

$$\boldsymbol{\alpha} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\quad y_2 - y_1,\quad z_2 - z_1),$$

这时方程(4.2)成为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.3}$$

方程(4.3)就是过两点 M_1，M_2 的直线 L 的**两点式方程.**

注 在式(4.2)(式(4.3)亦如此)中，l，m，n 三个数可有一个或二个为零，并约定：当 $l=0$ 时，式(4.2)表示为

$$x - x_0 = 0,\quad \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

直线在平面 $x = x_0$ 上；同样，$m=0$ 时，直线在平面 $y = y_0$ 上；$n=0$ 时，直线在平面 $z = z_0$ 上. 当 $l = m = 0$ 时，式(4.2)表示为

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$

直线平行于 z 轴；同样，当 $m = n = 0$ 时，直线平行于 x 轴；当 $n = l = 0$ 时，直线平行于 y 轴.

4) 参数方程

从运动观点引入参数 t 等于式(4.2)的比值，即令

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

则得

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{4.4}$$

这就是**直线的参数方程.** 若记向量 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$，则方程(4.4)又可写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\alpha}t, \tag{4.5}$$

这就是**直线的向量形式方程.**

例 1 已知直线的一般方程为

$$\begin{cases} 2x-3y-z+3=0, \\ 4x-6y+5z-1=0, \end{cases}$$

求它的点向式方程和参数方程.

解 两个平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(2,-3,-1) \quad 与 \quad \boldsymbol{n}_2=(4,-6,5),$$

因此,直线的方向向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}\right)$$

$$=(-21,-14,0)=-7(3,2,0),$$

为求直线上的一个点 M_0,令 $y=0$,解

$$\begin{cases} 2x-z=-3, \\ 4x+5z=1, \end{cases}$$

得 $M_0(-1,0,1)$,因此,直线的点向式方程为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{0},$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2t, \\ z=1. \end{cases}$$

2. 直线与平面的关系

空间一条直线 L 与一个平面 π 之间有平行、垂直、相交等关系,取决于直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.设

$$L:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \quad \boldsymbol{\alpha}=(l,m,n),$$

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0, \quad \boldsymbol{n}=(A,B,C),$$

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{n}$ 为非零向量.

(1) 直线 L 与平面 π 平行的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{n} \quad \text{即} \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}=Al+Bm+Cn=0.$$

特别，直线 L 在平面 π 上的条件，除 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 外还要直线 L 上的一点(譬如(x_0, y_0, z_0))在平面 π 上，即

$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

(2) 直线 L 与平面 π 垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{n} \quad \text{即} \quad \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.$$

(3) L 与 π 相交，设交角为 φ(规定 $0<\varphi\leqslant\pi/2$)，见图 4.24，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 或者 $\frac{\pi}{2}+\varphi$，

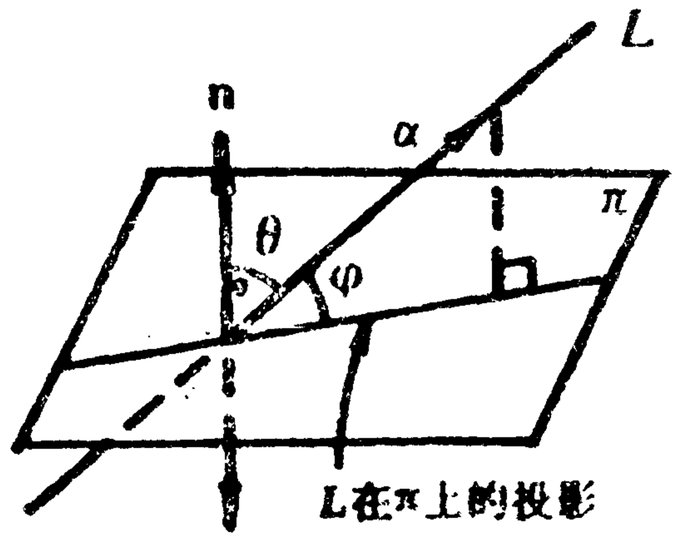


图 4.24

因此，$\sin\varphi=|\cos\theta|$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{n}|}$，则得求 φ 的公式

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

若要求 L 与 π 的交点坐标，可将直线 L 的参数方程代入平面 π 的方程，确定出交点的参数 t，再算出交点坐标。

例 2 设直线 L 与平面 π 的方程为

$$L:\ \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{5}; \quad \boldsymbol{\alpha}=(4,-1,5),$$

$$\pi:\ 3x+y+2z+20=0, \quad \boldsymbol{n}=(3,1,2).$$

求 L 与 π 的交角 φ 和交点坐标。

解 $\sin\varphi=\dfrac{|12-1+10|}{\sqrt{16+1+25}\sqrt{9+1+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。

又将直线的参数方程

$$x=-1+4t, \quad y=2-t, \quad z=1+5t$$

代入平面 π 的方程，得

$$3(-1+4t)+(2-t)+2(1+5t)+20=0,$$

解得 $t=-1$，故交点的坐标为$(-5, 3, -4)$。

3. 直线间的关系

空间两条不同的直线，除平行和相交外，还可能是异面的。设给定两条不同的直线，方程为

$$L_1:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\alpha}_1 t \quad \text{或者} \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{\alpha}_2 t \quad \text{或者} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，$\boldsymbol{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$，$M_i(x_i, y_i, z_i)$，$\boldsymbol{\alpha}_i=(l_i, m_i, n_i)$，$i=1, 2$。

所谓**两条直线的夹角**是指它们的方向向量的夹角（不管它们是否相交）。据向量运算易得以下结果：

(1) $L_1 \perp L_2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0.$$

(2) $L_1 /\!/ L_2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

(3) 若 L_1 与 L_2 不平行，则 L_1 与 L_2 相交的充要条件是三个向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 共面（见图 4.25）$\Leftrightarrow$混合积 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，即

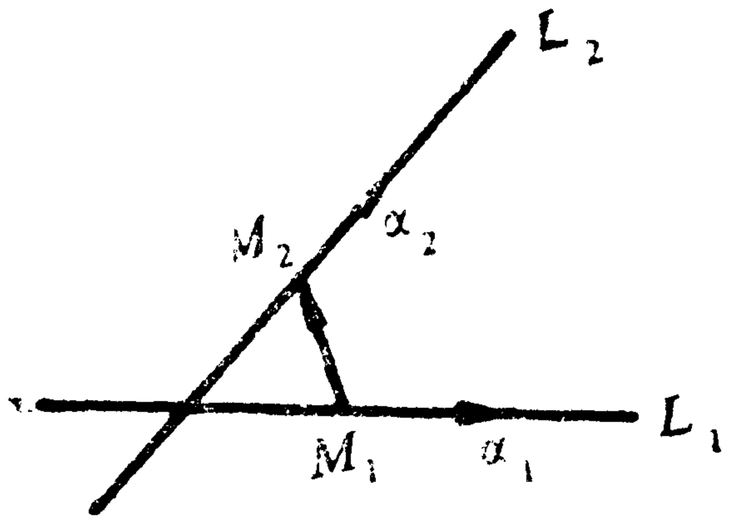


图 4.25

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{4.6}$$

4) 综合2)和3)得到：式(4.6)也是直线 L_1 与 L_2 共面（或者平行，或者相交）的充要条件。因此，$(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\neq 0$ 就是 L_1 与 L_2 异面的充要条件。

4. 距离

1）点到直线的距离

设直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

由图 4.26 可见，点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 L 的距离 d 为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}, \qquad (4.7)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}=(l, m, n)$ 是直线 L 的方向向量.

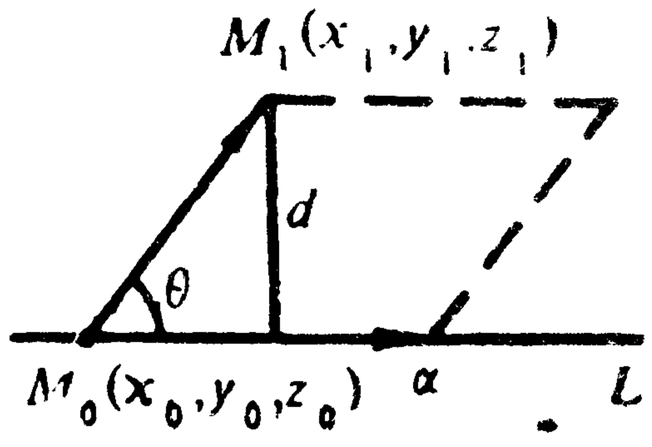


图 4.26

2）两异面直线的距离

一切从直线 L_1 上的点到 L_2 上的点所连线段长度的最小值叫做**直线 L_1 与 L_2 的距离**，这距离就是直线 L_1 与 L_2 的公垂线的长度 d（见图 4.27）. 公垂线的方向向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2$. 任取 $M_1\in L_1$, $M_2\in L_2$, 则 d 就是 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2$ 上的投影的绝对值，即有

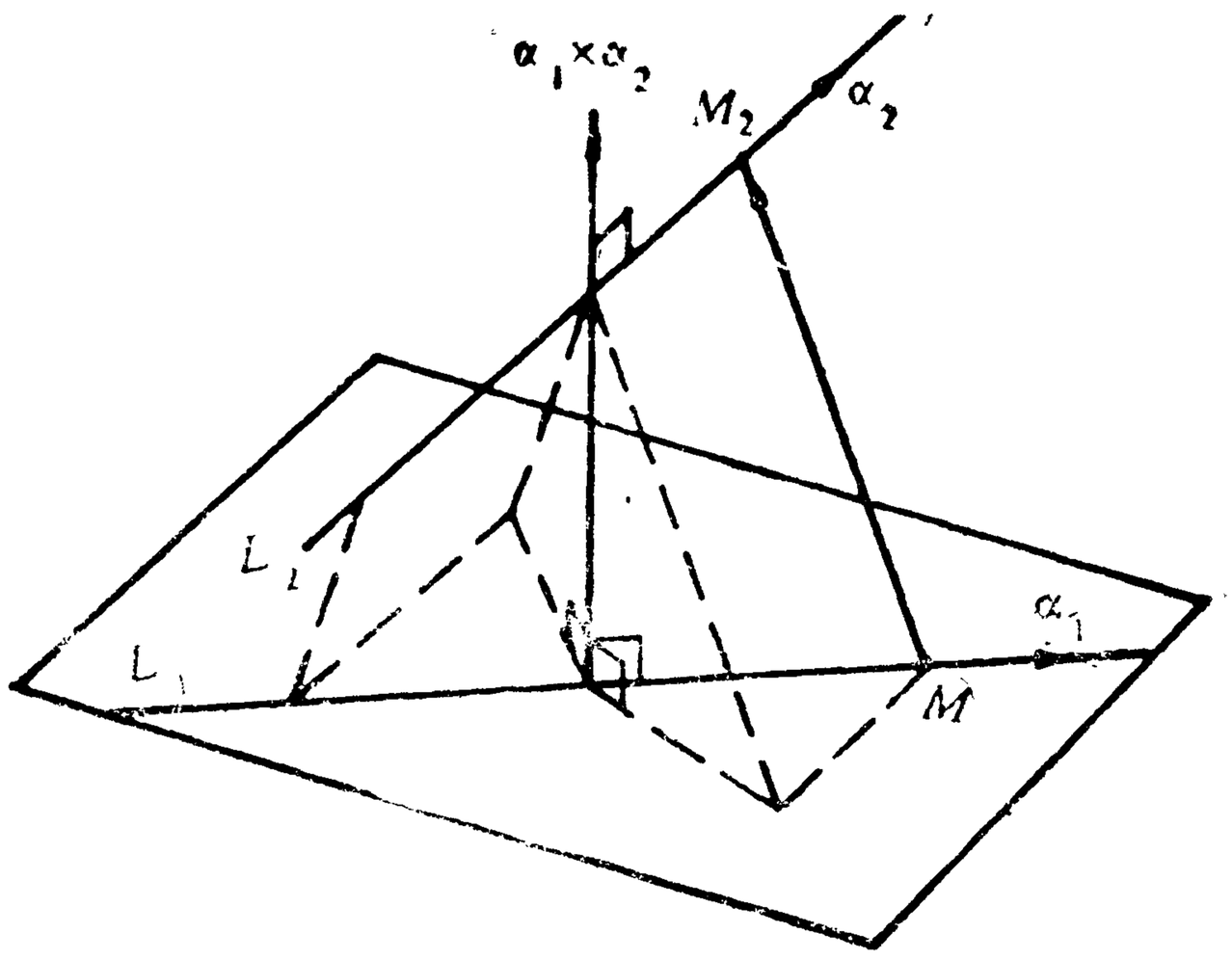


图 4.27

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2)|}{|\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2|}. \tag{4.8}$$

例 3 给定两条直线

$$L_1:\ x-3=y-4=-(z+1),$$

$$L_2:\ \frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{4}=-z,$$

求 L_1 与 L_2 的距离 d 及公垂线的方程.

解 $M_1(3,4,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)$,

$M_2(-4,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,-1)$,

公垂线方向:

$$\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\begin{vmatrix}1&-1\\4&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}\right)=(3,-1,2)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-7,-5,1),$$

据公式(4.8)得

$$d=\frac{|-21+5+2|}{\sqrt{9+1+4}}=\sqrt{14}.$$

下面来求公垂线的方程.

法 1 由公垂线及 L_1 决定的平面 π_1, 过点 $M_1(3,4,-1)$, 其法向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1\times(\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2)=(1,-5,-4),$$

π_1的方程为

$$(x-3)-5(y-4)-4(z+1)=0,$$

即

$$x-5y-4z+13=0.$$

由公垂线及 L_2 决定的平面 π_2, 过点 $M_2(-4,-1,0)$, 其法向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_2\times(\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2)=7(1,-1,-2),$$

π_2 的方程为

$$(x+4)-(y+1)-2z=0 \quad \text{即} \quad x-y-2z+3=0.$$

公垂线是 π_1 与 π_2 交线,其方程为

$$\begin{cases} x-5y-4z+13=0, \\ x-y-2z+3=0. \end{cases}$$

法 2 前面已求得公垂线的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2)$，因此还要求得公垂线上的一点。在法 1 中求得公垂线与 L_1 决定的平面 π_1 后，再去求出 L_2 与 π_1 的交点 P_2 即可。将 L_2 的参数方程

$$x=-4+2\rho,\quad y=-1+4\rho,\quad z=-\rho,$$

代入 π_1 的方程得

$$(-4+2\rho)-5(-1+4\rho)-4(-\rho)+13=0\Rightarrow\rho=1.$$

所以 L_2 与 π_1 的交点为 $P_2(-2,3,-1)$，故得公垂线方程为

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

法 3 公垂线与 L_1，L_2 的交点 P_1，P_2 也可这样求，用 L_1 和 L_2 的参数方程，设公垂线与 L_1 的交点 P_1 的参数为 t，公垂线与 L_2 的交点 P_2 的参数为 ρ，即有

$$P_1(3+t,4+t,-1-t),\quad P_2(-4+2\rho,-1+4\rho,-\rho),$$

因 $\overrightarrow{P_1P_2}\parallel\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2$，故有

$$\frac{-7+2\rho-t}{3}=\frac{-5+4\rho-t}{-1}=\frac{1-\rho+t}{2},$$

由此得到 ρ，t 满足的方程组

$$\begin{cases} 14\rho-4t=22, \\ 7\rho-t=9, \end{cases}$$

可解出 $\rho=1$，$t=-2$，因此交点为 $P_2(-2,3,-1)$，$P_1(1,2,1)$，随便用点 P_1 或者 P_2 及方向向量 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2$ 写出点向式的直线方程就是 L_1 与 L_2 的公垂线方程。

5. 有轴平面束

经过一条固定直线的一切平面的集合叫做一个**有轴平面束**，它们的公共交线叫做此平面束的**轴**。

设已给两个不同的平面

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则经过由 π_1 与 π_2 所确定的平面束的轴 L 的任意一个平面方程可写成以下形式

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,\quad (4.9)$$

其中 $\lambda^2+\mu^2\neq 0$. 实际上,上式可改写成

$$(A_1\lambda+A_2\mu)x+(B_1\lambda+B_2\mu)y+(C_1\lambda+C_2\mu)z+D_1\lambda+D_2\mu=0,$$

如果能证明 x, y, z 的系数不同时为零,则上式是一个含 x, y, z 的一次方程,它代表一个平面. 为此,我们假设

$$A_1\lambda+A_2\mu=0,\quad B_1\lambda+B_2\mu=0,\quad C_1\lambda+C_2\mu=0$$

同时成立,从初等代数知道,此方程组有非零解(即 λ 与 μ 不同时为 0 的解)的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}B_1 & B_2\\ C_1 & C_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}C_1 & C_2\\ A_1 & A_2\end{vmatrix}=0.$$

这是平面 π_1 与 π_2 平行的条件,然而,已给的两个平面 π_1 与 π_2 是不平行的,所以式(4.9)代表一个平面.

另一方面,(1) L 上的点的坐标满足 π_1, π_2 的方程,一定满足方程(4.9),即平面(4.9)过 L; (2) 任何过 L 的平面 π 都可写成式(4.9)的形式,即可找到适当的 λ, μ, 使平面(4.9)与 π 重合. 譬如,若 $M_0(x_0, y_0, z_0)$是在 π 上 L 之外的一点,它也满足式(4.9),即有

$$\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\mu(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0,$$

只要选取

$$\lambda=(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2),$$

$$\mu=-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1),$$

即得过 L 与 M_0 的平面 π 的方程. 因 M_0 不在轴 L 上,不会同时满足 π_1, π_2 的方程,所以 λ, μ 不会同时为零.

因此,取不同的λ和 μ, 由式(4.9)可得到过 L 的一切平面,我

们称方程(4.9)为由平面 π_1, π_2 决定的**平面束方程**. 在求过 π_1 与 π_2 的交线的未知平面时,用平面束方程是特别方便的.

例 4 求平面 π, 使它通过直线

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

并且垂直于 xOy 平面. (当 L 不垂直于 xOy 平面时, π 与 xOy 平面的交线是直线 L 在 xOy 平面上的**投影**, π 称为**投影平面**).

解 设过 L 的平面方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

它的法向量

$$\boldsymbol{n}=(\lambda A_1+\mu A_2,\ \lambda B_1+\mu B_2,\ \lambda C_1+\mu C_2)$$

应该与 xOy 平面的法向量 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 垂直,则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0\Rightarrow\lambda C_1+\mu C_2=0.$$

当 L 不垂直于 xOy 平面时, C_1 与 C_2 不同时为 0,可取 $\lambda=C_2$, $\mu=-C_1$, 则所求的平面 π 的方程为

$$C_2(A_1x+B_1y+C_1y+D_1)-C_1(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即

$$(C_2A_1-C_1A_2)x+(C_2B_1-C_1B_2)y+C_2D_1-C_1D_2=0.$$

也就是说,要求直线 L 到 xOy 平面的投影平面,只要将 π_1, π_2 的方程联立消去 z 即得. 同样, 要求 L 到 yOz 平面或 xOz 平面的投影平面,只要将 π_1, π_2 的方程联立消去 x 或 y 即可得到.

§4.4 习 题

1. 求直线方程.

(1) 过点(1, 0, −2), 垂直于平面 $4x+2y-3z=0$;

(2) 过两点(3, 2, −1)与(2, −3, 4).

2. 把下列直线方程化为点向式与参数式方程.

(1) $\begin{cases}4x-5y+3z-3=0\\4x-5y+z+9=0\end{cases}$, (2) $\begin{cases}x+2y+6z-5=0\\3x-2y-10z-7=0.\end{cases}$

3. 自一点(1, 2, −1)到平面 $3x-5y+4z-5=0$ 作垂线, 求垂线长,垂

线方程，垂足坐标。

4. 求点$(-1, 2, 3)$到直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$$

的距离。

5. 求点$(5, 4, 2)$到直线

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$$

的距离和垂足坐标。

6. 求直线 $\frac{x}{2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z-4}{6}$ 和平面 $6x+15y-10z=0$ 的交角。

7. 求下列各对直线间的关系(指出平行、垂直或夹角)。

(1) $\begin{cases}2y+z=0,\\3y-4z=7,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}5y-2z=8,\\4y+z=4;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x+y-z=0,\\y+z=1,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-y=1,\\x-3y+z=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-2z+1=0,\\y-z-3=0,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}6x+y-1=0,\\2y+3z-1=0.\end{cases}$

8. 求证下列各对直线相交，并求交点坐标及包含它们的平面方程。

(1) L_1: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{3-5}{5}$，与 L_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{5}$；

(2) L_1: $\begin{cases}2x-y+3z+3=0,\\x+10y-21=0,\end{cases}$ 与 L_2: $\begin{cases}2x-y=0,\\7x+z-6=0.\end{cases}$

9. 求出下列各对直线间的距离和公垂线方程。

(1) $\frac{x}{1}=\frac{y-11}{-2}=\frac{z-4}{1}$，$\frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=\frac{z}{1}$；

(2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-1}$；$\frac{x+6}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{-1}$。

10. 求下列平面方程。

(1) 过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ 且平行于 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$；

(2) 过直线 $\begin{cases}2x-y-2z+1=0,\\x+y+4z-2=0,\end{cases}$ 并在y轴和z轴上有相同的非零截距。

11. 求直线 $\begin{cases}x+y-z-3=0,\\x+4y-2z-8=0,\end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影方程。

12. 求直线 L: $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0, \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程。

13. 求下列直线方程。

(1) 过点$(2, -1, 3)$与$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}$垂直相交；

(2) 过点$(1, 0, -2)$与平面 $3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$ 相交。

(3) 过点 $P_0(11, 9, 0)$，与

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \quad 和 \quad \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

都相交。

§4.5 几种常见的曲面

1. 曲面、曲线的方程

在空间直角坐标系下，如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上的任一点的坐标都满足 $F(x, y, z)=0$；

(2) 不在 S 上的点的坐标都不满足 $F(x, y, z)=0$（或满足 $F(x, y, z)=0$ 的点(x, y, z)都在 S 上）；

则称 $F(x, y, z)=0$ **是曲面 S 的方程**，而称曲面 S 是**方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形**。

例 1 求以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$为球心，R 为半径的球面方程。

解 设 $M(x, y, z)$是所求球面上的一点，则

$$|M_0M|=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{5.1}$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程。反之，若有点 $M(x, y, z)$满足方程(5.1)，则 $|M_0M|=R$，点 M 必在球面上。所以，方程(5.1)就是所求的球面方程。

特别，若球心在原点(0，0，0)，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

注 由方程

$$x^2+y^2+z^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

表示的曲面都是球面，通过配方就可将它化为标准形式

$$(x+b_1)^2+(y+b_2)^2+(z+b_3)^2=b_1^1+b_2^2+b_3^2-c,$$

与式(5.1)比较知道，球心为$(-b_1，-b_2，-b_3)$，半径

$$R=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2-c}\ .$$

(当$b_1^2+b_2^2+b_3^2-c=0$时，球缩成一点；当$b_1^2+b_2^2+b_3^2-c<0$时是虚球.)

例 2 给定两点$A(0，-2，4)$与$B(2，1，3)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解 所求平面就是与A，B等距离的点的轨迹. 设$M(x，y，z)$是所求平面上的一点，则

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2},$$

两边平方后化简得方程

$$2x+3y-z+3=0.$$

反之，满足上述方程的点必在AB的垂直平分面上，所以它就是所求平面的方程.

例 3 求以y轴为轴，半径为r的圆柱面方程.

解 设$M(x，y，z)$是所求圆柱面上任一点，则它到y轴的距离是r，即有

$$\sqrt{x^2+z^2}=r \quad 即 \quad x^2+z^2=r^2.$$

反之，满足$x^2+z^2=r^2$的点必在该圆柱面上，所以这就是所求的圆柱面.

在[illegible]中把直线看作是两个平面的交线，一般，空间曲线也可看[illegible]个曲面的交线. 两个曲面的方程联立起来就表示这条

交线. 例如,

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

表示一条曲线 C, 称为**曲线 C 的一般方程**.因为通过曲线 C 的曲面有无限多个,所以在其中任意取两个,把它们的方程联立起来所得的方程组都表示曲线 C. 例如,方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = a \quad (a < R), \end{cases}$$

表示球心在原点,半径为 R 的球面与平面 $y = a$ 的交线,是一个在 $y = a$平面上的圆,圆上的任一点的坐标满足:

$$y = a \quad 和 \quad x^2 + z^2 = R^2 - a^2.$$

因此,它也可作为圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2 - a^2$ 与平面 $y = a$ 的交线 (见图 4.28), 即写成方程组

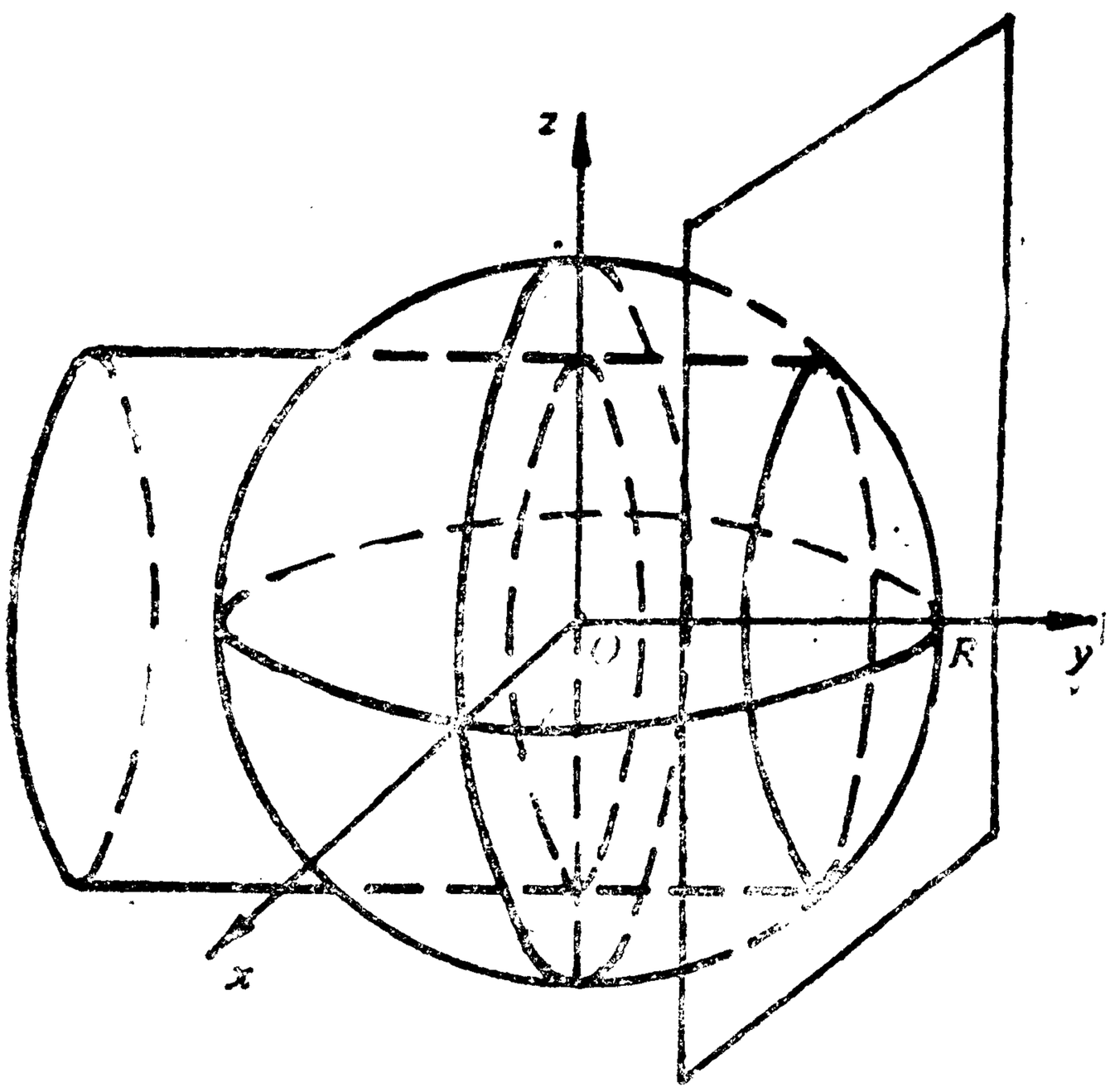


图 4.28

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2, \\ y = a. \end{cases}$$

特别,曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与三个坐标面的交线方程分别为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

和 $$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

2. 柱面方程

1) 母线平行坐标轴的柱面

一动直线 L 保持与定直线 l 平行，沿一条曲线 C 平行移动所得的曲面叫做**柱面**，曲线 C 叫做柱面的**准线**，直线 L 叫做柱面的**母线**.

如果取准线 C 在 xOy 平面上，方程为

$$f(x, y) = 0,$$

母线为平行于 z 轴的直线(见图 4.29)，则这个柱面的方程就是

$$f(x, y) = 0.$$

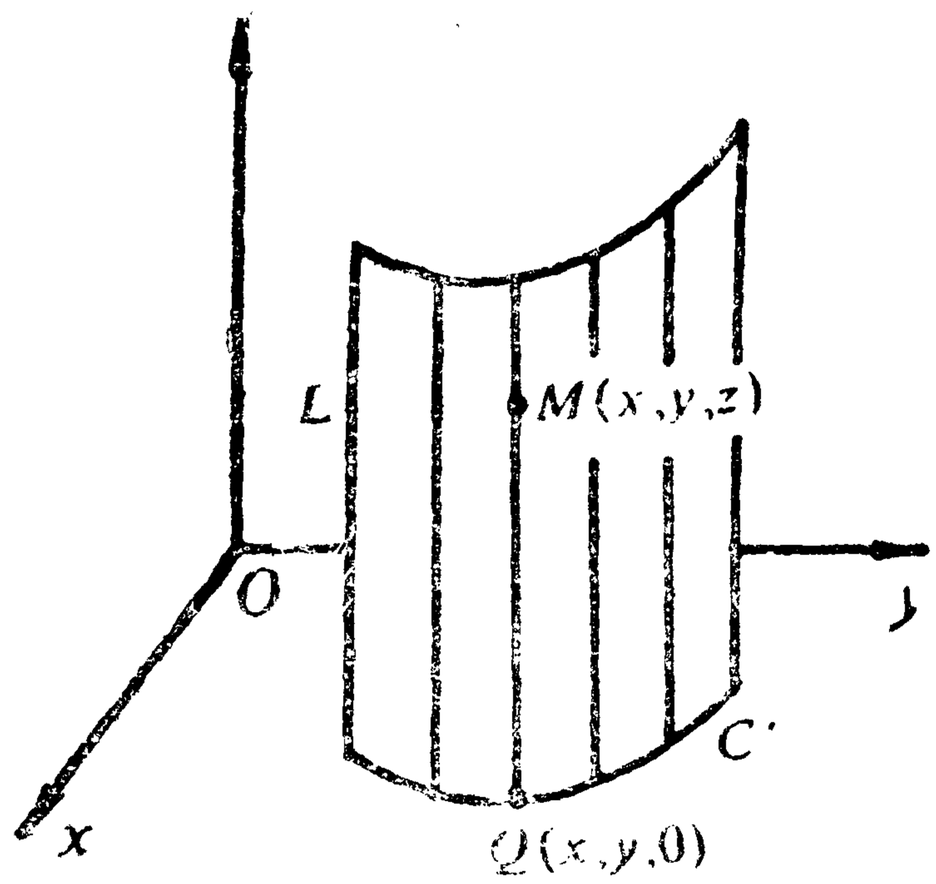


图 4.29

这是因为，对柱面上的任一点 $M(x, yz,)$，过 M 作直线平行于 z 轴，这直线就是过点 M 的母线，直线上的任何点的 x，y 坐标都相同，只有 z 坐标不同，它与 xOy 平面的交点 $Q(x, y, 0)$必在曲线 C 上，点 Q的 x，y 坐标满足 $f(x, y) = 0$，也即 $M(x, y, z)$满足 $f(x, y) = 0$；反之，满足 $f(x, y) = 0$ 的点 $M(x, y, z)$一定在过 $Q(x, y, 0)$的母线上，也即在柱面上.

因此，与“若平面方程中不出现某变元，该平面就平行于某轴”的结论一样，若三元方程中不出现某个变元，它就表示母线平行于某轴的柱面. 例如，

$$g(y, z) = 0$$

的图形是母线平行于 x 轴的柱面；

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的图形是母线平行于 z 轴的椭圆柱面；

$$x^2=2z$$

是母线平行于 y 轴的抛物柱面的方程；而平面

$$y=z$$

也可看成是母线平行于 x 轴的柱面。

2）投影柱面

在上节末讲过，求两平面的交线对 xOy 平面的投影平面，只要将两平面的方程联立消去 z 即得。现在，对空间曲线

$$L:\begin{cases}f(x,y,z)=0,\\ g(x,y,z=0,\end{cases}\tag{5.3}$$

讨论由方程组(5.3)消去 z 后所得的方程

$$h(x,y)=0\tag{5.4}$$

代表什么曲面。

首先，方程(5.4)中不出现 z，它表示母线平行于 z 轴的柱面。其次，式(5.4)是由式(5.3)消去 z 得到的，因此，当 (x,y,z) 满足(5.3)时，(x,y) 必满足(5.4)，这说明曲线 L 上的点都在由方程(5.4)表示的柱面上。所以，柱面(5.4)可看成是以 L 为准线，母线平行于 z 轴(即垂直于 xOy 平面)的柱面，这个柱面叫做曲线 L 到 xOy 平面的**投影柱面**。而投影柱面与 xOy 平面的交线

$$\begin{cases}h(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$$

就是空间曲线 L 在 xOy 平面上的**投影曲线**(或称**投影**)。

同理，由方程组(5.3)消去 x 或者 y，也可得到曲线 L 在 yOz 平面或 xOz 平面上的投影为

$$\begin{cases}h_1(y,z)=0,\\ x=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}h_2(x,z)=0,\\ y=0.\end{cases}$$

例 4　已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

与

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1,$$

它们的交线 C 是一圆，求交线 C 对 xOz 平面的投影柱面及在 xOy 平面上的投影.

解 由两球面方程消去 y，得到方程

$$x+z=1$$

这就是交线 C 对 xOz 平面的投影柱面.它是一个平面，说明圆C在平面 $x+z=1$ 上，故圆 C 的方程也可写成

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+z=1. \end{cases} \tag{5.5}$$

再从式(5.5)消去 z，可得圆 C 在 xOy 平面上的投影方程为椭圆

$$\begin{cases} 4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+2y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

3. 旋转面

平面上一条连续曲线绕该平面的一条定直线旋转一周所得的曲面，叫做**旋转面**(即旋转体的侧表面)。这条直线叫做旋转面的**轴**。下面来求 xOy 平面上的曲线 C

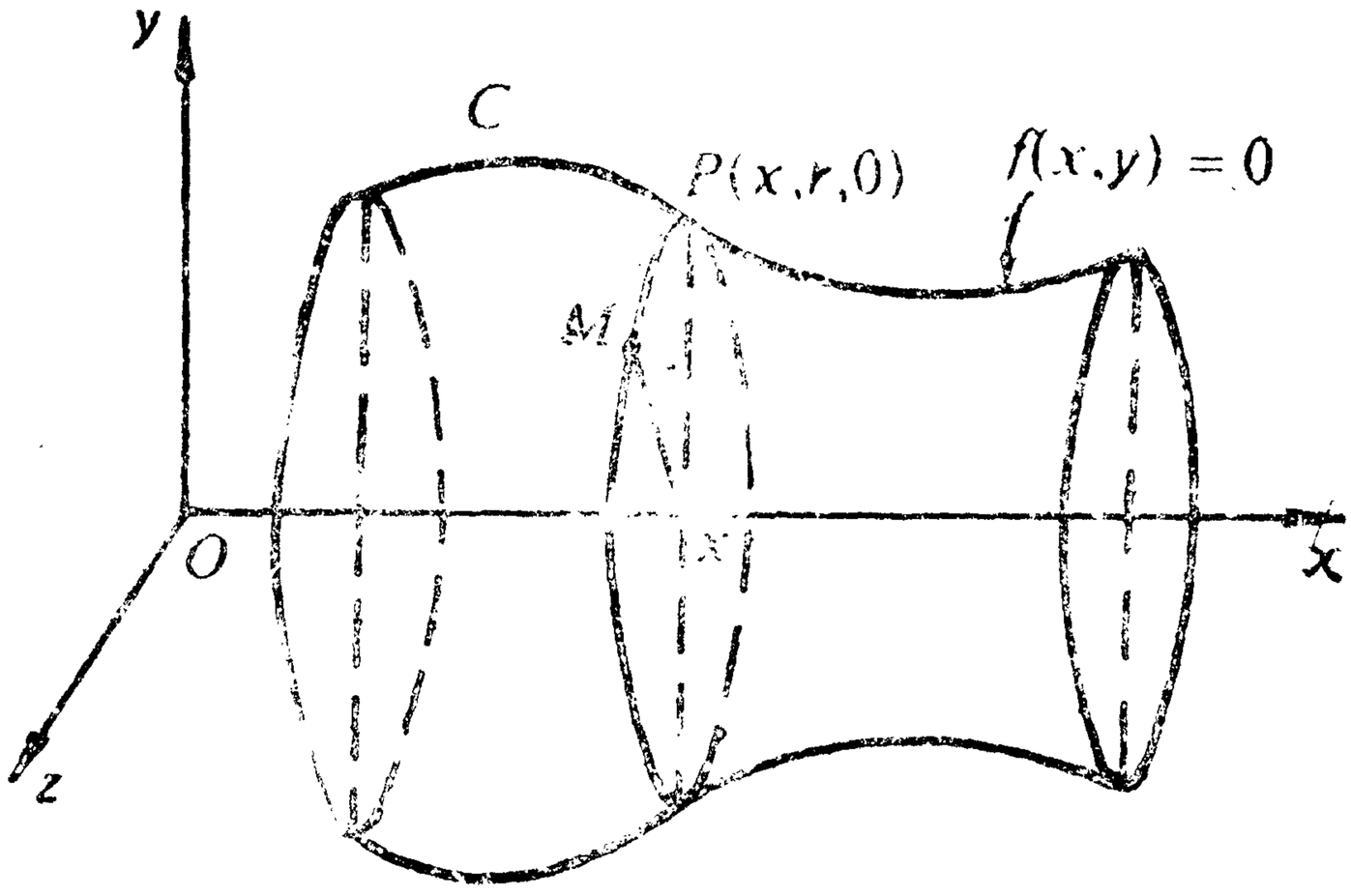


图 4.30

$$C:\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所成的旋转面方程(见图 4.30)。

在旋转面上任取一点 $M(x,y,z)$，过 M 作一平面垂直 x 轴，它与旋转面的交线是一圆，圆心是点$(x,0,0)$，半径$r=\sqrt{y^2+z^2}$。这个圆与曲线 C 的交点是 $P(x,r,0)$，因此，这个圆可看成是点 P 在旋转时所走的轨线，故(x,r)必满足

$$f(x,r)=0,$$

即

$$f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

这就是所求的旋转面的方程。也就是说，要求 xOy 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程，只需将 y(确切地说是$|y|$)换为$\sqrt{y^2+z^2}$ 即可。

同理，要求 C 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程，只需将$|x|$换为 $\sqrt{x^2+z^2}$ 即可，即是

$$f(\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

例如，将 xOy 平面的抛物线

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转得旋转抛物面

$$y^2+z^2=4x.$$

将椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 y 轴旋转得旋转椭球面

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

同理，将 yOz 平面上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

分别绕 z 轴和 y 轴旋转所得的旋转面是旋转双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{和} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1.$$

而直线 $\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z \quad \text{即} \quad x^2+y^2 = z^2.$$

这是以 z 轴为对称轴，顶点在原点，半顶角为 $\pi/4$ 的圆锥面方程。一般，以 z 轴为轴，顶点在原点，半顶角为 α 的圆锥面上的点 $M(x, y, z)$ 满足

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|},$$

见图 4.31，故这种圆锥面的方程为

$$x^2+y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\alpha. \tag{5.6}$$

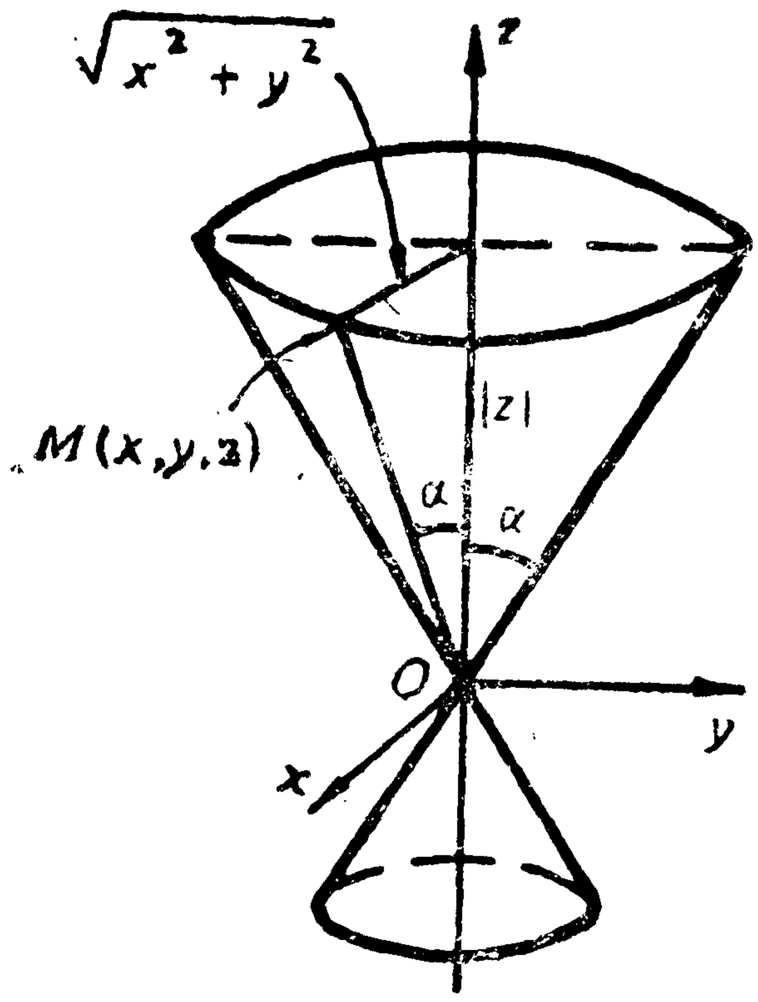


图 4.31

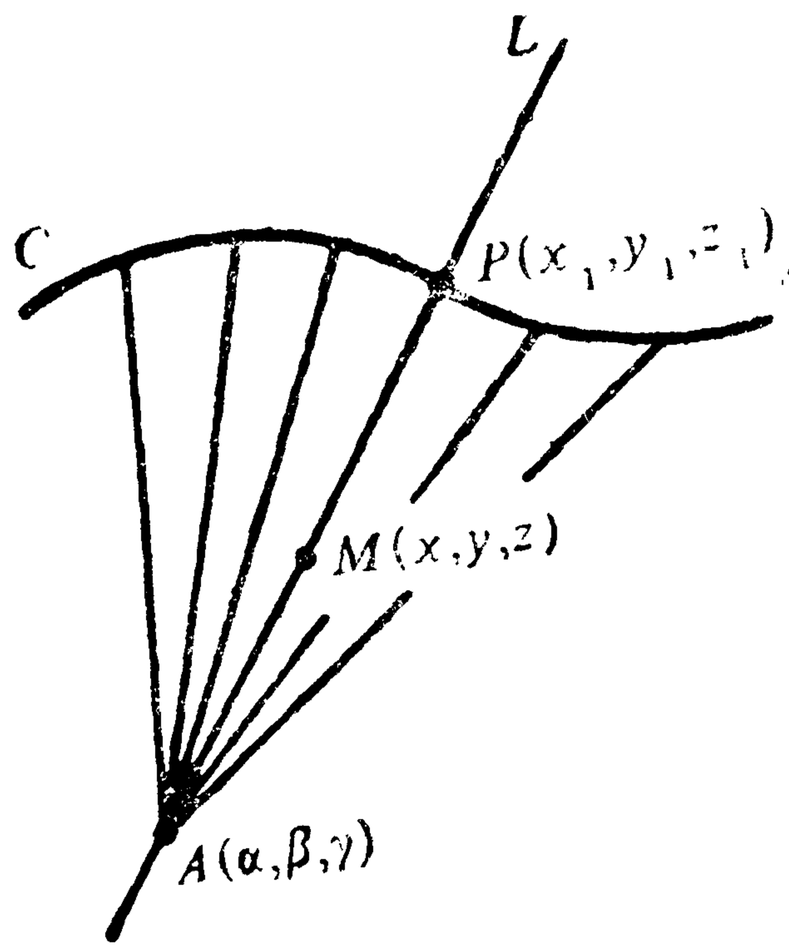


图 4.32

4. 锥 面

已知一定点 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 和与 A 不共面的一条曲线 C，由 A 与

C 上的点的连线 L 所构成的曲面称为**锥面**。A 叫做**顶点**，C 叫做**准线**，L 叫做**母线**，见图 4.32。

下面来求锥面方程。设准线 C 的方程为

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

对锥面上的任一点 $M(x, y, z)$，据定义，直线 AM 与 C 必相交于一点，设为 $P(x_1, y_1, z_1)$，因 $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AM}$，因此有

$$\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} = \frac{y_1 - \beta}{y - \beta} = \frac{z_1 - \gamma}{z - \gamma} = t,$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + t(x - \alpha), \\ y_1 = \beta + t(y - \beta), \\ z_1 = \gamma + t(z - \gamma). \end{cases} \tag{5.7}$$

又因为 P 在 C 上，所以有

$$\begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ g(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

将式(5.7)代入(5.8)得到

$$\begin{cases} f[\alpha + t(x - \alpha), \beta + t(y - \beta), \gamma + t(z - \gamma)] = 0, \\ g[\alpha + t(x - \alpha), \beta + t(y - \beta), \gamma + t(z - \gamma)] = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

由式(5.9)消去 t 就得到所求的锥面方程。

特别，当顶点 A 是原点 $O(0, 0, 0)$时，锥面方程将由

$$\begin{cases} f(tx, ty, tz) = 0, \\ g(tx, ty, tz) = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

消去 t 得到。

例 5 求顶点在原点，准线为

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 3z, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

的锥面方程。

解 将 C 的方程中的(x, y, z)换为(tx, ty, tz)，得到

$$\begin{cases}(tx)^2+(ty)^2=3tz,\\ tx+ty+tz=3,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}t(x^2+y^2)=3z,\\ t(x+y+z)=3,\end{cases}$$

消去 t 即得所求锥面方程为

$$x^2+y^2-z^2-xz-yz=0.$$

注 对顶点在原点的锥面，如果 $M(x, y, z)$ 在锥面上，则直线 OM 在锥面上，而点 (tx, ty, tz) 在直线 OM 上，所以点 (tx, ty, tz) 亦在锥面上。即顶点在原点的锥面方程

$$F(x, y, z)=0$$

一定是齐次的方程；反之，对 x, y, z 齐次的方程总表示一个顶点在原点的锥面。

5. 直角坐标变换　常用二次曲面的图形

空间中平面的方程是一次的，方程是二次的曲面叫做二次曲面，它的方程是三元二次方程

$$\begin{aligned}&a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\\&+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.\end{aligned}\tag{5.11}$$

正如平面上的二次曲线一样，二次曲面在曲面中占有重要的地位。和平面上的二次曲线一样，也可以通过坐标系的平移消去一次项，作坐标系的旋转消去交叉项(指 xy, xz, yz 项)。下面先简单讨论坐标变换，再讨论二次曲面标准方程的图形。

1) 直角坐标变换

(1) 坐标系的平移

将空间直角坐标系 O-xyz 平移到新坐标系 O'-$x'y'z'$。已知新坐标系原点 O' 在旧坐标系中的坐标为 $O'(a, b, c)$，空间任一点 M 在旧坐标系的坐标为 (x, y, z)，在新坐标系中的坐标为 (x', y', z')，则有(见图 4.33)

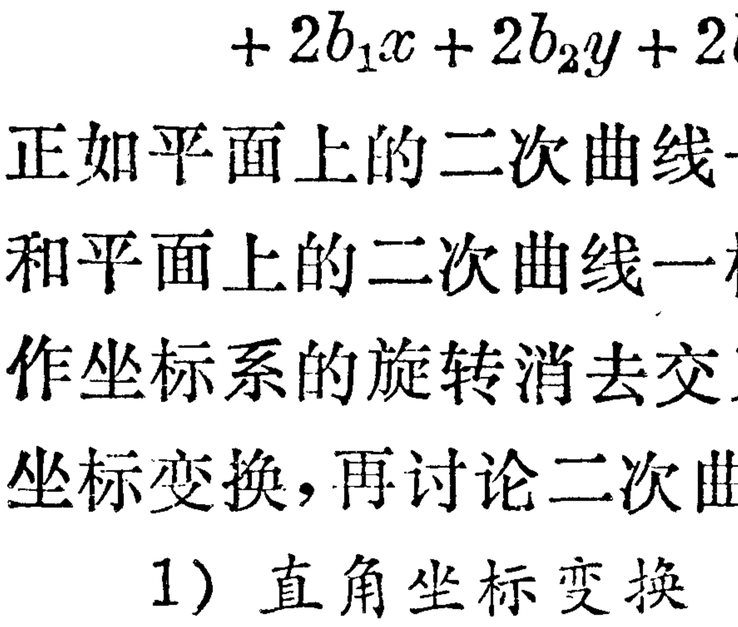


图　4.33

$$\overrightarrow{OO'}=(a, b, c),$$

$$\overrightarrow{OM}=(x, y, z),$$

$$\overrightarrow{O'M} = (x', y', z'),$$

因为

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

所以有

$$(x, y, z) = (a + x', b + y', c + z'),$$

由此即得平移变换公式

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c. \end{cases} \tag{5.12}$$

例 6　利用平移，消去曲面方程

$$x^2 + y^2 - 5z^2 - 2x - 4y + 30z - 40 = 0$$

中的一次项.

解　将所给方程配方得

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5(z-3)^2 = 0,$$

平移坐标系，使新原点落在点(1, 2, 3)上，则

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2, \quad z = z' + 3,$$

因而方程简化为

$$x'^2 + y'^2 = 5z'^2,$$

据式(5.6)便知道这是一个圆锥面的方程.

(2) 坐标系的旋转

原点不动，将直角坐标系 O-xyz 转动到新坐标系 O-$x'y'z'$.设旧系的基向量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，新系的基向量为 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$，见图 4.34. 已知新旧坐标轴的夹角为

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

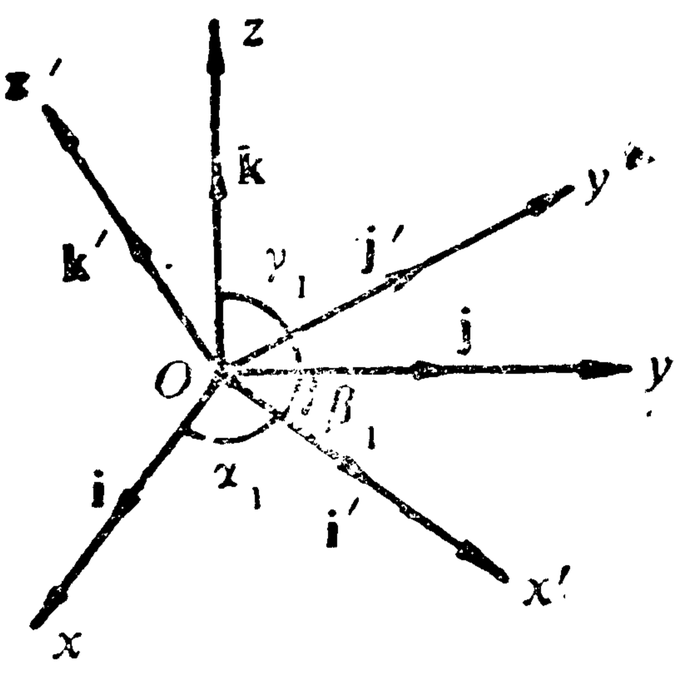


图　4.34

则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}, \end{cases} \tag{5.13}$$

注意，式(5.13)中出现了九个参数(方向余弦)，实际上只有三个参数是独立的，因为它们满足以下六个方程

$$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}' = 1,$$
$$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}' = 0,$$

它反映刚体绕定点运动有三个自由度.

对空间任一点 M，它在旧系的坐标为(x, y, z)，在新系的坐标为(x', y', z')，则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \\ &= x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}) \\ &\quad + y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}) \\ &\quad + z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}) \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} \\ &\quad + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

由此得到旋转变换公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{5.14}$$

也可写成

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{5.15}$$

最简单的旋转变换是绕某坐标轴旋转，对绕 z 轴的旋转，式(5.13)，(5.14)变成

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j}' = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \\ z = z', \end{cases}$$

通过绕 z 轴的旋转变换，可以消去方程中的 xy 项（与平面解析几何一样）。例如，对方程

$$z = 2xy$$

可作绕 z 轴旋转 $\theta = \pi/4$ 的变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{4} - y'\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = x'\sin\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ z = z', \end{cases}$$

将它变为没有 $x'y'$ 项的方程

$$z' = x'^2 - y'^2.$$

对二次曲面方程，当没有交叉项时，用平移坐标系可使一次项消失；当三个交叉项只出现一项时，用绕某坐标轴的旋转变换可使这一交叉项消失；当交叉项出现二项或三项时，这是最复杂的情况，留待线性代数（第 13 章）中去处理。

2）常用二次曲面的图形

下面用一些定性讨论和“平行截口法”来讨论五种二次曲面的图形。所谓“平行截口法”是指用平行于坐标平面的一族平面去截曲面，由所得的一族截线形状来描绘曲面的大致形状。

（1）椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$

因方程中 x、y、z 都以平方形式出现，所以图形关于坐标平面、坐标轴和原点都是对称的，有轴和顶点。

又因方程是三个平方之和等于 1，因此，

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c.$$

说明曲面在由平面 $x = \pm a$，$y = \pm b$，$z = \pm c$ 所围成的长方体内，

是有界曲面。

用平面 $z=h(0\leqslant h\leqslant c)$ 去截曲面，得截线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

它是 $z=h$ 平面上中心在 z 轴的一个椭圆，其半轴长

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad 和 \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

随 $|h|$ 的增大而减小，即截口椭圆随 $|h|$ 从 0 增到 c 而由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 逐渐缩小到一点 $(0,0,c)$。

再用平面 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 去截曲面也得到类似的结果。因此，可画出椭球面的大致图形如图 4.35 所示，它是一个闭曲面。当 a，b，c 三个中有二个相等时，是旋转椭球面，当 $a=b=c$ 时变成球面。

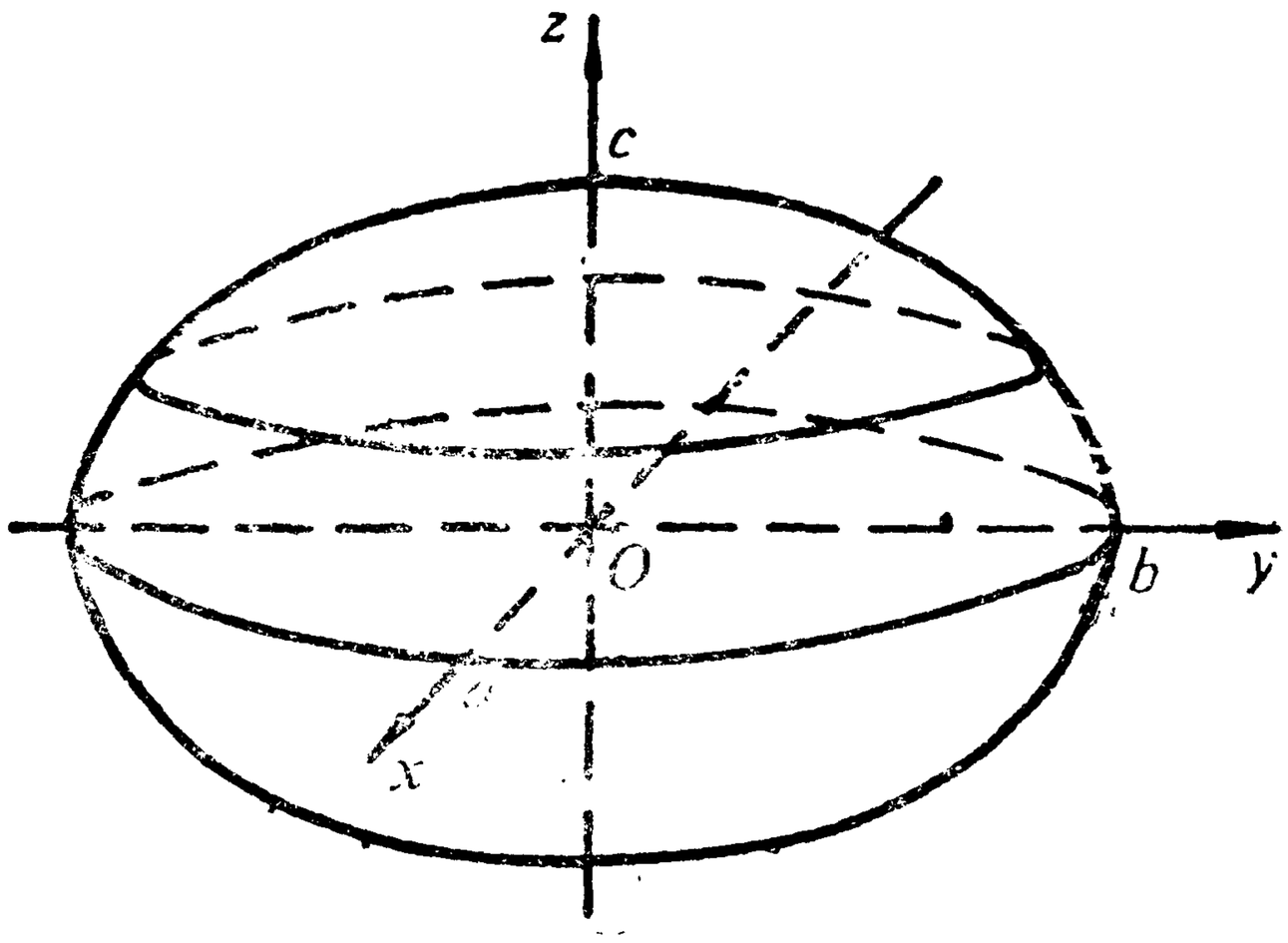


图 4.35　椭球面

(2) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0).$$

显然，三个坐标平面都是它的对称平面，三条坐标轴都是它的对称轴，坐标原点是它的对称中心。

它与三坐标面的交线分别是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

用平面 $z=h$ 去截曲面，得截线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

它是 $z=h$ 平面上中心在 z 轴的一个椭圆，其半轴长

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\quad 和\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

随 $|h|$ 增大而无限增大，因此曲面无界，$h=0$ 时的截口最小，截线是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

故在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内无图形.

用平面 $y=y_0$ 去截曲面，得截线是双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_0^2}{b^2},\\ y=y_0.\end{cases}$$

当 $|y_0|<b$ 时，截口是以 x 轴为实轴的双曲线；当 $|y_0|>b$ 时，截口是以 z 轴为实轴的双曲线；当 $|y_0|=b$ 时，截口是两条相交于点 $(0,\pm b,0)$ 的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=\pm b.\end{cases}$$

用平面 $x=x_0$ 去截曲面的讨论与上类似. 这个曲面的大致形状如图 4.36 所示. 当 $a=b$ 时，曲面是旋转单叶双曲面.

(3) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\quad (a,b,c>0).$$

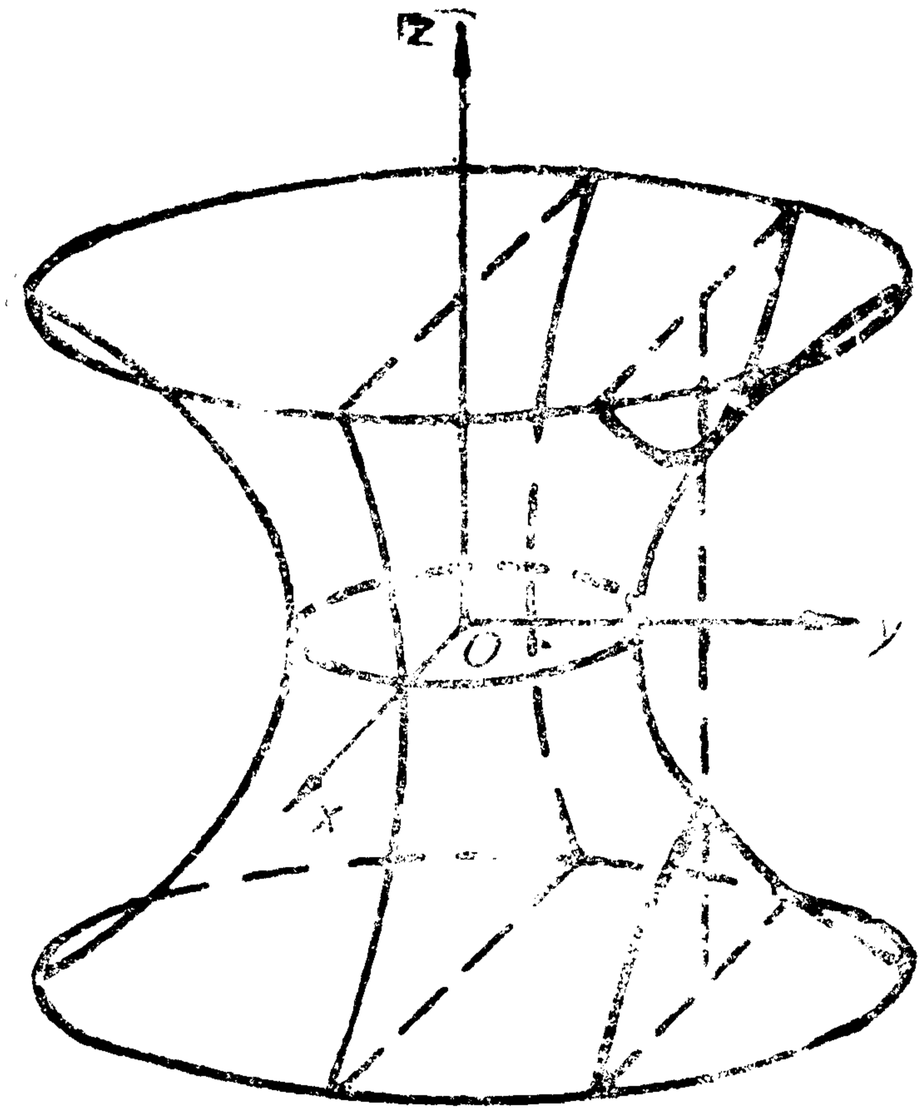


图 4.36　单叶双曲面

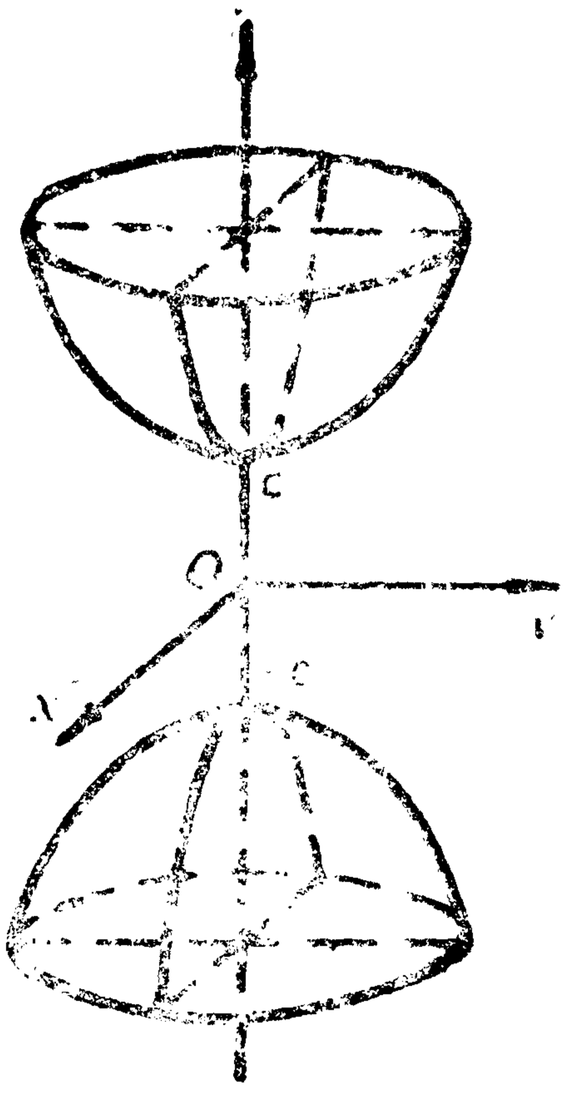


图4.37　双叶双曲面

显然它也对三个坐标平面、坐标轴及原点对称。因为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1\geqslant 0,$$

所以图形在$|z|\geqslant c$区域。

用平面$z=h(|h|\geqslant c)$去截曲面，得截线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h\end{cases}$$

是椭圆，其半轴随$|h|$增大而无限增大，所以曲面无界。

用平面$x=x_0$或$y=y_0$去截均得实轴为z轴的双曲线。其图形如图 4.37 所示。当$a=b$时，是旋转双叶双曲面。

(4) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\quad(a,b>0).$$

xOz平面和yOz平面是它的对称平面，它们的交线z轴是抛物面的轴，轴与抛物面的交点叫做顶点。$z\geqslant 0$，图形在xOy平面上方。

曲面与坐标平面 $x=0$ 和 $y=0$ 的交线分别是抛物线

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=2z,\\ x=0,\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=2z,\\ y=0.\end{cases}$$

用平面 $z=h\geqslant 0$ 去截曲面，截线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2h,\\ z=h.\end{cases}$$

其半轴随 h 增大而无限增大，所以曲面是无界的。

用平面 $x=x_0$ 去截曲面，截线是抛物线

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=2\left(z-\dfrac{x_0^2}{2a^2}\right),\\ x=x_0,\end{cases}$$

对不同的 x_0，所截得的抛物线的形状都与抛物线 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ x=0\end{cases}$ 相同，这是因为它们的焦参数都等于 b^2，因此，椭圆抛物面可看成是由一条抛物线平移而成，抛物线的顶点 $\left(x_0,\ 0,\ \dfrac{x_0^2}{2a^2}\right)$ 移动的轨迹是

$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{2a^2},\\ y=0,\end{cases}$$

就是抛物面与 $y=0$ 平面的交线，其图形如图4.38所示。当 $a=b$ 时是旋转抛物面。

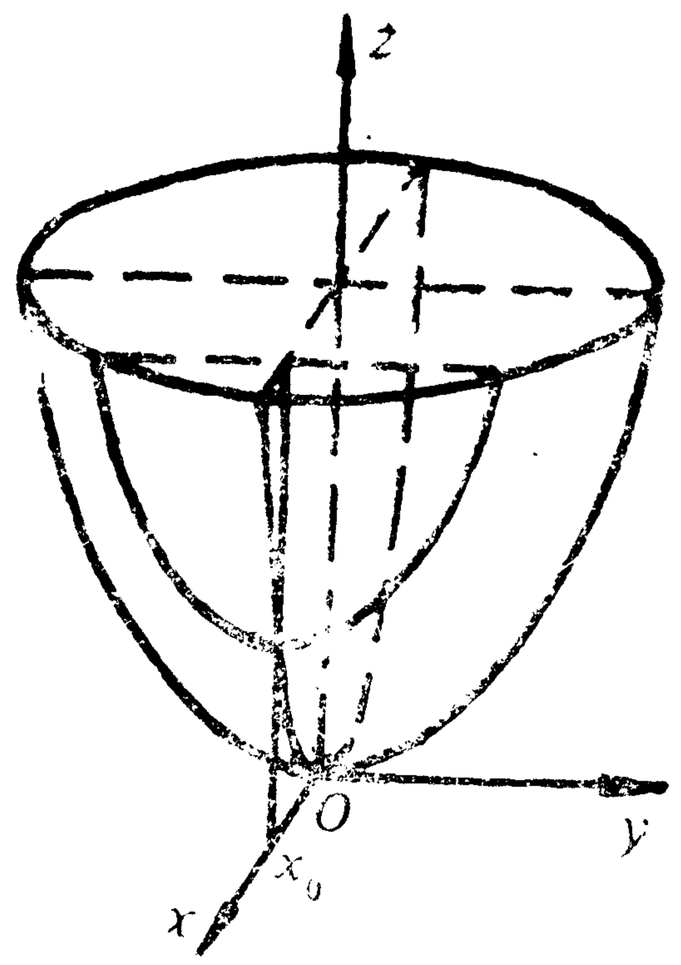


图 4.38　椭圆抛物面

(5) 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\quad(a,\ b>0).$$

显然，它有两个对称平面 $x=0$ 和 $y=0$，z 轴是它的对称轴，曲面无界。

它与坐标面 $z=0$ 的交线是两条相交于原点的直线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0, \\ z=0, \end{cases}$$

与坐标平面 $x=0$ 和 $y=0$ 的交线分别是抛物线

$$\begin{cases} y^2=-2b^2z, \\ x=0, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x^2=2a^2z, \\ y=0. \end{cases}$$

用平面 $z=h(\neq 0)$ 去截，得双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ha^2}-\dfrac{y^2}{2hb^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

当 $h>0$ 时，实轴是 x 轴；$h<0$ 时，实轴是 y 轴。

用平面 $x=x_0$ 去截，截线

$$\begin{cases} y^2=-2b^2\left(z-\dfrac{x_0^2}{2a^2}\right), \\ x=x_0 \end{cases}$$

是开口朝下的抛物线，焦参数都是 b^2。用平面 $y=y_0$ 去截，截线

$$\begin{cases} x^2=2a^2\left(z+\dfrac{y_0^2}{2b^2}\right), \\ y=0 \end{cases}$$

是开口朝上的抛物线，且是一族经过平移彼此可以重合的抛物线。

双曲抛物面的形状见图4.39，象马鞍，故亦称它为马鞍面。在第1)段中，曲面 $z=2xy$ 经过绕 z 轴旋转 $\pi/4$ 的变换变成 $z'=x'^2-$

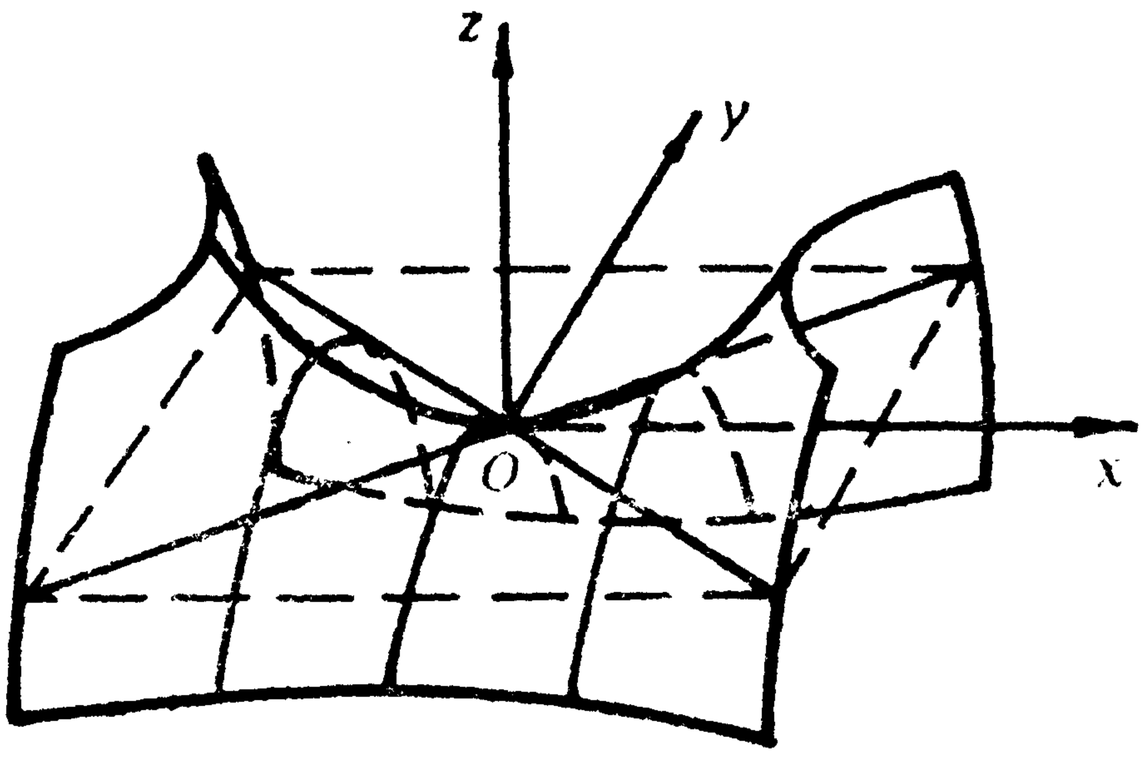


图 4.39　双曲抛物面

y'^2，可知曲面 $z=2xy$ 的图形是马鞍面。

§4.5 习　　题

1．求以点(2，1，-3)为球心，且通过坐标原点的球面方程。

2．求下列球面的中心与半径。

(1) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$，

(2) $x^2+y^2+z^2+4x-5=0$。

3．求与坐标原点 O 及点 $B(2,3,4)$的距离之比为1:2的点的轨迹，它是什么曲面？

4．一动点 M 到原点的距离是3，它到点 $A(2,0,0)$和 $B(1,1,0)$的距离相等，求 M 的轨迹方程，并指出其图形是什么。

5．求半径为2，对称轴为直线

$$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

的圆柱面方程。

6．分别求母线平行于 y 轴、z轴，准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=9,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$$

的柱面方程。

7．求下列曲线在三个坐标面上的投影。

(1) $\begin{cases}y^2=2xz,\\ x+y+z=1,\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}-\dfrac{z^2}{4}=1,\\ y=2\sqrt{3}\,z.\end{cases}$

8．求下列圆的中心和半径。

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,\\ 2x+2y+z+1=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2+y^2-\dfrac{5}{4}z^2=0.\end{cases}$

9．求将圆 $\begin{cases}x^2+y^2-4x+3=0,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得的圆环面方程。

10．求以原点为顶点，以下列曲线为准线的锥面方程。

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2x-2=0,\\ x+y+z=1,\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z. \end{cases}$

11. 求到一定点和一定平面等距离的点的轨迹，指出它是什么曲面。

12. 画出下列曲面的图形。

(1) $x^2-4z^2=16$，　　(2) $x^2-y^2-\dfrac{z^2}{4}=0$，

(3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{1}=1$，　　(4) $x^2-4y^2+z^2=4$，

(5) $3x^2-2y^2-z^2=6$，　　(6) $4x^2+y^2+4z=0$。

13. 画出下列各组曲面所围成的立体图形。

(1) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x^2+y^2=4$, $y+z=2$, $z=0$;

(3) $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2=4x$, $z=0$;

(4) 三个坐标面，$x+y=1$ 和 $z=x^2+y^2$;

(5) 三个坐标面，$x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$（第一卦限部分）。

14. 作出下列不等式组所确定的空间区域的简图。

(1) $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 6-x-2y$;

(2) $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 8$;

(3) $2-x\leqslant z\leqslant 4-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$。

§4.6　向量函数与空间曲线的参数方程

1. 空间曲线的参数方程

考虑一质点在空间中运动，不同时刻处于不同的位置，其轨迹是一条空间曲线 L。取定空间直角坐标系 O-xyz，设在时刻 t 质点位于点 $P(x, y, z)$，则其坐标 x, y, z 都是 t 的函数，因此，空间曲线 L 可用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),t\in I \tag{6.1}$$

表示，t 是参数。例如，曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c \end{cases}$$

可用参数方程

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ z=c\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示.而当 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$均为线性函数时,式(6.1)就表示直线.

通常称向量

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

为位置向量,记为 $\boldsymbol{r}$. 当 x, y, z 都是 t 的函数时, $\boldsymbol{r}$ 是 t 的函数,

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in I. \tag{6.2}$$

$\boldsymbol{r}(t)$称为向量函数,它的终端轨线就是空间曲线 L,所以,式(6.2)称为曲线 L 的**向量方程**. 如果函数 x, y, z 都是 t 的连续函数,则曲线 L 是一条连续曲线.

例 1 动点 M 由 $M_0(a, 0, 0)$出发, 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以等角速度 ω 绕z轴旋转,同时又以等速v沿 z 轴正方向上升,试求点 M 的运动轨迹(叫做螺旋线,见图4.40).

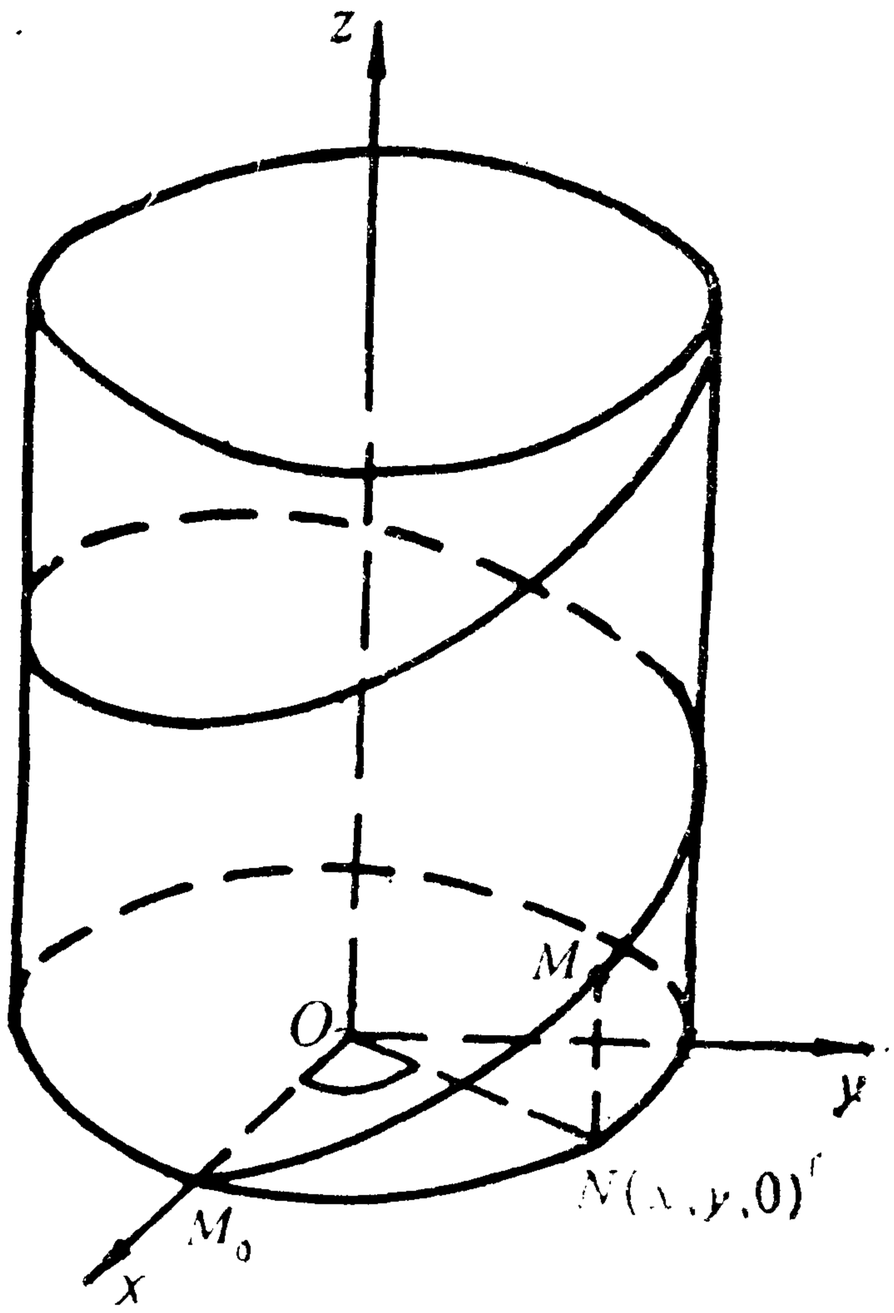


图 4.40

解 取时间t为参数,经过时间 t, 动点从 M_0 运动到 $M(x, y, z)$, M在 xOy 平面的投影是 $N(x, y, 0)$, 则$\angle M_0ON=\omega t$, $z=NM=vt$, 因此得到螺旋线的参数方程为

$$x=a\cos\omega t,\ y=a\sin\omega t,$$

$$z=vt.$$

当经过时间 $T=2\pi/\omega$, 动点M的投影 N 绕 z 轴旋转一周, 点 M 在 z 轴正方向前进的距离 $h=2\pi v/\omega$, 叫做**螺距**.

2. 向量函数的导数

在空间取定直角坐标系 O-xyz, 基向量为 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 是长度为

1，方向不变的常向量．可定义一元向量函数及其导数如下．

定义 1（向量函数） 设 I 是 R 的一个开区间，若对 $\forall t\in I$，都有一个完全确定的向量 $\boldsymbol{f}$ 与它对应，则称 $\boldsymbol{f}$ **是定义在 I 上的(一元)向量函数**．记为

$$t\mapsto \boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)),\quad t\in I. \tag{6.3}$$

定义 2（极限与连续） 设 $\boldsymbol{f}$ 是(6.3)定义的向量函数，$a\subset I$，若 $\lim\limits_{t\to a} f_i(t)$存在$(i=1,2,3)$，则定义 $t\to a$ 时 $\boldsymbol{f}$ 的极限为

$$\lim_{t\to a}\boldsymbol{f}(t)=(\lim_{t\to a}f_1(t),\lim_{t\to a}f_2(t),\lim_{t\to a}f_3(t)).$$

若 f_i 在 a 连续$(i=1,2,3)$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 a 连续，即有

$$\lim_{t\to a}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(a),$$

若 f_i 在区间 I 上连续，则 $\boldsymbol{f}$ 在 I 上连续．

定义 3（导数） 设 $\boldsymbol{f}$ 是由(6.3)定义的向量函数，$a\subset I$，如果存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(a+\Delta t)-\boldsymbol{f}(a)}{\Delta t}=\boldsymbol{l},$$

则称 $\boldsymbol{f}$ **在 a 可导，并以 $\boldsymbol{l}$ 为导数**，记为

$$\boldsymbol{f}'(a)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}(a).$$

向量 $\dfrac{\boldsymbol{f}(a+\Delta t)-\boldsymbol{f}(a)}{\Delta t}$ 以数 $\dfrac{f_i(a+\Delta t)-f_i(a)}{\Delta t}$ 为坐标，据定义 2，要使 $\boldsymbol{f}$ 在 a 可导，必须而且只须函数 f_1，f_2，f_3 在 a 可导，并且有导数

$$\boldsymbol{f}'(a)=(f_1'(a),f_2'(a),f_3'(a)),$$

所以，向量函数 $\boldsymbol{f}$ 的导数可归结为其坐标(数量)函数的导数．

因为在 I 上

$$f_i(t)\equiv 常数\Leftrightarrow f_i'(t)\equiv 0,$$

可推得在 I 上

$$\boldsymbol{f}是常向量\Leftrightarrow \boldsymbol{f}'(t)=0,\ x\subset I.$$

类似可定义向量函数的高阶导数．假定 $\boldsymbol{f}$ 在 I 的每一点都

可导，函数 $t\mapsto \boldsymbol{f}'(t)$ 叫做 $\boldsymbol{f}$ 的**导函数**. 若 $\boldsymbol{f}'$ 仍可求导，则 $\boldsymbol{f}'$ 的导函数记为 $\boldsymbol{f}''$，称为 $\boldsymbol{f}$ 的**二阶导数**，显然有

$$\boldsymbol{f}''(t)=(f_1''(t),\ f_2''(t),\ f_3''(t)).$$

一般，为了使 $\boldsymbol{f}$ 在 I 内 n 次可导，必须而且只须 f_1，f_2，f_3 在 I 内 n 次可导，且有

$$\boldsymbol{f}^{(n)}(t)=(f_1^{(n)}(t),\ f_2^{(n)}(t),\ f_3^{(n)}(t)).$$

也可定义**微分**为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}'(t)\mathrm{d}t=(\mathrm{d}f_1,\ \mathrm{d}f_2,\ \mathrm{d}f_3).$$

可见微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 是一个与 $\boldsymbol{f}'(t)$ 平行的向量.

下面讨论向量函数的求导法则. 设向量函数 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是 t 的可导函数，数量函数 φ 是 t 的可导函数，λ 为常数，则有以下求导法则：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$.

(2) $[\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)]'=\varphi'(t)\boldsymbol{a}(t)+\varphi(t)\boldsymbol{a}'(t)$.

特别有

$$(\lambda\boldsymbol{a}(t))'=\lambda\boldsymbol{a}'(t).$$

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'$.

特别

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})'=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'.$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\text{常数}(\neq 0)\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'=0.$$

即向量函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的模为常数($\neq 0$)当且仅当 $\boldsymbol{a}'$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交.

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'$.

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})'=(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}')$.

(1)、(2)、(3)的证明留作练习.

(4)的证明

$$\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{[\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)]\times\boldsymbol{b}(t+\Delta t)+\boldsymbol{a}(t)\times[\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} \times \boldsymbol{b}(t+\Delta t) + \boldsymbol{a}(t) \times \frac{\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}.$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，

$$\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} \to \boldsymbol{a}'(t),$$

$$\frac{\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t} \to \boldsymbol{b}'(t),$$

$$\boldsymbol{b}(t+\Delta t) \to \boldsymbol{b}(t),$$

由此即得结果. □

(5)的证明 据(3)、(4)可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})' &= [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]' \\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})'\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}' \\ &= (\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}')\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}' \\ &= (\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}')\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}' \\ &= (\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}').\end{aligned}$$ □

若将混合积用分量的三阶行列式表示，则得三阶函数行列式的求导公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}.$$

对于复合函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u),\ u = u(t),$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}'(u)u'(t).$$

3. 向量函数导数的物理意义与几何意义

考虑质点沿轨道 L 运动，在时刻 t 所处的位置为 $P(x, y, z)$，

在时刻 $t+\Delta t$ 运动到点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，如图 4.41 所示，它们的位置向量是

$$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \boldsymbol{r}(t+\Delta t)\\ &= x(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + y(t+\Delta t)\boldsymbol{j}\\ &\quad + z(t+\Delta t)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_1} &= \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\\ &= \Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

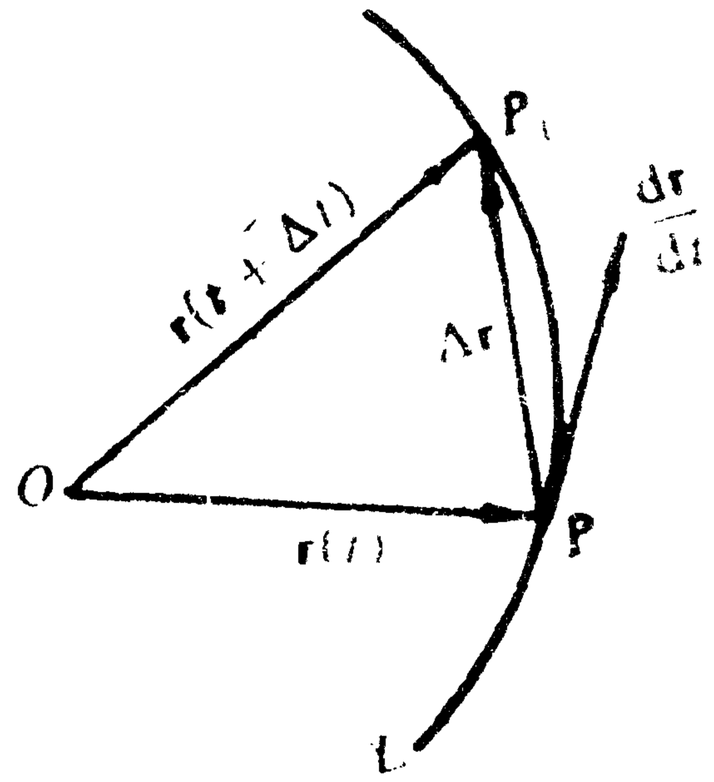


图 4.41

则质点在 P 处的瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}.$$

所以，一质点沿曲线运动时，位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数就是运动速度。同样，可推得加速度为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}.$$

从几何观点看，设曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),$$

则位置向量

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

即是曲线 L 的向量方程。L 上点 P 处的切线是割线 PP_1 当 $P_1\to P$ 时的极限位置，而在 P 处曲线 L 的切方向就是向量 $\overrightarrow{PP_1} = \Delta\boldsymbol{r}$ 当 $P_1\to P$ 时的极限方向。

$$\overrightarrow{PP_1} = \Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k},$$

两边除以 Δt，当 $P_1\to P$ 时 $\Delta t\to 0$ 取极限，就得曲线 L 在点 P 的切方向为

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

这个切方向就是质点在点 P 处的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向。

有了切方向，就可写出曲线 L 上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程和法平面(过 P_0 与切线垂直的平面)的方程为

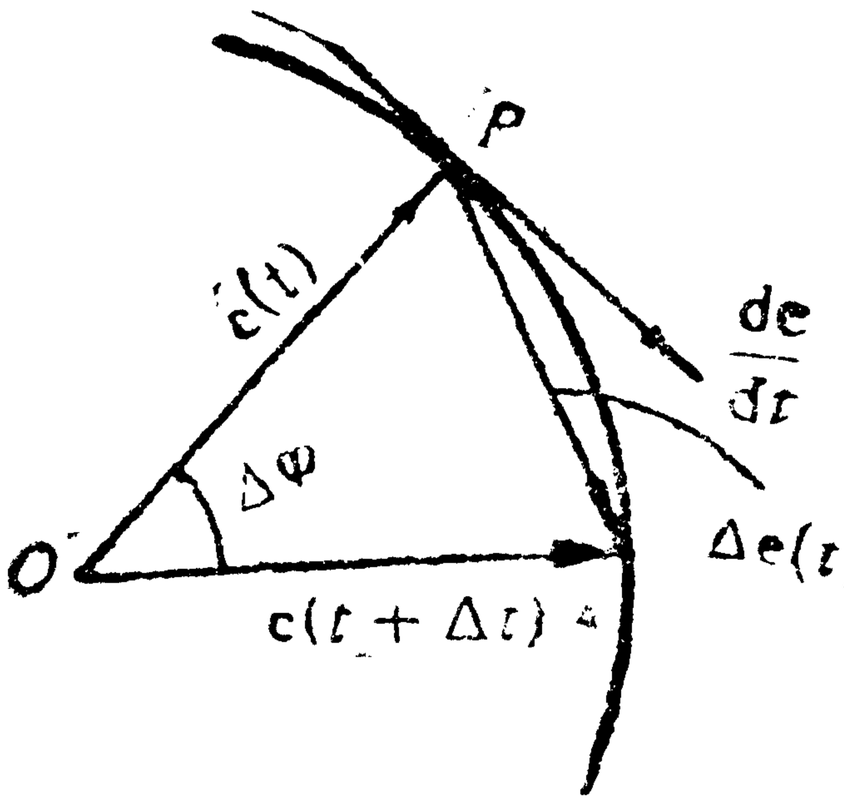


图 4.42

$$\text{切线：}\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0,$$

其中 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$.

再看单位长向量$\boldsymbol{e}(t)$的导数.$\boldsymbol{e}(t)$的始点在原点 $O(0,0,0)$，终点在单位球面上，所以，对任何 Δt，有

$$|\boldsymbol{e}(t+\Delta t)|=|\boldsymbol{e}(t)|=1.$$

从图 4.42 可见，

$$|\boldsymbol{e}(t+\Delta t)-\boldsymbol{e}(t)|=|\Delta\boldsymbol{e}(t)|=2|\boldsymbol{e}(t)|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=2\sin\frac{\Delta\varphi}{2},$$

所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}(t)}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

这说明单位长向量的导数 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}$ 的模是 $\boldsymbol{e}(t)$的转动角速度，且据公式 (3)，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}$ 的方向与 $\boldsymbol{e}(t)$ 垂直。实际上，单位长向量 $\boldsymbol{e}(t)$的端点轨迹是单位球面上的一条曲线，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}$ 是曲线的切线方向。

对位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微分，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k},$$

其长度 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$ 就是曲线 L 的弧长 s 的微分，即

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t, \tag{6.1}$$

因此可得曲线上自 P_0（相应 $t=t_0$）到 P 一段弧长的计算公式：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

这些公式都是第 3 章 §3.9 平面曲线弧长结果的推广。

例 2 求圆柱螺线

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\quad (a, b>0)$$

在 $t=\pi/2$ 所对应的点 P_0 处的切线方程和法平面方程；并求 t 从 0 到 2π 一段曲线的弧长 s。

解

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}'(t) = -a\sin t\,\boldsymbol{i} + a\cos t\,\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\boldsymbol{j} + \frac{b\pi}{2}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{k},$$

故所求切线方程为

$$\frac{x}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\frac{b\pi}{2}}{b} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y-a=0, \\ bx+az-\dfrac{ab\pi}{2}=0. \end{cases}$$

法平面方程为

$$-ax + b\left(z-\frac{b\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{即} \quad ax - bz + \frac{b^2\pi}{2} = 0.$$

弧长 s 为

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

*4. 空间曲线论的基本公式

1）弗朗内(Frenet)标架

设曲线 L 的方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

且 $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)}=\frac{x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}},$$

其中 s 为弧 $\overset{\frown}{P_0P}$ 之长. 易知，$\boldsymbol{r}'(s)$是与 $\boldsymbol{r}'(t)$同方向的单位向量.

如果曲线 L 的方程用以弧长 s 为参数的向量函数给出，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k},$$

则 $\boldsymbol{r}'(s)$ 是曲线 L 上点 $P(s)$处的单位切向量，记为 $\boldsymbol{T}(s)$，这是要确定的第一个方向. 由于$|\boldsymbol{r}'(s)|=1$，所以 $\boldsymbol{r}''(s)$与 $\boldsymbol{r}'(s)$垂直，第二个方向取与$\boldsymbol{r}''(s)$同向的单位向量，记为 $\boldsymbol{N}(s)$。第三个方向应是一个与 $\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{N}(s)$ 都垂直的单位向量，记为 $\boldsymbol{B}(s)$，取

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s),$$

这样，在曲线 L 上点 $P(s)$处建立了坐标架

$$\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\},$$

称为**弗朗内标架**. $\boldsymbol{T}(s)$ 是切向量，$\boldsymbol{N}(s)$称为**主法向量**，$\boldsymbol{B}(s)$ 称为**副法向量**. 过 P 以 $\boldsymbol{N}(s)$为方向向量的直线称为**主法线**，过 P 以 $\boldsymbol{B}(s)$ 为方向向量的直线称为**副法线**. 主法线和副法线在法平面上，切线和主法线所确定的平面称为**密切平面**，切线和副法线所确定的平面称为**直化平面**，如图 4.43 所示.

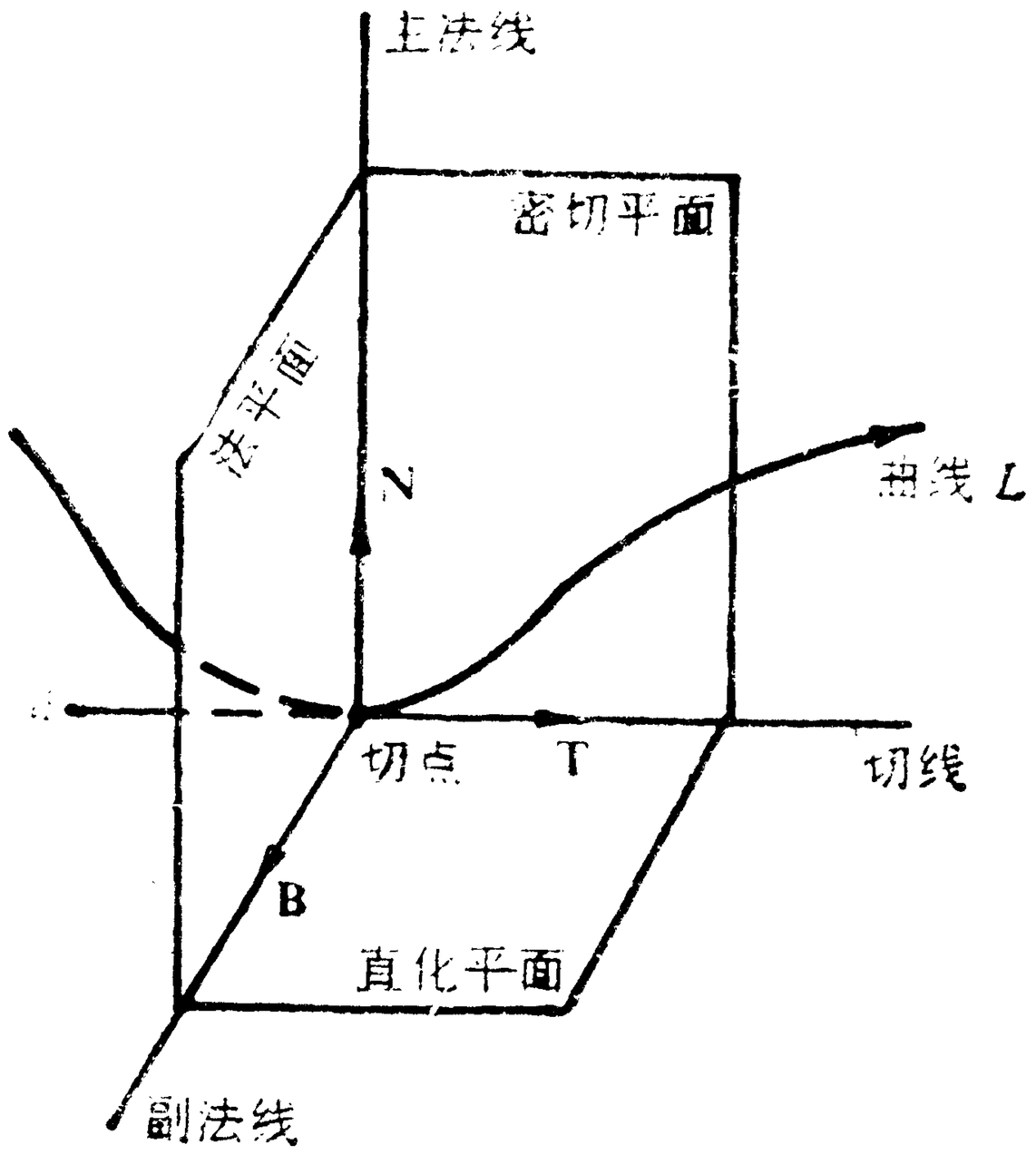


图 4.43

密切平面的方程为

$$(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})=0, \tag{6.5}$$

其中 $\boldsymbol{R}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$ 表示密切平面内动点的位置向量. 若曲线 L 的方程由有一般参数 t 的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给出，则

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\quad \boldsymbol{r}''(s)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}, \tag{6.6}$$

代入式(6.5)，并用混合积的性质化简可将密切平面的方程化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2},\ \boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}\right)=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(i) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}=0. \tag{6.7}$$

而副法线的方程为

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}.$$

2) 空间曲线的曲率

和平面曲线一样，空间曲线也可用曲率来衡量它的弯曲程度. 在空间曲线 L 上取两个邻近点 P_0 和 P(如图4.44)，记 $\overset{\frown}{P_0P}$ 的弧长为 Δs，点 P_0 与 P 处曲线 L 的切线向量的夹角为 $\Delta\alpha$，定义曲线在点 P_0 的**曲率** k 为

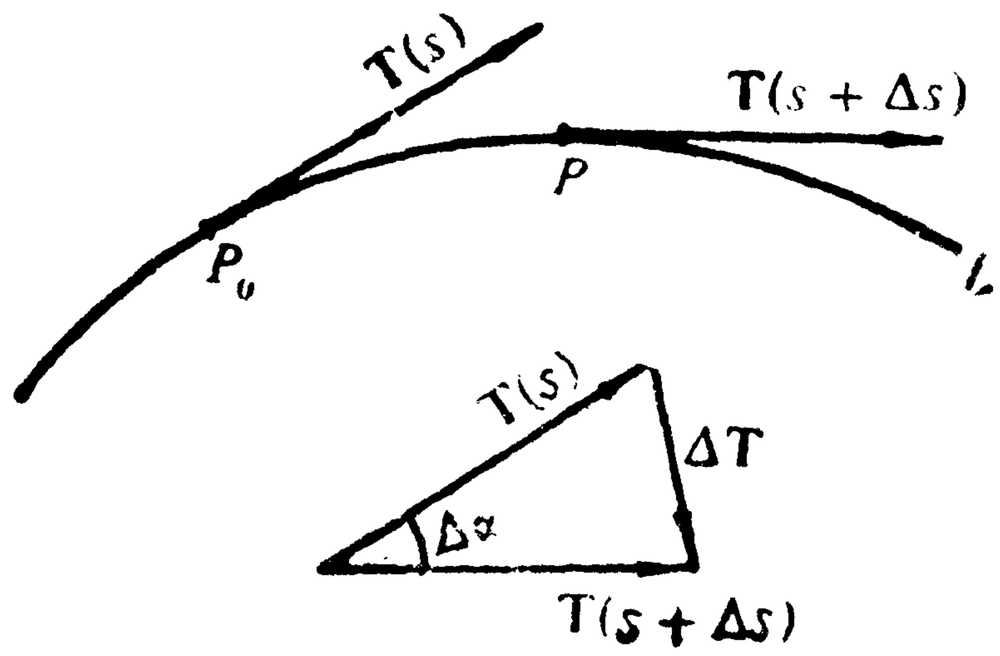


图 4.44

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

当 $k\neq 0$ 时，k 的倒数 $1/k=\rho$ 称为**曲率半径**. 下面给出曲率的计算公式.

因为 $|\Delta\boldsymbol{T}|=2\sin\frac{1}{2}|\Delta\alpha|$，所以

$$|\boldsymbol{T}'(s)|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{T}}{\Delta s}\right|$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2\sin\frac{1}{2}|\Delta\alpha|}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

$$= k(s) = \frac{1}{\rho(s)}, \tag{6.8}$$

即

$$k(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|, \quad \boldsymbol{r}''(s) = k(s)\boldsymbol{N}(s),$$

而

$$\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s) = \boldsymbol{T}(s) \times k(s)\boldsymbol{N}(s) = k(s)\boldsymbol{B}(s), \tag{6.9}$$

$$|\boldsymbol{B}(s)| = 1,$$

所以

$$k(s) = |\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)|. \tag{6.10}$$

若曲线 L 的方程由向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$给出，$t$ 是一般参数，则据式(6.6)可得

$$\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s) = [\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3, \quad 1 = |\boldsymbol{r}'(t)| \left| \frac{dt}{ds} \right|, \tag{6.11}$$

代入式(6.10)即得曲率的计算公式

$$k(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{6.12}$$

3) 空间曲线的挠率

空间曲线和平面曲线不同，要说明一条空间曲线的弯曲程度，只知道它的曲率是不够的，曲率只表示切线方向对弧长的变化率，还要知道副法线方向对弧长的变化率。

先考察 $\boldsymbol{B}'(s)$，由于 $|\boldsymbol{B}(s)| = 1$，$\boldsymbol{B}'(s) \perp \boldsymbol{B}(s)$。又对 $\boldsymbol{B}(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) = 0$ 求导得

$$\boldsymbol{B}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) + \boldsymbol{B}(s) \cdot \boldsymbol{T}'(s) = 0,$$

而 $\boldsymbol{T}'(s) = \boldsymbol{r}''(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$ 垂直，$\boldsymbol{B}(s) \cdot \boldsymbol{T}'(s) = 0$，故 $\boldsymbol{B}'(s) \perp \boldsymbol{T}(s)$，所以 $\boldsymbol{B}'(s)$ 平行于主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$。设 $\boldsymbol{r}''(s) \neq 0$，则由

$$\boldsymbol{B}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) \tag{6.13}$$

所确定的函数 $\tau(s)$ 称为曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 在点 $P(s)$ 处的**挠率**，并有

$$|\tau(s)| = |\boldsymbol{B}'(s)|.$$

类似于式(6.8)，也可得到

$$|\tau(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|,$$

其中 $\Delta\varphi$ 为副法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s+\Delta s)$ 的夹角。这就是说，空间曲线在一点的挠率，就绝对值而言，等于副法线（或密切平面）对于弧长的变化率。下面推导挠率的计算公式。

对式(6.13)两边点乘 $\boldsymbol{N}(s)$，得到

$$\tau(s) = -\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s),$$

据式(6.9),

$$\boldsymbol{B}(s) = \frac{1}{k(s)}(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)) = \rho(s)(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)),$$

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{\boldsymbol{r}''(s)}{k(s)} = \rho(s)\boldsymbol{r}''(s), \quad 1 = \rho(s)|\boldsymbol{r}''(s)|,$$

注意到

$$\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) = 0, \quad \boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) + \boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}'(s) = 0,$$

则有

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) &= \boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}'(s)\\ &= \rho(s)(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot(\rho'(s)\boldsymbol{r}''(s) + \rho(s)\boldsymbol{r}'''(s))\\ &= \rho^2(s)[(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s)],\end{aligned}$$

故有

$$\tau(s) = \frac{(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2}. \tag{6.14}$$

若曲线 L 由向量方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 给出，将式(6.6)求导得到

$$\boldsymbol{r}'''(s) = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 + 3\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}s^3},$$

再用式(6.11)可得

$$(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s) = [(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t)]/|\boldsymbol{r}'(t)|^6,$$

而据式(6.12)有

$$k^2(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|^2 = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}{|\boldsymbol{r}'(t)|^6},$$

一起代入式(6.14)即得挠率的计算公式

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}. \tag{6.15}$$

若 L 是平面曲线，$\boldsymbol{B}(s)$是常向量，$\boldsymbol{B}'(s) = 0$，因此挠率 $\tau = 0$，由此可知，**曲线 $r = r(t)$是平面曲线的充要条件**是

$$(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)) = 0.$$

例 3 求圆柱螺线

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k} \quad (a, b>0)$$

的密切平面方程，曲率 $k(t)$和挠率 $\tau(t)$.

解 $\boldsymbol{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$\boldsymbol{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$

$$\boldsymbol{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0),$$

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2),$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = a\sqrt{b^2+a^2},$$

$$(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t)=a^2b,$$

代入式(6.7)、(6.12)和(6.15)即得密切平面方程：

$$b\sin tX-b\cos tY+aZ-ybt=0,$$

曲率和挠率为

$$k(t)=\frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\tau(t)=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

由此可见，圆柱螺线的曲率与挠率都是常数.

例 4 一质点作曲线运动，运动规律为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求质点在时刻 t 的运动速度 $\boldsymbol{v}(t)$和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$.

解 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\boldsymbol{r}'(s)=v\boldsymbol{T},$$

此处 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'(t)|$ 为速率.

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{T})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}+v\boldsymbol{T}'(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}+v^2\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N},$$

其中 ρ 为曲率半径. 因为切向量 $\boldsymbol{T}$，主法向量 $\boldsymbol{N}$ 都在密切平面上，所以动点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 必在密切平面内，它的切线方向分量为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，主法线方向分量为 $\dfrac{v^2}{\rho}$.

从曲率 k 与挠率 τ 的定义知道，

$$\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N},\quad \boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N},$$

由 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$ 便得

$$\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}',$$

利用前面两式，上式可化为

$$\boldsymbol{N}'=-\tau\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\times k\boldsymbol{N}=\tau\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{T},$$

因此，就可以将弗朗内标架的三个单位向量的导向量写成下列公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N},\\ \boldsymbol{N}'=-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},\\ \boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N},\end{cases}$$

这就是**空间曲线论的基本公式**. 从曲线论的基本公式可见，当曲线 L 的曲率 k 与挠率 τ 已知后，邻近点的弗朗内标架之间的变化情况就清楚了.

可以证明：当 $k\neq 0$时，k 与 τ 完全刻划了曲线的几何形状，请参看苏步青等编《微分几何》第一章。

§4.6 习　　题

1. 设 $\boldsymbol{r}(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，证明：$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ 的夹角是常数。

2. 设 $f=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')$，证明：$f'=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')$。

3. 求证：曲线

$$\boldsymbol{r}=\mathrm{e}^{mt}(a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k})$$

落在锥面

$$b^2(x^2+y^2)-a^2z^2=0$$

上，并与母线相交成定角

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,m}{\sqrt{m^2(a^2+b^2)+a^2}}\right).$$

4. 求下列曲线的弧长。

(1) 双曲螺纹线 $\boldsymbol{r}=(a\,\mathrm{ch}t,\ a\,\mathrm{sh}t,\ at)$，$t=0$ 到 1 段。

(2) $\boldsymbol{r}=(\mathrm{e}^t\cos t,\ \mathrm{e}^t\sin t,\ 2t)$，$t=0$ 到 1 段。

5. 求下列曲线在对应 $t=t_0$ 的点处的切线和法平面方程。

(1) $\boldsymbol{r}(t)=(at,\ bt^2,\ ct^3)$，　$t_0=1$；

(2) $\boldsymbol{r}(t)=(a\mathrm{ch}t,\ a\mathrm{sh}t,\ bt)$，　$t_0=1$。

*6. 求下面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 t 处的密切平面，曲率 $k(i)$ 和挠率 $\tau(t)$。

(1) $\boldsymbol{r}(t)=a\mathrm{ch}t\boldsymbol{i}+a\mathrm{sh}t\boldsymbol{j}+at\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{r}(t)=\cos^3 t\boldsymbol{i}+\sin^3 t\boldsymbol{j}+\cos 2t\boldsymbol{k}$。

5 矩阵　行列式　线性代数方程组

线性代数方程组的理论在数学中是基本而又是重要的内容。矩阵与行列式是研究线性代数方程组的重要工具，它们是人们从解线性代数方程组的需要中建立起来的。除线性代数方程组之外，还有大量的各式各样的问题也都提出矩阵的概念，这就使矩阵成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象。行列式理论中已越出求解线性代数方程组的范围，它也是一个重要的数学工具。

本章将在实数域的基础上开展对矩阵、行列式与线性代数方程组的论述，在讨论中涉及到的一切数始终属于同一个数域。我们将先介绍矩阵与行列式的最基本内容，然后完整地解决一般的线性代数方程组的求解问题。

§5.1　矩阵及其运算

本节首先介绍数域的概念，再从线性代数方程组引进矩阵的概念。然后讨论矩阵的线性运算与乘法。

1. 矩阵的概念

定义1（数域）　设F是一些（有限或无限多个）数所组成的一个集合，满足如下两个条件：

(1) $0\in F, 1\in F$;

(2) 对于F中的任意两个数a, b（相同或相异）的和、差、积、商（除数不等于0）仍然属于F，那么就称F是一个数域。

例如，全体有理数组成的集合Q，全体实数组成的集合R，全体复数组成的集合C，都是数域，分别叫做**有理数域**，**实数域**和**复**

数域。

容易验证，全体整数所组成的集合，全体无理数所组成的集合，都不是数域。因为第一个数集对除法不封闭，第二个数集对加法不封闭。而所有形如$a+b\sqrt{2}$的数（其中a，b为任何有理数）组成的集合，记作$Q(\sqrt{2})$是一个数域。

在本章中讨论问题时，所涉及到的当不需要强调某个数域时，都是指实数域。

现在转到线性代数方程组上来。在理论研究与应用问题中，常需考虑含有m个方程，n个未知量(数)的一般线性代数方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\quad\cdots\quad\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

此即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{1.1}$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是**未知量**，a_{ij}代表第i个方程中x_j的系数，方程右端的数$b_1,b_2,\cdots,b_m$称为常数项。称式(1.1)为**$m\times n$方程组。**

如果将$x_j=k_j(j=1,2,\cdots,n)$代入(1.1)后使之成为恒等式，就说有序数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$是(1.1)的一个**解。**

设$m\times n$方程组

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j=d_i,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{1.2}$$

的任一解是(1.1)的解，而且(1.1)的任一解也是(1.2)的解，则称(1.1)与(1.2)**同解**，或称(1.2)是(1.1)的**同解方程组。**我们将设法把(1.1)化成一个形状简单的同解方程组，从而求出解来。

$m\times n$方程组要解决的问题是，怎样判断它是否有解？在有解时如何求出它的解？解的形状怎样？解有哪些性质？这些问题我们将在第9节去解决。为了解决(1.1)的求解问题，现在先观察一下$m\times n$方程组(1.1)，应引进怎样的“工具”。

若在 $m\times n$ 方程组(1.1)中，去掉未知量、等号以及相加号，由剩下的系数和常数项保持原来顺序可排列成一个矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

反过来，有了(1.3)就能写出(1.1)。下面详细研究这种数表，并且对这种数表规定一些运算。为此，我们引进一个很重要的概念——矩阵。

定义 2（矩阵） 由 $m\times n$ 个数排成 m 行，n 列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

称为一个 **$m\times n$ 矩阵**。其中数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵 A 的**元素**。i 为行标，j 为列标，a_{ij} 是 A 的位于第 i 行第 j 列位置的元素，或简称为 A 的$(i,\ j)$元素。式(1.4)亦可简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或(a_{ij})。

当 $m=n$ 时，A 为 $n\times n$ 矩阵，也称为 **n 阶方阵**。特别是，当 $m=n=1$ 时，A 为一阶方阵(a)，习惯上记为 a。

对于方程组(1.1)，其系数 a_{ij} 排成的矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为(1.1)的**系数矩阵**，而称矩阵(1.3)为**增广矩阵**。

下面引进两个矩阵相等的定义。

定义 3（等矩阵） 如果 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵（行、列数皆相同的矩阵称为**同型矩阵**），且它们对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$。

$m\times 1$ 矩阵(仅有一列的矩阵)叫做**列矩阵**或 **m 维列向量**，并用小写希腊字母 β 表示之。将列标从元素中略去，于是

$$\beta=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

是一个 m 维列向量.

$1\times n$ 矩阵(仅有一行的矩阵)叫做**行矩阵**或 n **维行向量**. 用 α 表示之. 将行标从元素中略去,因此

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

是一个 n 维行向量. 行(列)向量中元素叫做**分量**.

2. 矩阵的线性运算

由于 n 维行向量是 $1\times n$ 矩阵, 因此空间解析几何中的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$是 1×3 矩阵,3 维向量的加法及数乘运算法则,自然可推广到 n 维向量及矩阵.

定义 4 (矩阵加法) 设有两个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$, 把它们对应元素相加所得到的新矩阵叫做 A 与 B 的**和**,记作 $A+B$. 即

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}).$$

注意,矩阵只有在行数与列数都相等时,才能进行加法运算.

定义 5 (数乘) 用数 k 乘 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 中每个元素而得到的矩阵叫做 k 与 A 的乘积,简称**数乘运算**,记作 kA. 即

$$kA=(ka_{ij}).$$

矩阵的加法与数乘运算统称为**矩阵的线性运算**, 它满足下列八条运算规则: 设 A、B、C 是任意三个 $m\times n$ 矩阵, h, k 为任意数,则有

(1) 加法交换律: $A+B=B+A$.

(2) 加法结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3) 零矩阵: 每个元素都为 0 的 $m\times n$ 矩阵,叫做零矩阵,记为 **0**. 对任一个 $m\times n$ 矩阵 A, 存在零矩阵满足

$$A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A,$$

所以零矩阵是矩阵加法的恒等元.

(4) 负矩阵：设 $A=(a_{ij})$是任一个 $m\times n$ 矩阵，取 A 中每个元素的相反数所得到的一个矩阵，叫做 A 的**负矩阵**，记作 $-A$，$-A=(-a_{ij})$. 满足

$$A+(-A)=\mathbf{0}.$$

$-A$ 是 A 的加法逆，由此可定义矩阵的**减法**：设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵，则

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij}).$$

(5) $k(A+B)=kA+kB$.

(6) $(k+h)A=kA+hA$.

(7) $(kh)A=k(hA)$.

(8) $1\cdot A=A$.

上述规律容易证明，请读者作为练习自证.

矩阵定义了线性运算以后，就可以引进一组矩阵线性组合的概念.

定义 6（矩阵单位） 设 E_{ij} 是一个$m\times n$矩阵，它只有$(i,\ j)$这一个元素为 1，其余 $m\times n-1$ 个元素全为 0，即①

$$E_{ij}=\begin{pmatrix} & \overset{j\text{列}} & \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ i\text{行}\end{matrix},$$

则 E_{ij} 叫做**矩阵单位**.

根据矩阵的线性运算便可以知道，任何一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$都是同型的矩阵单位的线性组合，即

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}.$$

3. 矩阵的乘法

上面所讨论矩阵的线性运算都很简单，现在引进一种较复杂

① 矩阵或后面的行列式中空白处的元素全是 0.

但很重要的运算，即矩阵的乘法，先看一个引出矩阵乘法的问题。

设 x_1，x_2 和 y_1，y_2，y_3 是两组变量，它们之间的关系是

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

而 z_1，z_2 是第三组变量，它们与 y_1，y_2，y_3 的关系为

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{cases} \tag{1.6}$$

为了直接用 z_1，z_2 表示 x_1，x_2，可将(1.6)代入(1.5)得

$$\begin{cases} x_1 = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}\right)z_1 + \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2}\right)z_2, \\ x_2 = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}\right)z_1 + \left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2}\right)z_2, \end{cases} \tag{1.7}$$

如果用

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}z_j \quad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

来表示 x_1，x_2 与 z_1，z_2 的关系，比较(1.7)、(1.8)便有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2)。 \tag{1.9}$$

用矩阵的表示法，我们可以说，如果矩阵

$$A = (a_{ij})_{2\times 3}, \quad B = (b_{ij})_{3\times 2}$$

分别表示变量 x_1，x_2 与 y_1，y_2，y_3 以及 y_1，y_2，y_3 与 z_1，z_2，之间的关系，则表示 x_1，x_2 与 z_1，z_2 之间关系的矩阵

$$C = (c_{ij})_{2\times 2}$$

就由公式(1.9)决定。矩阵 C 叫做矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $C = AB$。

一般地我们有

定义 7（矩阵的乘积） 设 $A = (a_{ik})_{m\times s}$，$B = (b_{kj})_{s\times n}$，以 A 的第 i 行与 B 的第 j 列各对应元素乘积之和记为 c_{ij}，即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \tag{1.10}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 叫做矩阵 A 与 B 的乘积，记为

$$C=AB.$$

用图式表示就是①

$$\begin{array}{c} \\ i\text{行}\rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} * & * & * \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{is} \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{array}{c} j\text{列} \\ \downarrow \end{array}\begin{pmatrix} * & b_{1j} & * \\ * & b_{2j} & * \\ & \vdots & \\ * & b_{sj} & * \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & c_{ij} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} j\text{列} \\ \downarrow \\ \\ \end{array}.$$

应该注意的是，在矩阵乘积的定义中，当矩阵 B 的行数与矩阵 A 的列数相同时，AB 才有意义。

例 1 n 维行向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 n 维列向量 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的乘积是一阶方阵，于是

$$\alpha\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例 2 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad 与\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

---

① 矩阵或后面的行列式中记号 * 表示是用不着写出的任意元素。

的乘积，并问乘积 BA 有无意义。

解 利用式(1.10)即得

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\-4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\-3&9\end{pmatrix}.$$

由于 A 的行数是 3，而 B 的列数为 2，因此 BA 无意义。

例 3 设

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix},$$

求 AB 与 BA。

解 $$AB=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&16\end{pmatrix}.$$

注 1 一般，矩阵的乘法不满足交换律，即 $AB\neq BA$。

首先，从例 2 中可看出，AB 有意义时 BA 可以无意义；其次，即使 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，于是 AB 与 BA 都有意义，但是，AB 是 m 阶方阵，BA 是 n 阶方阵，所以在 $m\neq n$ 时也谈不上两者是否相等的问题；就算 A 与 B 都是 n 阶方阵，因此 AB 与 BA 也是 n 阶方阵，在一般情况下，AB 与 BA 仍然不相等，譬如，在例3中 $AB\neq BA$。所以，在进行矩阵乘法运算时必须指明是左乘还是右乘。

注 2 两个非零矩阵 A 与 B 的乘积 AB 可以是零矩阵，如例3，因此，由 $AB=\mathbf{0}$ 不能推出 $A=\mathbf{0}$ 或 $B=\mathbf{0}$；由此可知，由 $AB=AC$ 不能推出 $B=C$，即消去律不成立。

以上两点，说明矩阵乘法与数的乘法有着根本区别，应该引起不能注意。

定理 1 矩阵的乘法满足下列规则：

(1) $(AB)C=A(BC)$ （结合律）

$$\left.\begin{array}{l}\text{(2)}\ A(B+C)=AB+AC\\ \text{(3)}\ (A+B)C=AC+BC\end{array}\right\}\ \text{(分配律)}$$

(4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

以上 A、B、C 都是矩阵，k 是数，且假设运算都是有意义的。由于矩阵乘法不满足交换律，所以有必要区分左分配律与右分配律。

证 仅证明(1)，其余留给读者自证。设

$$A=(a_{ip})_{m\times k},\quad B=(b_{pq})_{k\times s},\quad C=(c_{qj})_{s\times n},$$

显然$(AB)C$ 与 $A(BC)$都有意义，且都是 $m\times n$ 矩阵，因此只须证明对应元素相等即可。令

$$U=AB=(u_{iq}),\quad V=BC=(v_{pj}),$$

由式(1.10)知

$$u_{iq}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pq},\quad v_{pj}=\sum_{q=1}^{s}b_{pq}c_{qj},$$

从而$(AB)C$ 的$(i,\ j)$元素是

$$\sum_{q=1}^{s}u_{iq}c_{qj}=\sum_{q=1}^{s}\left(\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pq}\right)c_{qj}=\sum_{q=1}^{s}\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pq}c_{qj}.$$

而 $A(BC)$的$(i,\ j)$元素是

$$\sum_{p=1}^{k}a_{ip}v_{pj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}\left(\sum_{q=1}^{s}b_{pq}c_{qj}\right)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{s}a_{ip}b_{pq}c_{qj},$$

由于双重和号可以交换次序，故得

$$(AB)C=A(BC).\qquad\square$$

因为矩阵的乘法满足结合律，所以可定义**方阵的幂**。设A 是 n 阶方阵，k 个 A 的连乘积，记作 A^k，即

$$\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k\text{个}}=A^k\quad(k\text{为正整数}).$$

A^k 叫做矩阵 A 的 k **次幂**。用数学归纳法可以证明

$$A^kA^s=A^{k+s},\quad (A^k)^s=A^{ks},$$

其中 k 与 s 都是正整数。

应注意，由于矩阵的乘法不满足交换律，所以对两个 n 阶方阵 A 与 B，在一般情况下

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

在矩阵的乘法下，有这样的矩阵，它与数中的 1 具有类似的性质，这就有所谓**单位矩阵或么矩阵**

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

n 阶单位矩阵记为 E_n 或 $I_{n\times n}$。引进克罗内克 (Kronecker) 记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则单位矩阵 $E_n = (\delta_{ij})(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，对于任何矩阵 $A_{m\times n}$ 恒有

$$A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}, \qquad E_m A_{m\times n} = A_{m\times n},$$

所以单位矩阵是矩阵乘法的恒等元。

对于任意数 k，利用定理 1 便有

$$A_{m\times n}(kE_n) = kA_{m\times n}, \qquad (kE_m)A_{m\times n} = kA_{m\times n}.$$

这里 kE_n 叫做 n 阶**数量矩阵或纯量矩阵**

由此可见，单位矩阵 E_n 与数量矩阵 kE_n 在矩阵乘法中所起的作用相当于数 1 与 k 数乘矩阵中所起的作用。

作为特殊情况，当 $m = n$ 时，有

$$A_{n\times n}(kE_n) = (kE_n)A_{n\times n} = kA_{n\times n}.$$

这就是说，n 阶数量矩阵与任意 n 阶方阵的乘法满足交换律。反之亦真，即在乘法中与任意 n 阶方阵可交换的方阵必为数量矩阵。作为练习留给读者自证。

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵，若当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$，则称 A 为**上三角阵**；若当 $i < j$ 时，$a_{ij} = 0$，则称 A 为**下三角阵**，具体写出即是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

上三角阵与下三角阵统称为**三角阵**.

例 4 证明两个同阶上(下)三角阵的乘积仍有一个上(下)三角阵.

证 对上三角阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 记 $AB=C=(c_{ij})$,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{i,i-1}b_{i-1,j}+a_{ii}b_{ij}+\cdots+a_{in}b_{nj},$$

当 $i>j$ 时, 由于 $a_{i1},\cdots,a_{i,i-1},b_{ij},\cdots,b_{nj}$ 为 0, 故得 $c_{ij}=0(i>j)$, 所以 C 是上三角阵.

同理可证, 两个同阶下三角阵的乘积仍是一个下三角阵.

4. 转置矩阵

定义 8 (转置矩阵) 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 若将 A 的行、列元素互换, 得到一个 $n\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})$,

$$b_{ij}=a_{ji} \quad (i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n),$$

则矩阵 B 称为 A 的**转置矩阵**, 记作 A^T. 具体写出即是

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 2 转置矩阵具有下列性质:

(1) $(A^T)^T=A$,

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$,

(3) $(kA)^T=kA^T$ (k 为常数),

(4) $(AB)^T=B^TA^T$ (注意顺序颠倒).

证 根据转置矩阵的定义, 性质 (1)～(3) 是显然的. 下面只证明性质(4). 设

$$A=(a_{ik})_{m\times s},\quad B=(b_{kj})_{s\times n}.$$

则

$$A^T=(\tilde{a}_{ik})_{s\times m},\quad B^T=(\tilde{b}_{kj})_{n\times s},$$

于是，$(AB)^T$ 与 B^TA^T 都是 $n\times m$ 矩阵。接下来证明 $(AB)^T$ 与 B^TA^T 的对应元素相等。由定义，$(AB)^T$ 的(i,j)元素等于(AB)的(j,i)元素，即为

$$\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}.$$

而 B^TA^T 的(i,j)元素是

$$\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

故得 $(AB)^T=B^TA^T$。 □

如果一个 n 阶方阵正好与其转置矩阵相等，便引入对称矩阵的概念。

定义 9（对称矩阵与反对称矩阵） 对于 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，如果满足 $A^T=A$，则称 A 为**对称矩阵**；如果满足 $A^T=-A$，则称 A为**反对称矩阵**。

由定义可知，对称矩阵 A 的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

反对称矩阵的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad(i,=1,2,\cdots,n).$$

在n阶方阵$A=(a_{ij})$中，自左上角至右下角的对角线上诸元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 叫做 A 的**主对角线元素**。对于反对称矩阵，当$i=j$时，由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 可得

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0,$$

也就是说，反对称矩阵的主对角线元素全为零。

利用转置矩阵的性质可以证明，对称矩阵有如下性质：

(1) 若 A 与 B 都是对称矩阵，则 $A+B$，kA 仍是对称矩阵；

(2) 若A与B都是对称矩阵，且 $AB=BA$，则AB是对称矩阵；

(3) 设 A 是任意一个 $m\times n$ 矩阵，则 AA^T 是一个对称矩阵。

这里仅证第三个性质，其余二条性质留给读者证明。

对于 $m\times n$ 矩阵 A，AA^T 是 m 阶方阵，于是

$$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T,$$

所以 AA^T 也是一个对称矩阵。

同样，A^TA 是一个 n 阶对称矩阵。必须注意，在一般情况下，$AA^T\neq A^TA$。

有一种特殊的对称矩阵很重要。它的特点是除了主对角线元素外，其余元素全为零，这种矩阵叫做**对角矩阵**，记作

$$\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}=k_{n\times n}$$

由定义容易证明，对角矩阵有如下性质：

(1) $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

$=\mathrm{diag}(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$，

(2) $k\,\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\mathrm{diag}(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$，

(3) $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\cdot\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

$=\mathrm{diag}(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$，

(4) $K_{m\times m}A_{m\times n}=[k_ia_{ij}]_{m\times n}$，$A_{m\times n}K_{n\times n}=[a_{ij}k_j]_{m\times n}$。

在对角矩阵中有两类更加特殊的矩阵：单位矩阵与数量矩阵。显然，单位矩阵又是数量矩阵的特例。

§5.1 习　　题

1．下列各数集哪些是数域？哪些不是？

(1) 所有的正数；

(2) 所有不是整数的有理数；

(3) $F=\{a+bi\mid a、b$ 均为有理数$\}$；

(4) $F=\left\{\dfrac{m}{2^n}\,\middle|\,m、n$ 均表示整数$\right\}$。

2．证明：任何数域都包含有理数域(或有理数域是最小的数域)。

3．已知

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2 & 2x_3+x_4 \\ x_1-x_2 & x_3-x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 x_1, x_2, x_3, x_4 的值.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求 (1) $A+B, 3A-4B$;

(2) AC, BC;

(3) A^T, B^TA.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n(n 为正整数).

6. 设 $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 记 $f(A)=A^2-3A-2E_2$, 试求 $f(A)$.

7. 试证：任意一个 n 阶方阵都可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵.

9. 证明：与任意一个 n 阶方阵相乘都可交换的方阵必为数量矩阵.

10. n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主角线上元素之和叫做矩阵的**迹**, 记作 $\mathrm{t_r}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, 证明：对于任意二个 n 阶方阵, $\mathrm{t_r}AB=\mathrm{t_r}BA$.

11. 试证对任何二个 n 阶方阵 A、B 都不可能有 $AB-BA=E$.

§5.2 矩阵的分块

本节介绍一种处理高阶矩阵常用的方法——矩阵的分块法，即矩阵的分块. 将一个高阶矩阵分成若干小块，它不仅可以把高阶矩阵的运算化成若干低阶矩阵的运算，以减少运算量，而且可以使运算更为简明. 对在容量较小的计算机上运算高阶矩阵，分

块法有着重要意义．另一方面，分块法在矩阵论的研究上，显得很简捷．下面将介绍矩阵如何分块以及分块矩阵的运算方法．

对于行、列数比较大的矩阵，人们常常根据需要，用横线与竖线把它分成若干小块，每个小块叫做**子块**．被分成子块的矩阵便叫做**分块矩阵**．例如

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hdashline 3 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

便是一个分块矩阵，将 A 分成四个小矩阵 A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22}，

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\quad A_{21}=(3,\ 1),\ A_{22}=(4,\ 5),$$

则 A 可表示为 2×2 分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

同一个矩阵可以进行不同的分块而得到不同的分块矩阵，上面的矩阵 A 也可作下面的分块：

$$A=\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)=(A_{11},\ A_{12})$$

得到一个 1×2 分块矩阵．

一般地，将一个 $m\times n$ 矩阵 A 用横线划分成 r 块，用竖线划分成 s 块，就得到一个 $r\times s$ 分块矩阵，通常记为

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) \end{array}=(A_{ij})_{r\times s},$$

其中元素 $A_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$ 是 $m_i\times n_j$ 矩阵，也称

它们为 A 的分块。由分块的方法知道，

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m,\ \sum_{j=1}^{s} n_j = n,$$

所以，只要不改变分块之间的相对位置，将 $(A_{ij})_{r\times s}$ 看作以数为元素的矩阵，它仍是原先的 $m\times n$ 矩阵 A。

最有用的一种分法是将一个 $m\times n$ 矩阵 A 分为 m 个行向量（$1\times n$ 矩阵）。在这种情况下，我们将 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 写成

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i=1, 2, \cdots, m$。

同样，可将矩阵分为 n 个列向量（$m\times 1$ 矩阵）。

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似，下面分别加以介绍。

设 A, B 都是 $m\times n$ 矩阵，对于 A 与 B 采用相同的分法，

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ & \cdots & \cdots & \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix} \\ \\ \end{array}$$

容易证明：

(1) $A=B \Leftrightarrow A_{ij}=B_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, r;\ j=1, 2, \cdots, s)$。

$$(2)\quad A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}.$$

$$(3)\quad kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ & \cdots & \cdots & \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{pmatrix}.$$

$$(4)\quad A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}.$$

必须注意，分块矩阵转置时，不仅每一行都要改为列，而且每一子块也要转置.

对于分块矩阵的乘法，有下面的结论.

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{jk})_{n\times p}$，若对 A，B 作如下分块

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ & \cdots & \cdots & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_r=m,$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_s=n,$$

$$p_1+p_2+\cdots+p_t=p,$$

则

$$AB=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ & \cdots & \cdots & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中 $C_{hq}=A_{h1}B_{1q}+A_{h2}B_{2q}+\cdots+A_{hs}B_{sq}$ $(h=1,2,\cdots,r;\ q=1,2,\cdots,t)$。

这条定理可以利用矩阵乘积的定义直接证明，这里就不详细说明了。

分块矩阵的乘法是最重要的一种分块矩阵的运算，定理 1 表明，用分块矩阵计算 AB 时，必须使 B 的行的分法与 A 的列的分法一致，然后按照矩阵乘法的规则进行计算，而将子块当作数那样对待。现在举一个例子说明。

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 AB。

解 利用式(1.10)可算出

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

如果矩阵 A，B 分别分块如下：

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ A_{21} & E \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

由定理 1 即得

$$AB=\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ A_{21} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{21}B_{12}+B_{22} \end{pmatrix}.$$

由于

$$A_{21}+B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

结果与前面相同.

刚才已经指出,对于任意一个矩阵,最有用的一种分法是按行(或列)分块,对于分块矩阵进行乘法运算是比较方便的. 例如,设 A是 $m\times s$ 矩阵, B 是 $s\times n$ 矩阵, 现在将矩阵 B 按列分块成 $1\times n$ 分块矩阵

$$B=(B_1,B_2,\cdots,B_n),$$

其中

$$B_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

而把 A 看成 1×1 分块矩阵，则

$$AB=A(B_1, B_2, \cdots, B_n)=(AB_1, AB_2, \cdots, AB_n).$$

对于 n 阶方阵 A 可能有一种分法：如果分法能使方阵 A 的主对角线以外的子块全部是零矩阵，且主对角线上子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 皆为方阵，则称 A 为**准对角矩阵**（或对角形分块阵）。当然，准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情况。

设 A, B 都是 n 阶方阵，有相同分法使得

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$$

都是准对角矩阵，那么显然有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s+B_s \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

§5.2 习　　题

1. 用矩阵的分块计算下列乘积.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

求：A^3, B^2.

3. 将下列各题中的矩阵分块后再作运算.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^5$.

§5.3 逆阵与初等变换

1. 逆阵

在§5.1中我们讨论了矩阵的加、减、乘运算，现在要问，矩阵有没有“除”的运算？本节仅就方阵来讨论这个问题。

对于数的除法，必须假定除数 $a\neq 0$，它的倒数 a^{-1} 才存在，并且满足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$。这时，任一个数 b 除以 a 可以表示为 $b\cdot\frac{1}{a}$。我们把这样的基本思想应用到矩阵上去。要定义方阵的逆，首先就要问，对于方阵 A，若 $A\neq\mathbf{0}$，是否存在方阵 B 使能 $AB=BA=E$？回答并不是肯定的，例如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A\neq\mathbf{0}$，但是，任意一个2阶方阵 B 都不能使 $AB=BA=E_2$，这是因为，AB 的(2.2)元素恒为0，而单位矩阵 E_2 的(2.2)元素必须为1。

定义1（逆阵） 设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使

$$AB=BA=E, \tag{3.1}$$

则称 B 为 A 的**逆阵**，记作 A^{-1}，并说 A 是**非异阵**或**可逆阵**。否则，便称 A 是**奇异阵**或**不可逆阵**。

由于 A、B 在式(3.1)中处于对称地位，故 A 非异时，其逆 B 也非异，而且 A 也就是 B 的逆阵，故可说 A，B 互为逆。例如，

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以这两个矩阵都是非异阵，而且互为逆。

定理 1 非异阵的逆阵是唯一的。

证 假设 B_1，B_2 都是非异阵 A 的逆阵，则

$$AB_1 = B_1A = E,\ AB_2 = B_2A = E,$$

$$B_1 = EB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2E = B_2.$$ □

逆阵有如下性质。

定理 2 设 A，B 都是可逆阵，数 $k\neq 0$，则 A^{-1}，kA，A^T，AB 均可逆，且有

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$，

(2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$，

(3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$，

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。 （注意顺序颠倒）

证 (2) 的证明只要利用逆阵的定义与数乘的性质即可，请读者自己完成，现在证明(1)，(3)，(4)。

证(1) 因 A 为可逆阵，便有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

根据定义，此式表明 A^{-1} 是可逆阵，而且 A 是它的逆阵，即

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

证(3) 由于 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$，所以

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

据转置矩阵的性质，可得

$$(A^{-1})^TA^T = A^T(A^{-1})^T = E.$$

再据逆阵的定义，知 A^T 可逆，且有

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

证(4)　因为 A、B 都是非异阵，故 A^{-1}、B^{-1} 都存在，又

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E,$$

根据逆阵的定义可知 AB 是可逆阵，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。　□

例 1　假设 n 阶方阵 A 中有一行(列)元素全为零，则 A 是奇异阵。

证　不妨假设 A 是下列形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任何 n 阶方阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

总有

$$AB=\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

故不存在矩阵 B 满足 $AB=E$，因而 A 是奇异阵。

例 2　设方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=\mathbf{0}$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}。

证　将所给的矩阵方程改写成

$$E=\frac{1}{2}A^2-\frac{3}{2}A=A\left(\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}E\right)=\left(\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}E\right)A, \quad (3.2)$$

令 $B=\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}E$，则 $AB=BA=E$，由逆阵的定义可知，A 可逆，且 B 是 A 的逆阵，即

$$A^{-1}=B=\frac{1}{2}(A-3E).$$

在例2的证明中，关键的一步是在式(3.2)中将A，A^2之和中提取出A作为乘积的因子，这一个技巧要特别注意。一般说来，利用逆阵的定义来求出可逆阵的逆阵并不容易，有时甚至很困难。因此，运用例2那样的做法还不能完全解决求逆阵的问题，我们将在下一段介绍利用初等变换求逆阵的方法，再在§5.6中对此作进一步的讨论。

2. 初等变换与初等阵

矩阵的初等变换起源于解线性方程组的消元法。然而，它的作用并不只限于解线性方程组，而是矩阵论中的一种基本方法。本段首先介绍矩阵的初等变换，然后引入初等矩阵，这样便可以用矩阵运算来表示矩阵的初等变换。最后给出用初等行变换求逆阵的方法。

以一个简单的例子作为引子。

例 3 解 3×3 方程组

$$\begin{cases}-3x+2y-8z=17\\ 2x-5y+3z=3\\ x+7y-5z=2.\end{cases}$$

解 采用熟知的加减消元法，有

$$\begin{cases}-3x+2y-8z=17 & ①\\ 2x-5y+3z=3 & ②\\ x+7y-5z=2 & ③\end{cases}\xrightarrow{①\leftrightarrow③}\begin{cases}x+7y-5z=2 & ①\\ 2x-5y+3z=3 & ②\\ -3x+2y-8z=17 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[③+3①]{②-2①}\begin{cases}x+7y-5z=2 & ①\\ -19y+13z=-1 & ②\\ 23y-23z=23 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{\frac{1}{23}③}\begin{cases}x+7y-5z=2 & ①\\ y-z=1 & ②\\ -19y+13z=-1 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}③]{③+19②}\begin{cases} x+7y-5z=2 \\ y-z=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

由此得到方程组的解为

$$x=1,\quad y=-2,\quad z=-3.$$

在解上面方程组的过程中，我们对方程组进行了三种变换：

1° 互换两个方程的位置(换法变换)；

2° 用一个非零的数乘某一方程(倍法变换)；

3° 把一个方程的倍数加到另一个方程上去(消法变换)。

我们把这三种变换叫做**线性方程组的初等变换**。显然，线性方程组经初等变换变成同解方程组。

变换一个线性方程组就相当于变换此方程组所对应的矩阵，仿照线性方程组的初等变换可以定义矩阵的初等变换。

定义 2 下列的三种变换，均称为矩阵的初等行(列)变换：

1° 互换矩阵两行(列)的元素(称为对行(列)的**换法变换**)；

2° 用一个非零的数乘矩阵某一行(列)的所有元素（称为对行(列)的**倍法变换**)；

3° 把矩阵某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上去(称为对行(列)的**消法变换**)。

初等行变换与初等列变换统称为**矩阵的初等变换**。

为了叙述方便，常用(i)表示矩阵 A 的第 i 行，用 $\overset{\frown}{j}$ 表示 A 的第 j 列。对矩阵 A 实行初等行变换时，用下列记号：

1° $(i)\leftrightarrow(j)$：表示互换 A 的第 i 行与第 j 行对应元素；

2° $k(i)$：表示用非零常数 k 乘 A 的第 i 行元素；

3° $(i)+k(j)$：表示第 i 行加上 k 乘第 j 行，即是将第 j 行元素的 k 倍加到第 i 行的对应元素上去。

对矩阵 A 实行初等列变换的记号，只要将行记号( )改成列记号$\overset{\smile}{\ }$。

例如，对例 3 的求解过程可用矩阵简写成

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -8 & 17 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & -19 & 13 & -1 \\ 0 & 23 & -23 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{\frac{1}{23}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -19 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}(3)]{(3)+19(2)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

为了使矩阵的初等变换与矩阵的乘法沟通起来，我们介绍一种特殊的矩阵——初等阵.

定义 3（初等阵） 单位矩阵 E 经过一次初等变换，所得的矩阵叫做初等矩阵，或简称为**初等阵**.

显然，初等阵都是方阵，每种初等变换都有一个与之对应的初等阵，分别表示如下：

1° 互换单位矩阵 E 的第 i 行与第 j 行的元素，得到方阵

$$P(i\leftrightarrow j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & \cdots\cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & \cdots\cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{列} \\ \\ \\ j\text{列} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

2° 将非零常数 k 乘单位矩阵 E 的第 i 行，得到方阵

$$P(k(i))=\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}i\text{列}\\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right.\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right)\\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ i\text{行}\end{matrix}.$$

3° 将单位矩阵 E 中第 j 行的 k 倍加到第 i 行，得到方阵

$$P((i)+k(j))=\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}i\text{列}\quad j\text{列}\\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right.\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right)\\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\end{matrix}\quad\text{或}$$

$$\begin{matrix}j\text{列}\quad i\text{列}\\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right.\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right)\\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ j\text{行}\\ \\ i\text{行}\end{matrix}.$$

对E实行一次初等列变换，同样得到上述三种形式的 初等阵，所以初等阵只有以上三种。

利用矩阵乘法的定义，可以得到以下定理。

定理 3 对于一个 $m\times n$ 矩阵 A 作一次初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶初等阵；对 A作一次初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶初等阵。

证 现在只看行变换的情形，列变换的情况可类似地证明。令$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是矩阵 A 的行向量，利用矩阵的分块乘法，可得

$$P(i\leftrightarrow j)A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots\cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & \cdots\cdots & 0 & \\ & & & \vdots & & \vdots & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & \uparrow & & \uparrow & & & 1 \\ & & & i & & j & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & \\ \vdots & \\ A_j & \leftarrow i\text{行} \\ \vdots & \\ A_i & \leftarrow j\text{行} \\ \vdots & \\ A_m & \end{pmatrix},$$

这相当于把矩阵 A 的第 i 行与第 j 行互换.

$$P(k(i))A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & i & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} i\text{行},$$

这相当于用 k 乘矩阵 A 的第 i 行.

对 $i<j$,

$$P((i)+k(j))A=\begin{pmatrix} & & & i & & j & \\ 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix},$$

对 $i > j$,

$$P((i)+k(j))A = \begin{pmatrix} & & j & & i & \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ kA_j + A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \end{matrix},$$

这相当于把 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行。 □

由定理 3 不难证明：

$$P(i \leftrightarrow j)P(i \leftrightarrow j) = E.$$

$$P(k(i))P\left(\frac{1}{k}(i)\right) = P\left(\frac{1}{k}(i)\right)P(k(i)) = E \quad (k \neq 0).$$

$$P((i)+k(j))P((i)-k(j)) = P((i)-k(j))P((i)+k(j)) = E.$$

由此可知初等阵都是可逆阵，且其逆阵是同类型的初等阵，即有

$$P(i\leftrightarrow j)^{-1}=P(i\leftrightarrow j).$$

$$P(k(i))^{-1}=P\left(\frac{1}{k}(i)\right)\quad (k\neq 0).$$

$$P((i)+k(j))^{-1}=P((i)-k(j)).$$

我们已经看到，用初等行变换可以化简矩阵，如果同时用行与列的初等变换，则矩阵还可以进一步化简成标准形.

定义 4（等阶） 如果矩阵 A 可以经过有限次初等变换化为矩阵 B，那么就说 A 与 B **等价**.

显然，矩阵的等价关系具有下面三条性质：

1° 自反性：A 与 A 等价；

2° 对称性：若 A 与 B 等价，则 B 与 A 等价；

3° 传递性：若 A 与 B 等价，B 与 C 等价，则 A 与 C 等价.

定理 4 任意非零 $m\times n$ 矩阵 A 都等价于矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\quad (1\leqslant r\leqslant \min(m,n)),$$

它称为矩阵 A 的**标准形**.

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$A\neq\mathbf{0}$，可设 $a_{11}\neq 0$，（因为若 $a_{11}=0$，总可用初等变换将 A 变为左上角元素非零的矩阵）. 将其余的行减去第一行的 $a_{11}^{-1}a_{i1}(i=2,\cdots,m)$ 倍，其余的列减去第一列的 $a_{11}^{-1}a_{1j}(j=2,\cdots,n)$ 倍，然后用 a_{11}^{-1} 乘第 1 行，可将 A 变换成形式

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵. 对 A_1 再重复以上的步骤，这样下去就可得到所要求的标准形. □

定理 4 的等价说法是：对任一非零 $m\times n$ 矩阵 A，总存在 $m\times m$ 初等阵 $P_1,\cdots,P_s$ 及 $n\times n$ 初等阵 $Q_1,\cdots,Q_t$，使得

$$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\tag{3.3}$$

其中 r 是适合 $1\leqslant r\leqslant\min(m, n)$的整数。

若令 $P=P_s\cdots P_1$, $Q=Q_1\cdots Q_t$, 因为初等阵是可逆的，它们的乘积也是可逆的，所以 P、Q 都是可逆阵。故得以下推论。

推论 对任一非零 $m\times n$ 矩阵 A，存在可逆的 $m\times m$ 矩阵 P 和可逆的 $n\times n$ 矩阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\quad 1\leqslant r\leqslant\min(m, n), \tag{3.4}$$

或写成

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1},\quad 1\leqslant r\leqslant\min(m, n)。 \tag{3.5}$$

3. 矩阵可逆的充要条件

定理 5 设 A 与 B 都是 n 阶方阵，若 $AB=E_n$，则 A 与 B 都是可逆阵，且它们互为逆阵。

证 由式(3.5)及 $AB=E_n$ 可得

$$P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}B=E_n,$$

其中 $P=P_s\cdots P_1, Q=Q_1\cdots Q_t, P_1, \cdots, P_s, Q_1, \cdots, Q_t$ 是 n 阶初等阵。上式左乘 P，得到

$$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}B=PE_n=P, \tag{3.6}$$

若 $r<n$，矩阵$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$中至少有一行元素全为零，从而式(3.6)等号左边的矩阵有一行元素全为零，据例 1 知它是奇异阵，这与 P 是非异阵矛盾，故 $r=n$。于是式(3.5)可写成

$$A=P^{-1}E_nQ^{-1}=P^{-1}Q^{-1}=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}, \tag{3.7}$$

所以，A 是可逆阵。

在等式 $AB=E_n$ 上左乘 A^{-1} 使得 $B=A^{-1}$，故 B 也是可逆阵，且 $B^{-1}=A$。 □

此定理表明，$AB=E$ 的充要条件是 $BA=E$，所以只要验证

$AB=E$(或 $BA=E$)，便知 A 与 B 都是可逆阵。

定理 6 设 A 为 n 阶方阵，则下列结论等价：

(1) A 是可逆矩阵。

(2) A 可表示为有限个初等阵的乘积。

(3) 存在有限个初等阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，使

$$P_s\cdots P_2P_1A=E_n,$$

即可作有限次初等行变换将 A 化为单位矩阵。

证 (1)⇒(2) 设 A 是可逆阵，存在矩阵 B 使 $AB=E_n$，据定理 5 式(3.7)有

$$A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}.$$

因为 $P_1^{-1}, \cdots, P_s^{-1}, Q_t^{-1}, \cdots, Q_1^{-1}$ 都是初等阵，故 A 可表示为有限个初等阵的乘积。

(2)⇒(3) 设 A 可表示为有限个初等阵 $Q_1, \cdots, Q_s$ 的乘积，

$$A=Q_1\cdots Q_s \tag{3.8}$$

因初等阵是可逆阵，记 $Q_i^{-1}=P_i(i=1, \cdots, s)$，则由式(3.8)得到

$$P_s\cdots P_2P_1A=Q_s^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}A=E_n.$$

(3)⇒(1) 设存在有限个初等阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，使

$$P_s\cdots P_2P_1A=E_n, \tag{3.9}$$

即有 $BA=E_n$，据定理 5 可知 A 可逆，而且

$$P_s\cdots P_2P_1E_n=A^{-1}. \tag{3.10}$$ □

4. 用初等变换求逆阵

比较式(3.9)与(3.10)便知道，初等行变换 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 将方阵 A 变成单位矩阵，同时它们也将单位矩阵 E 变成 A^{-1}。这就给出了利用初等行变换求逆阵的方法：若对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A|E)$ 只作初等行变换后能化成 $(E|B)$ 的形式，则 A 是可逆阵，而且 $A^{-1}=B$，即

$$(A|E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E|A^{-1}).$$

若 A 经过初等行变换不能变为 E，则 A 不可逆。

例 4 证明三阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

是可逆阵，并求其逆阵。

解

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)+(1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)+\frac{1}{2}(3)]{(1)-\frac{5}{2}(3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

由定理 6 可知，A 是可逆阵，而且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

上面的方法是只作初等行变换求矩阵的逆阵，同样，我们可以只作初等列变换求矩阵的逆阵。即有

$$AP_1\cdots P_s=E_n \quad 及 \quad E_nP_1P_2\cdots P_s=A^{-1},$$

因而作一个 $2n\times n$ 矩阵$\begin{pmatrix} A \\ \hline E_n \end{pmatrix}$，若对它实行初等列变换，使$A$变为$E_n$，则 E_n 变为 A^{-1}，即

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{经初等列变换}} \begin{pmatrix} E_n \\ \hline A^{-1} \end{pmatrix}.$$

如果 A 经过初等列变换不能变为 E_n，则 A 不可逆。作为练习，请读者用此方法来解例 4。

§5.3 习　　题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，求 $P(1\leftrightarrow 2)_{2\times 2}A$，$AP(3(k))_{3\times 3}$，以及 $P((1)+k(2))_{2\times 2}A$。

2. 设初等阵

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\k_3&0&0&1\end{pmatrix},$$

试求 $P_3P_2P_1$ 及其逆阵.

3. 下列矩阵 A, B, C, D 是否可逆？若可逆求其逆阵.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&5\\11&24\end{pmatrix}$.

(2) $B=\begin{pmatrix}2&6&5\\4&-1&6\\3&1&5\end{pmatrix}$.

(3) $C=\begin{pmatrix}3&2&8\\2&0&5\\0&4&1\end{pmatrix}$.

(4) $D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&6\\3&6&10&15\\1&4&10&20\end{pmatrix}$.

4. 设方阵 A 满足方程 $A^2-A-3E=0$，证明 $A-E$ 与 $A+E$ 都是非异阵，并求出它们的逆阵.

5. 设 A 是非异的反对称矩阵，则 A^{-1} 也是反对称阵阵.

6. 求方阵 X 使

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}.$$

7. 解矩阵方程 $(A+2E)X=C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

8. 试证可逆(左)下三角矩阵的逆阵也是(左)下三角矩阵.

9. 求方阵 X，使

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&1&&&0\\1&2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&2&\ddots&1\\0&&&1&2\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

10. 已知分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}B&\mathbf{0}\\C&D\end{pmatrix}$，其中 B、D 分别是 r 阶、s 阶非异方阵，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&\mathbf{0}\\-D^{-1}CB^{-1}&D^{-1}\end{pmatrix}.$$

§5.4　行列式及其性质

本节将介绍方阵的一个数学特征，即方阵的行列式，简称行列式，给出行列式的定义，性质与求其值的方法.

1. n 阶行列式

在初等代数里学过，当二阶行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4.1}$$

不等于 0 时，二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的解的公式为

$$x_1=\frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad x_2=\frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{4.2}$$

不等于 0 时，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

有唯一解，它可以按公式

$$x_1=\frac{\Delta_1}{D_3},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{D_3},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{D_3}$$

求得，其中 $\Delta_i(i=1,2,3)$ 分别表示 D_3 中将第 i 列的元素用常数项代替所得的行列式。

现在先看三阶行列式(4.2)右端的结构。

(1) (4.2)右端的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素分别取自行列式的不同行不同列，如果把它们的第一个下标(表示该元素所在的行)按照自然数顺序排列，则它的任意一项可写成 $a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列，第二个下标表示该元素所在的列。

(2) 由于 1，2，3 共有 $3!=6$ 个不同的排列，所以(4.2)右端共有六项。

(3) 这六项的每一项带有一个符号，而且第二个下标是 123，231，312时取正号；第二个下标是321，213，132时取负号。这两组排列区别在那里呢？为了说明这一点，必须引入 n 级排列与逆序数的概念。

定义 1（n 级排列） n 个自然数 1，2，…，n 按任意固定的顺序构成的一个排列称为 **n 级排列**。按自然顺序构成的 n 级排列 $(1,2,3,\cdots,n)$ 称为**自然排列**。

全部 n 级排列所成的集合记为 Π_n，因为不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，所以 Π_n 中有 $n!$ 个元素。

定义 2（逆序） 在一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中，如果 $i_r > i_s$，但是 $r<s$，即前面的数大于后面的数，就称这两个数构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**，记为 $N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$。

$$\begin{aligned} N(i_1, i_2, \cdots, i_n) = &(i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数}) \\ &+(i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数}) \\ &+\cdots\cdots \\ &+(i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数})。\end{aligned}$$

定义 3（奇、偶排列） 逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

现在，我们再回过头来考查三阶行列式的展开式中各项符号的取法，发现取正号项的元素第二个下标的排列(123，231，312)恰好都是偶排列，取负号元素第二个下标的排列(321，213，132)恰好都是奇排列．这样，我们把三阶行列式的结构就完全搞清楚了．于是，三阶行列式(4.2)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)\in \Pi_3} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\sum_{(j_1 j_2 j_3)\in \Pi_3}$ 表示对所有可能的排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和．

对二阶行列式(4.1)考察的结果表明，上述规律也成立．于是采用这个共性就把二阶、三阶行列式统一起来了．下面我们就根据这些规律给出 n 阶行列式的定义．

定义 4 (n 阶行列式) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵，它对应一个确定的数，称为 n 阶方阵的行列式，简称为 n 阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad |A| \quad \text{或} \quad \det A.$$

$|A|$的展开式定义为

$$|A| = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{4.3}$$

其中，符号 $\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)\in \Pi_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和．

换句话说，$|A|$的值是 $n!$ 项之和，每一项是取自 A 中不同行，不同列的 n 个元素的乘积，乘积前取正号或负号取决于排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列还是奇排列．

这里自然要产生一个疑问，是否与 D_2，D_3 的情形一样，在$|A|$的展开式(4.3)中，各项前面取正号与负号的项(不算元素本身所带的符号)各占一半呢？即在 n 级排列中奇、偶排列各占一半呢？

回答是肯定的。为此，先引进对换的概念。

定义 5 在一个排列中，将某两个数的位置互换，而其余数的位置不动，就得到了一个新的排列，这样的一个变换叫做**对换**。

关于对换有下面的性质：

定理 1 对换改变排列的奇偶性。

证 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 n 级排列。首先考虑特殊情况，就是所对调的是相邻的两个数 j_r 与 j_{r+1}，由于 j_r，j_{r+1} 与其它数是否构成逆序不会由于 j_r 与 j_{r+1} 的互换而改变，因此这种对换仅使原排列增加或减少了一个逆序，所以改变了排列的奇偶性。

其次，考虑一般情形，对换不相邻的两个数 j_r 与 j_{r+k+1}，即把

$$j_1 \cdots j_r j_{r+1} \cdots j_{r+k} j_{r+k+1} \cdots j_n \tag{4.4}$$

变成

$$j_1 \cdots j_{r+k+1} j_{r+1} \cdots j_{r+k} j_r \cdots j_n, \tag{4.5}$$

对换 j_r 与 j_{r+k+1} 可通过逐次对换相邻的数来实现。因为(4.4)中，把 j_{r+k+1} 依次与前面的相邻数对换 k 次，得到

$$j_1 \cdots j_r j_{r+k+1} j_{r+1} \cdots j_{r+k} j_{r+k+2} \cdots j_n,$$

再把 j_r 依次与后面相邻的数对换 $k+1$ 次就得到(4.5)。这样一共进行了 $2k+1$ 次相邻两数的对换，因而(4.4)与(4.5)的奇偶性相反。 □

现在可以用下面的定理来答复刚才所提出来的疑问。

定理 2 在 $n \geqslant 2$ 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各占一半$\left(\frac{1}{2}n!\text{个}\right)$。

证 设在 n 级排列中，共有 p 个奇排列，q 个偶排列，则 $p+q=n!$。若对 p 个奇排列同时对换 j_r、j_s，则可得 p 个不同的偶排列，它们都包含在 q 个偶排列中，故 $p \leqslant q$，即奇排列的个数不大于偶排列的个数。同样可证 $q \leqslant p$，从而 $p=q=\frac{1}{2}n!$。因为 $n \geqslant 2$，所以 $\frac{1}{2}n!$ 为整数。 □

例 1 计算右上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1n-1} \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 n 阶行列式，按定义，它的展开式中应该有 $n!$ 项，展开式的一般项是

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由于第 n 行除了 a_{nn} 外其余数全为 0，要得到非零数，第 n 行只能取 a_{nn}。第 $n-1$ 行可能取 $a_{n-1,n-1}$ 与 $a_{n-1,n}$，由于第 n 行已经取了第 n 列元素 a_{nn}，因此，第 $n-1$ 行只能取 $a_{n-1,n-1}$。逐步推上去，第二行，第一行分别取 a_{22}，a_{11}，因此在展开式中，只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$ 可能不等于 0，而这一项的列指标所成的排列是自然排列，逆序数为 0，所以这一项带正号，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{4.6}$$

与例 1 中的推理相仿可得左下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{4.7}$$

作为(4.6)与(4.7)的特殊情形，可以得到下面的结果：

(1) 对角矩阵的行列式的值等于它的所有主对角线元素的乘积，即

$$|\mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n)| = k_1 k_2 \cdots k_n.$$

(2) 单位矩阵的行列式的值是 1，即

$$|E_n| = 1.$$

(3) 第二种初等阵 $P(k(i))$ 的行列式的值为 $k(k\neq 0)$，即

$$|P(k(i))|=k.$$

(4) 第三种初等阵 $P((i)+k(j))$ 的行列式的值为 1，即

$$|P((i)+k))|=1.$$

例 2 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}.$$

解 用类似于例 1 的方法可得

$$|A|=(-1)^{N(n,n-1,\cdots 2,1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中，式(4.3)一般项中 n 个元素的行标是自然排列。但是数的乘法是可交换的，现将一般项中 n 个元素的乘积交换次序使列标成自然排列，即

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

由于每作一次元素间的换序，元素的行标与列标所成的排列 p_1，p_2，…，p_n 与 q_1，q_2，…，q_n 都随之同时作一次对换，据定理1，$N(p_1p_2\cdots p_n)$ 与 $N(q_1q_2\cdots q_n)$ 同时改变奇偶性，故它们之和的奇偶性不变，因此

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{N(12\cdots n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}$$

$$=(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)+N(q_1q_2\cdots q_n)}$$

$$=(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(12\cdots n)}$$

$$=(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

这样得到

$$|A|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in\Pi_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)\in\Pi_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots in)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

也就是说，在行列式的展开式定义中，每一项中 n 个元素的列标可

按自然顺序排列，而前面所带的符号由行标排列的奇偶性确定。因此有行列式展开式的等价定义。

定义 4′

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

从行列式的定义可以看出，一个 n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，而每一项都是 n 个数的乘积，所以共需做 $n!(n-1)$ 次乘法，同时还要确定每一项前带的正负号。除了二、三阶行列式以外，一般来说，直接用定义来计算行列式的值是很困难的，只有对一些特殊的行列式可用定义来计算。因此，必须讨论行列式的基本性质，用来简化行列式的计算，并可看出矩阵的初等变换对其行列式的值所产生的影响。

2. 行列式的性质

性质 1 任一方阵经转置后，其行列式的值不变，即

$$|A^T| = |A|.$$

这时 $|A^T|$ 叫做 $|A|$ 的转置行列式。

证 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$，$A^T = B = (b_{ij})$，则 $b_{ij} = a_{ji}$。由定义 4′，

$$\begin{aligned} |A^T| = |B| &= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \\ &= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

□

性质 1 说明了在行列式中，行、列的地位是平等的，因此，凡是对行成立的性质，对列也一定成立，反过来也如此。所以后面一些性质只对“列”进行讨论就可以了。

性质 2 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$，$C = (c_{ij})_{n\times n}$，对某一个 j 有 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$；当 $k \neq j$ 时，$a_{ik} = b_{ik} = c_{ik}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$|A| = |B| + |C|.$$

证 $$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_j j} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots (b_{i_j j} + c_{i_j j}) \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1, i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots b_{i_j j} \cdots a_{i_n n}$$

$$+ \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots c_{i_j j} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_j j} \cdots b_{i_n n}$$

$$+ \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \cdots c_{i_j j} \cdots c_{i_n n}$$

$$= |B| + |C|. \qquad \square$$

性质 3 如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中有两列相同，则 $|A|=0$。所谓两列相同就是说两列的对应元素相等。

证 假设

$$|A| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)\in \Pi_n} (-1)^{N(i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_r r} \cdots a_{i_s s} \cdots a_{i_n n} \quad (4.8)$$

中第 r 列与第 s 列相同，即

$$a_{kr} = a_{ks}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \quad (4.9)$$

为了证明式(4.8)等于零，只须证明式(4.8)右端所出现的项都可以两两相消。事实上，与项

$$(-1)^{N(i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_r r} \cdots a_{i_s s} \cdots a_{i_n n}$$

同时出现的还有

$$(-1)^{N(i_1 \cdots i_s \cdots i_r \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_s r} \cdots a_{i_r s} \cdots a_{i_n n},$$

比较这两项，由式(4.9)有

$$a_{i_r r} = a_{i_r s}, \quad a_{i_s s} = a_{i_s r},$$

也就是说，这两项有相同的数值，但是排列

$$i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n \quad 与 \quad i_1 \cdots i_s \cdots i_r \cdots i_n$$

相差一个对换，由定理 1 知，它们有相反的奇偶性，因而这两项的符号相反。因为对换把全部 n 级排列两两配对，所以式(4.8)的右端，对于每一项都有一数值相同，但符号相反的项与之成对出现，所以 $|A|=0$。 $\square$

性质 4 若把 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$按它的列分块，

$$A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n),$$

则
$$|\cdots k\alpha_j\cdots|=k|\cdots\alpha_j\cdots|,$$

这里 k 是任一非零常数，省略号表示不受影响的其它各列. 即

$$|AP(k(j))|=k|A|. \tag{4.10}$$

也就是说，行列式中某一列(行)元素有公因子可提列行列式外.

证
$$\begin{aligned}&|\cdots k\alpha_j\cdots|\\&=\sum_{(i_1\cdots i_n)\in\Pi_n}(-1)^{N(i_1\cdots i_j\cdots i_n)}a_{i1}\cdots(ka_{i_jj})\cdots a_{i_nn}\\&=k\Big(\sum_{(i_1\cdots i_n)\in\Pi_n}(-1)^{N(i_1\cdots i_j\cdots i_n)}a_{i_11}\cdots a_{i_jj}\cdots a_{i_nn}\Big)\\&=k|\cdots\alpha_j\cdots|.\end{aligned}$$

□

从性质 2～4 就可以推得行列式的其它一些性质.

性质 5 若 n 阶方阵 A 中某两列成比例，则 $|A|=0$.

证 设 $\alpha_r=k\alpha_s$，k 是某一个数，利用性质 4 和 3 便有

$$\begin{aligned}|A|&=|\alpha_1\cdots\alpha_r\cdots\alpha_s\cdots\alpha_n|=|\alpha_1\cdots k\alpha_s\cdots\alpha_s\cdots\alpha_n|\\&=k|\alpha_1\cdots\alpha_s\cdots\alpha_s\cdots\alpha_n|=k\cdot 0=0.\end{aligned}$$

□

性质 6 将 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的第 j 列的 k 倍加到第 i 列，则 $|A|$不变，即

$$|AP((i)+k(j))|=|A|. \tag{4.11}$$

证 仅对 $i<j$ 证明，$i>j$ 情况可类似证明. 利用性质 2 与 5 即得

$$\begin{aligned}|\cdots(\alpha_i+k\alpha_j)\cdots\alpha_j\cdots|&=|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots|+|\cdots k\alpha_j\cdots\alpha_j\cdots|\\&=|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots|.\end{aligned}$$

□

性质 7 互换 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$中第 i 与 j 列的位置，$|A|$的值改号，即

$$|AP(i\leftrightarrow j)|=-|A|. \tag{4.12}$$

证 由性质 3 与 2 便得

$$\begin{aligned}0&=|\cdots(\alpha_i+\alpha_j)\cdots(\alpha_i+\alpha_j)\cdots|\\&=|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_i\cdots|+|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots|+\end{aligned}$$

$$+\left|\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\right|+\left|\cdots\alpha_j\cdots\alpha_j\cdots\right|$$

$$=\left|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots\right|+\left|\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\right|,$$

因而 $$\left|\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots\right|=-\left|\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\right|.$$ □

下面举例说明怎样利用行列式的性质简化行列式的计算过程.

例 3 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&7&0&1\\2&5&6&7\\2&0&1&-1\end{vmatrix}.$$

解

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&7&0&1\\2&5&6&7\\2&0&1&-1\end{vmatrix}\underset{(4)-2(1)}{\overset{(2)-3(1)}{\overset{(3)-2(1)}{=}}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&-3&-2\\0&3&4&5\\0&-2&-1&-3\end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)-\frac{3}{4}(2)}{\underset{(4)+\frac{1}{2}(2)}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&-3&-2\\0&0&\frac{25}{4}&\frac{13}{2}\\0&0&-\frac{5}{2}&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)+\frac{2}{5}(3)}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&-3&-2\\0&0&\frac{25}{4}&\frac{13}{2}\\0&0&0&-\frac{7}{5}\end{vmatrix},$$

利用式(4.6)即得 $D_4=-35$.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 0, i=2,3,\cdots,n).$$

解 把 D_n 的第 i 行分别乘以 $-\dfrac{b_i}{a_i}$ $(i=2,\ 3,\cdots,n)$都加到第1行，便得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

利用式(4.7)便有

$$D_n=a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i}\right).$$

在上面两个例题中计算行列式的基本想法是，运用行列式性质 6 以及有关性质逐步把行列式化成上或下三角形行列式，从而求出其值，这就是常用的计算行列式的消元法。一般说来，应该针对每个行列式的特点，灵活地运用行列式的性质，可使某些行列式的计算大大简化。至此，我们已经介绍了计算行列式的两种方法，即按定义计算以及消元法。另外，还有一种常用的方法便是按行(列)展开，这就是把 n 阶行列式的计算化为 $n-1$ 阶行列式，再进行计算，通常叫做降阶法。它在理论推导中也很有用。

§5.4 习 题

1. 确定下列排列的逆序数，并指出是奇排列还是偶排列。

(1) 1473526,

(2) $n, n-1, n-2, \cdots 5, 4, 1, 2, 3$.

2. 确定下列各项前带什么符号。

(1) 在四阶行列式中 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$；

(2) 在五阶行列式中 $a_{15}a_{24}a_{32}a_{53}a_{41}$；

(3) 在六阶行列式中 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{14}a_{56}a_{65}$。

3. 写出五阶行列式中所是含 $a_{13}a_{32}$ 的项。

4. i, j, k 为何值时 $a_{1i}a_{25}a_{3j}a_{41}a_{5k}$ 带负号，何时带正号。

5. 求下列行列式的值。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$，

(2) $\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$，

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，

(4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$，

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$，

(6) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$，

(7) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$，

(8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 6 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -4 & 9 \end{vmatrix}$，

(9) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$，

(10) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

6. 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数。

7. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} \alpha a_2+a_3 & \beta a_3+a_1 & \gamma a_1+a_2 \\ \alpha b_2+b_3 & \beta b_3+b_1 & \gamma b_1+b_2 \\ \alpha c_2+c_3 & \beta c_3+c_1 & \gamma c_1+c_2 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix} = (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3),$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} by+ax & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+ax & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+ax \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

§5.5 行列式按行(列)展开

1. 行列式按一行(列)展开

行列式可按它的一行或一列展开，为此先引进余子式和代数余子式的概念.

定义1（子矩阵） 在 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 中，任取 r 行、s 列 $(1\leqslant r\leqslant m,\ 1\leqslant s\leqslant n)$，位于这 r 行 s 列交叉点上的元素，按原来在 A 中的相对位置构成 $r\times s$ 矩阵，称此矩阵为 A 的一个**子矩阵**.

例如，设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，由 A 中第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行，第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m;\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_s\leqslant n)$ 构成的子矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s} \end{pmatrix}.$$

当 $r=s=k$ 时，称它为 **k 阶子矩阵**，记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix},$$

称它的行列式 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$ 为 $|A|$ 的 **k 阶子式。**

定义 2（余子式） 在 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$ 中划去第 i 行第 j 列后所剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶子式

$$M_{ij} = \left|A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \end{pmatrix}\right|$$

叫做元素 a_{ij} 在 $|A|$ 中的**余子式**，而

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

叫做 a_{ij} 在 $|A|$ 中的**代数余子式**，这里 $1\leqslant i, j\leqslant n$。

例如，在四阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{14} 的余子式与代数余子式分别是

$$M_{14} = \left|A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}M_{14} = -M_{14}.$$

定理 1 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$ 等于任一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{5.1}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{5.2}$$

证 根据行列式性质 1，只要证明式(5.1)，现在分三步来证明。

第一步，考虑 $|A|$ 的第 1 行除 a_{11} 外，其余元素全为 0 的情况。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & \\ * & A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(1j_2\cdots j_n)\in \Pi n} (-1)^{N(1j_2\cdots j_n)} a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

$$= a_{11} \sum_{(j_2\cdots j_n)\in \Pi n-1} (-1)^{N(j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} \left| A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \right| = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

第二步，考虑$|A|$的第i行除a_{ij}外，其余元素全为0的情况。这时，先将a_{ij}的第i行依次与前一行互换，共互换了$i-1$次便调到第1行，于是a_{ij}便调到第$(1, j)$位置上；再将此行列式的第j列依次与前一列互换，共互换了$j-1$次便调列第1列，这样，元素a_{ij}就调到第(1,1)位置，利用行列式的性质，便得到

$$|A| = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & & 0 \\ * & A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1)(i+1) & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (j-1)(j+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

这里利用了前面已证明的结果。

第三步，考虑一般情况。根据行列式的性质2，便有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}. \qquad \square$$

定理2 n阶行列式$|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$的任一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j), \tag{5.3}$$

$$a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j). \tag{5.4}$$

证 下面只证式(5.3)，可类似推出式(5.4)。不妨设$i<j$，将行列式$|A|$的第j行去掉，换成$|A|$的第i行，便得到一个有两行完全相同的行列式

$$|A_1| = \begin{vmatrix} & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix},$$

按照行列式的性质3，$|A_1| = 0$；另一方面，将行列式$|A|$按第j行展开，由于$|A_1|$与$|A|$的第j行元素具有相同的代数余子式，由式(5.1)便得

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A_1| = 0,$$

于是式(5.3)成立. □

如果利用克罗内克记号，式(5.1)与(5.3)以及(5.2)与(5.4)分别写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |A|\delta_{ij}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = |A|\delta_{ij}. \tag{5.6}$$

将定理1与行列式的性质配合使用，可进一步简化行列式的计算.

例1 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开，得

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2},$$

这是一个递推公式，可将它改写成

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2},$$

继续使用它递推下去，由于$D_1 = 2$，$D_2 = 3$，故得

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1$$

因此有

$$D_n = 1 + D_{n-1} = 2 + D_{n-2} = \cdots = (n-1) + D_1$$
$$= n - 1 + 2 = n + 1.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ & & \cdots\cdots & & \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将行列式 D_n 的第 n 行中的 x 写成 $(x+a)-a$，$-a$ 写成 $0-a$，利用行列式性质 2，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0-a & 0-a & 0-a & \cdots & (x+a)-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ & \cdots & & \cdots & \\ -a & -a & -a & \cdots & -a \end{vmatrix}$$

$$= (x+a)D_{n-1} - a \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & -a & x & a \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

如果在上式右端的行列式中，第 1 行到第 $n-1$ 行分别加上第 n 行的 $-a$ 倍，便有

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -2a & x-a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2a & -2a & \cdots & -2a & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1},$$

于是得到递推公式

$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}.$$

将 D_n 中的矩阵转置，即将 D_n 中的 a 与 $-a$ 对调，可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}.$$

将上面两式联立消去 D_{n-1} 便得

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

例 3 证明 n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j), \quad (5.7)$$

其中连乘积 $\prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)$

$$\cdot (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdot (x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积.

证 用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时,

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论成立. 假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立, 下面证明对 n 阶范德蒙行列式结论也成立.

在 V_n 中,从末行起,各行减去前一行的 x_1 倍,得到

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

按第一列展开,并分别提取公因子,便有

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ & \cdots & \cdots & \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式,据归纳假设得

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同,试解方程

$$P(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}=0.$$

解 $P(x)$是 x 的不多于 n 次的多项式,由于 x^n 的系数 D_n 正好是 n 阶范德蒙行列式,由式(5.7)知 $D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$, 因为

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同，故 $D_n \neq 0$，因此 $P(x)$ 是 n 次多项式，它有 n 个根。利用多项式的因式定理：对多项式 $f(x)$，若用 $x=a$ 代入得到 $f(a)=0$，则 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式。今将 x 分别用 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 代入 $P(x)$，所得到的行列式有两行相同，故此行列式的值为零。因而 $P(x)$ 被 $x-a_1, x-a_2, \cdots, x-a_n$ 整除，所以 $P(x)=0$ 的全部解是 $x=a_1, a_2, \cdots, a_n$。

*2. 拉普拉斯展开定理

现在我们将行列式按某一行或列的展开式加以推广，即讨论按数行或数列来展开行列式的问题。

定义 3 设 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$ 是 n 阶行列式 $|A|$ 的 k 阶子式，$1 \leqslant k \leqslant n-1$，在 $|A|$ 中划去第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行与第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列的元素，剩下的元素按原来相对位置所排成的一个 $n-k$ 阶行列式，记为 $\left|M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$，并称它为 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$ 在 $|A|$ 中的**余子式**，称 $n-k$ 阶行列式

$$\left|\hat{M}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right| = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\left|M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$$

为 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right|$ 在 $|A|$ 中的**代数余子式**。

例如，在行列式 $|A| = |a_{ij}|_{4\times 4}$ 中，2 阶子式

$$\left|A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

的余子式是

$$\left|M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

而代数余子式是

$$\left|\hat{M}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right|=(-1)^{(1+3)+(3+4)}\left|M\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right|=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix}.$$

定理 6（拉普拉斯(Laplace)定理） 设 A 是 n 阶方阵，在 $|A|$ 中任意取定 k 个行，设其行号含于 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，则

$$|A|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{M}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|. \tag{5.8}$$

类似地，在 $|A|$ 中任意取定 k 个列，设其列号含于 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$，则

$$|A|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{M}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|. \tag{5.9}$$

这就是说，任意一个 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的位于同 k 个行(列)的 C_n^k 个 k 阶子式乘以其相应的代数余子式之和。称式(5.8)为行列式 $|A|$ 按它的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行的展开式，称式(5.9)为行列式 $|A|$ 按它的列 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 的展开式。

这个定理的证明比较复杂，故略去。

当 $k=1$ 时，拉普拉斯定理就是行列式按某一行(列)的展开式，所以拉普拉斯定理是行列式按一行(列)展开的推广，它是行列式按数行(列)的展开式。它可以把 n 阶行列式的计算化成 C_n^k 个 k 阶与 C_n^k 个相应的 $n-k$ 阶子式的计算，特别是当选定的 k 行(列)中，只有少数几个不为零，而其余的子式全为零时，n 阶行列式的计算就大大简化了。

例 5 用拉普拉斯定理计算

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & & & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & \\ & 1 & 2 & 3 & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 将$|A|$按第1，2行展开，得

$$|A|=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(8-6-6)-6\times(4-3)+0=-10.$$

例6 证明

$$D_{r+s}=\begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix}=|A||B|, \tag{5.10}$$

其中$A=(a_{ij})_{r\times r}$，$B=(b_{ij})_{s\times s}$，$c=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ & \cdots & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} \end{pmatrix}$.

证 $r+s$阶行列式D_{r+s}中前r列所含的r阶子式，除$|A|$外全为零，而$|A|$的代数余子式是

$$(-1)^{(1+\cdots+r)+(1+\cdots+r)}|B|=|B|,$$

利用拉普拉斯定理即得式(5.10)。

§5.5 习 题

1. 试用数学归纳法证明

其中 $$I_{n+1}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$I_{n+1}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

2. 证明 $I_n=a_nI_{n-1}+I_{n-2}$，这里

$$I_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

3. 证明

$$I_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & ab & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\quad(a\neq b).$$

4. 用数学归纳法证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\cos n\theta.$$

5. 计算下列行列式：

(1) $$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}.$$

提示：利用行列式各行元素之和相同。

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

提示：以第一行的元素乘(-1)加到其它各行，并依次在各列提出公因子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

6. 试证：

(1) $\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} = ax_1x_2\cdots x_n$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = (x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$.

7. 利用范德蒙行列式计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

8. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & a & b & \\ & b & a & \\ \iddots & & & \ddots \\ b & & & a \end{vmatrix}_{\substack{n\text{行} \\ (n+1)\text{行}}} \quad (a\neq b, a\neq 0, b\neq 0).$$

§5.6　用行列式求逆阵　克莱姆法则

1. 用行列式求逆阵

作为准备工作先讨论方阵乘积的行列式。

定理 1　设 P 是 n 阶初等阵，A 是任意 n 阶方阵，则

$$|AP| = |A||P|,\quad |PA| = |P||A|. \tag{6.1}$$

证　先证明第一个等式。这个初等阵 P 无非是三种初等阵 $P(i\leftrightarrow j)$，$P(k(i))$ $k\neq 0$ 和 $P((i)+k(j))$之一，据 §5.4 行列式的性质 4，6，7，在式(4.10)—(4.12)中令 $A=E_n$，则得

$$|P(k(j))| = k,\quad |P((i)+k(j))| = 1,\quad |P(i\leftrightarrow j)| = -1.$$

将它们代回式(4.10)—(4.12)，得到

$$|AP(k(j))| = |A||P(k(j))|.$$

$$|AP((i)+k(j))| = |A||P((i)+k(j))|,$$

$$|AP(i\leftrightarrow j)| = |A||P(i\leftrightarrow j)|.$$

第一个等式得证。第二个等式可利用行列式的性质 1 从第一个等式推出，

$$\begin{aligned}|PA| &= |(PA)^T| = |A^TP^T| = |A^T||P^T|\\ &= |A||P| = |P||A|,\end{aligned}$$

这里用到初等阵 P 的转置矩阵 P^T 仍是初等阵。　□

定理 2（行列式乘法规则）　设 A 与 B 是任意两个 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A||B|. \tag{6.2}$$

证　下面分两种情况进行讨论。

(1) 若 B 是非异阵，由 §5.3 定理 6 知，B 可表示为有限个初等阵之积 $B=P_1P_2\cdots P_s$，于是连续利用式(6.1)及矩阵乘法的结合律，即得

$$\begin{aligned}|AB| &= |AP_1P_2\cdots P_s| = |A||P_1||P_2|\cdots|P_s|\\ &= |A||P_1P_2\cdots P_s| = |A||B|,\end{aligned}$$

类似可证 $|BA| = |B||A|$，因式，对非异阵 B 而言必有

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$$

(2) 若 B 是奇异阵，由 §5.3 定理 4 推论可知，存在 n 阶非异阵 P 与 Q 使得

$$B = P\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q,$$

这里必有 $r<n$，因为，否则 B 将是非异阵，这与假设矛盾．利用式(6.1)可得

$$|B| = |P| \begin{vmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} |Q| = 0 \tag{6.3}$$

以及

$$|AB| = \left| AP\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \right| = \left| AP\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| |Q|.$$

由于 $r<n$，$AP\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$的最后一列元素必全为0，其行列式之值等于0，故 $|AB| = 0$，式(6.2)也成立． □

定理 3 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \tag{6.4}$$

其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

叫做 A 的**伴随矩阵**．

证 必要性 若 A 可逆，则存在 B 使 $AB = E_n$，由式(6.2)知 $|AB| = |A||B| = 1$，故必有 $|A| \neq 0$．

充分性 若 $|A| \neq 0$，利用§5.5式(5.5)与(5.6)可得到

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ & & \ddots \\ 0 & & |A| \end{pmatrix} = |A| E,$$

即
$$A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E,$$
由此可知 A 可逆，且
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*. \qquad \square$$

定理 3 给出了用行列式求逆阵的一种方法。

例 1 判断方阵
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$$
是否可逆？若可逆求其逆阵。

解 因为
$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,$$
所以 A 可逆。计算 $|A|$ 的各元素的代数余子式得
$$A_{11}=2,\quad A_{21}=6,\quad A_{31}=-4,$$
$$A_{12}=-3,\quad A_{22}=-6,\quad A_{32}=5,$$
$$A_{13}=2,\quad A_{23}=2,\quad A_{33}=-2,$$
于是
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&3&2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

下面我们将利用式 (6.4) 来讨论用行列式解线性代数方程组的问题。

2. 克莱姆(Cramer)法则

设 n 元线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{6.5}$$

写成矩阵方程的形状为

$$Ax = b,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是(6.5)的**系数矩阵**，**增广矩阵为** $\overline{A} = (A, b)$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 与 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 为 n 维列向量，分别称为(6.5)的**未知向量**与**常数向量**. 若(6.5)的常数向量不为 **0** 向量，则称(6.5)为**非齐次线性方程组**.若为 **0** 向量，即

$$Ax = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

叫做**齐次线性方程组**. 如果(6.5)有解 $x_1 = C_1, x_2 = C_2, \cdots, x_n = C_n$，即把它们代入(6.5)后使其成为恒等式，则称 $C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^T$ 为(6.5)的一个**解向量**.

定理 4（克莱姆法则） 设 n 元线性代数方程组(6.5)的系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$，则方程组(6.5)有唯一解

$$x_j = \frac{1}{|A|} D_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{6.7}$$

其中 D_j 是将 $|A|$ 的第 j 列换成 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 所得的行列式.

证 因为 $|A| \neq 0$，据定理 3，A 可逆，且存在唯一的逆阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

在方程组(6.5)的矩阵形式 $Ax = b$ 的两边左乘 A^{-1}，得到其唯一解

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} A^* b,$$

写成分量形式即为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix},$$

从而得到

$$x_j = \frac{1}{|A|}D_j, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

这里用到了行列式 D_j 按第 j 列的展开式

$$D_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}. \qquad \square$$

注意，$Ax=b$ 的解的公式(6.7)就是 §5.4 中所说的$n=2$，3时解的公式的推广。

根据克莱姆法则立即可得以下推论。

推论 若$|A|\neq 0$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$，只有零解。

或者说，若齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解，则 $|A|=0$。

例 2 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_2 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

解 系数矩阵的行列式及 D_j 为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 46,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -46,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 46,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 92,$$

故得解为

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

值得注意的是，克莱姆法则只适用于方程的个数等于未知量的个数，而且其系数行列式不为零的情况。对于方程的个数与未

知量的个数不相等，或者即使二者相等，但其系数行列式等于零的情形就不能直接使用克莱姆法则．还需要指出，克莱姆法则在理论上是很有意义的，但是在实际应用上并不方便．我们将在§5.9介绍解一般线性方程组的方法．

§5.6 习　　题

1．设

$$A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

计算$|A|^2$，$|A|$．

2．设n阶方阵A是非异的，则

(1) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$，　　(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$．

3．设A为三阶方阵，$|A|=3$，$B=[2(A^{-1})^2-(2A^2)^{-1}]$，求$|B|$的值．

4．利用克莱姆法则解方程组．

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+7x_4=14, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+cay+abz=3abc, \end{cases}$ （a，b，c为互不相等的实数）．

(4) $\begin{cases} ax_1+ax_2+ax_3+ax_4+bx_5=a_5, \\ ax_1+ax_2+ax_3+bx_4+ax_5=a_4, \\ ax_1+ax_2+bx_3+ax_4+ax_5=a_3, \\ ax_1+bx_2+ax_3+ax_4+ax_5=a_2, \\ bx_1+ax_2+ax_3+ax_4+ax_5=a_1, \end{cases}$ 这里$a\neq b$，$4a+b\neq 0$．

5．求一个二次多项式$f(x)$使$f(1)=-1$，$f(-1)=9$，$f(2)=-3$．

6. 求通过不在一直线的三个点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$的圆的方程。

§5.7 向量组的线性无关

前六节我们介绍了矩阵与行列式的最基本内容，§5.9将完整地解决一般的线性代数方程组的求解问题，本节与下节先对求解问题的核心概念——向量组的线性无关与矩阵的秩作一些讨论。

1. n 维向量

在上一章中，我们讨论了三维空间中两个三维向量之间最简单的关系是成比例。所谓向量a与b成比例，就是说存在一个数λ使

$$a = \lambda b,$$

有时把这个关系叫做 a 与 b 线性相关。我们可以将线性相关这一概念推广到多个向量即向量组的线性相关，先定义 n 维向量。

所谓 **n 维向量**是指一个有序 n 元数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。n 维向量用希腊字母 α、β、γ、… 来表示。a_i 叫做此向量的第 i 个**分量**。根据向量的定义，两个 n 维向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

限且仅限于同位置的分量互相重合，换句话说就是$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$的时候，叫做**相等**，记作 $\alpha = \beta$。

和三维向量一样，对 n 维向量可定义线性运算：

I. $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

II. $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$。

从这个定义可推出n维向量所满足的8条运算规律$\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$, $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_4$。

由数乘的定义还可以推出四条性质：

(1) $0\alpha=\mathbf{0}$.

(2) $(-1)\alpha=-\alpha$.

(3) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 若 $\lambda\alpha=\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$，或 $\alpha=\mathbf{0}$.

2. 线性相关与线性无关

定义 1 设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $r+1$ 个 n 维向量，如果存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,$$

则称 α 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的**线性组合**，或者说 α 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表示**，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 叫做**表示系数**.

例 1 任意一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组

$$e_1=(1,0,\cdots,0)$$

$$e_2=(0,1,\cdots,0)$$

……

$$e_n=(0,0,\cdots,1)$$

的一个线性组合.

这是因为

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n.$$

$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 都称为 n **维单位向量**.

定义 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都是 n 维向量，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}, \tag{7.1}$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性相关**；否则，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性无关**或**线性独立**，就是说，或(7.1)成立仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

注意，在线性相关的定义中，“不全为零”是必需的，否则，任意向量组都满足式(7.1)了. 而在线性组合的定义中，那些表示系数

k_i 却可以全为零，事实上，零向量是任意向量组的线性组合。

例 2 证明：(1)一个向量 α，若 $\alpha=\mathbf{0}$ 必线性相关；若 $\alpha\neq\mathbf{0}$，则线性无关。

(2) 2个非零向量 α，β 线性相关$\Leftrightarrow\alpha=k\beta\Leftrightarrow$对应分量成比例。

(3) m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中若含有零向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关。

(4) m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中，若有两个相同，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关。

证 (1) 对 $\alpha=\mathbf{0}$，则存在 $k\neq0$，使 $k\alpha=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$，所以线性相关；对 $\alpha\neq\mathbf{0}$，则由 $k\alpha=\mathbf{0}$ 可得 $k=0$，所以线性无关。

(2) 若非零向量 α 与 β 线性相关，则存在不全为 0 的常数 k_1，k_2，使

$$k_1\alpha+k_2\beta=\mathbf{0}.$$

若 $k_1=0$，则得 $k_2\beta=\mathbf{0}$，而 $\beta\neq\mathbf{0}$ 可推出 $k_2=0$，与 k_1，k_2 不全为 0 矛盾，故有 $k_1\neq0$，因此可得

$$\alpha=-\frac{k_2}{k_1}\beta=k\beta\quad\left(k=-\frac{k_2}{k_1}\right).$$

若 $\alpha=k\beta$，即有 $\alpha+(-k)\beta=\mathbf{0}$，由定义知 α 与 β 线性相关。

(3) 不妨设 $\alpha_1=\mathbf{0}$，则存在不全为零的常数 1，0，…，0，有

$$1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_n=\mathbf{0},$$

所以 α_1，α_2，…，α_m 线性相关。

(4) 不妨设 $\alpha_1=\alpha_2$，则存在不全为 0 的常数 1，-1，0，…，0，有

$$1\cdot\alpha_1+(-1)\alpha_2+0\cdot\alpha_3+\cdots+0\cdot\alpha_m=\mathbf{0},$$

所以 α_1，α_2，…，α_m 线性相关。 □

在定义 2 中，如果将向量 α_1，α_2，…，α_r 用分量写出，即

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ (i=1,2,\cdots,r),$$

则向量方程 (7.1) 可写成方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \cdots + a_{rn}k_r = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

或用和号表示为

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}k_i = 0, \quad j = 1, 2, \cdots n.$$

故得到定义 2 的等价说法如下：

定理 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性代数方程组(7.2)只有零解；向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是方程组(7.2)有非零解。

例 3 证明 n 维向量组

$$\alpha_1 = (a_1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, a_2, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$$

$\cdots\cdots$

$$\alpha_m = (0, 0, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0)$$

线性无关，其中 $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, $m \leqslant n$。

特别，个数小于等于维数的 n 维单位向量组必线性无关。

证 将等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

写成分量方程组即是

$$k_1a_1 = 0, k_2a_2 = 0, \cdots, k_ma_m = 0,$$

由于 $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0,$$

据定理 1 知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。 □

例 4 设向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, \cdots, r)$$

线性无关，则在每一个向量添一个分量，而把它变成 $n+1$ 维(延长)向量组

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},a_{in+1})\quad(i=1,\cdots,r)$$

也线性无关.

证 利用定理1，这时齐次线性方程组(7.2)只有零解. 在方程组(7.2)的基础上，再加上一个方程

$$a_{1,n+1}k_1+a_{2,n+1}k_2+\cdots+a_{r,n+1}k_r=0$$

所组成的方程组显然也只有零解，因而

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=\mathbf{0}$$

只有零解，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关. □

注意，这个结果可以推广到添加若干个分量的情况.

定理2 $r(\geqslant 2)$个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关的充要条件是，至少有某个向量 α_i 是其余向量的线性组合.

证 必要性 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则在式(7.1)中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为0，不妨设 $k_i\neq 0$，于是式(7.1)可以写成

$$\alpha_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\alpha_1+\cdots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\alpha_{i-1}+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\alpha_{i+1}$$
$$+\cdots+\left(-\frac{k_r}{k_i}\right)\alpha_r,$$

这就是说，向量 α_i 是其余向量的线性组合.

充分性 设

$$\alpha_i=c_1\alpha_1+\cdots+c_{i-1}\alpha_{i-1}+c_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+c_r\alpha_r,$$

则

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_{i-1}\alpha_{i-1}+(-1)\alpha_i+c_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+c_r\alpha_r=\mathbf{0}.$$

由于 $c_1,\cdots,c_{i-1},-1,c_{i+1},\cdots,c_r$ 不全为0(至少$-1\neq 0$)，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r$ 线性相关. □

推论 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i(r\geqslant 2)$中任一向量都不能按其余向量线性表出，则此向量组线性无关.

下面介绍向量组常用的两个性质.

定理3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 是两个 n 维向量组，如果前者线性相关，则后者也线性相关. 换言之，若后者线性无关，则前者也线性无关. (为了便于记忆，我们将此定理

概括为“部分相关整体也相关，整体无关部分也无关”的规则）

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

于是由

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\cdot\alpha_s = \mathbf{0}$$

可知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，因为 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 仍是不全为零。 □

由例 1 的启发，猜想：任意 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。有以下定理。

定理 4 任意 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

证 如果 $n+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 中有一个零向量，据例 2 知这组向量线性相关。故可设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 中没有一个零向量。下面用数学归纳法证明。

当 $n=1$ 时，设有两个一维向量 $\alpha_1=(a)$，$\alpha_2=(b)$，$ab\neq 0$。则 $-b\alpha_1 + a\alpha_2 = 0$，因此，$\alpha_1$ 与 α_2 线性相关。

现假定对 k 个 $k-1$ 维向量定理成立，我们来证明，对于 $k+1$ 个 k 维向量定理也成立。

设有 $k+1$ 个 k 维向量

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}), \quad i = 1, \cdots, k, k+1,$$

任取其中一个如取 α_1，由于 $\alpha_1\neq 0$，不妨令 $a_{1k}\neq 0$，我们来构造 k 个 $k-1$ 维向量 γ_i。作

$$\beta_i = \alpha_i - \frac{a_{ik}}{a_{1k}}\alpha_1 = (b_{i1}, \cdots, b_{ik-1}, 0), \quad i = 2, \cdots, k+1,$$

令

$$\gamma_i = (b_{i1}, \cdots, b_{i,k-1}) \quad (i = 2, \cdots, k+1),$$

它们是 k 个 $k-1$ 维向量，由归纳假设知，它们是线性相关的，即存在不全为 0 的数 $c_2, c_3, \cdots, c_{k+1}$，使得

$$c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + \cdots + c_k\gamma_k + c_{k+1}\gamma_{k+1} = \mathbf{0},$$

即有

$$c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + \cdots + c_{k+1}\beta_{k+1} = \mathbf{0}.$$

或者

$$-\left(\frac{a_{2k}c_2}{a_{1k}}+\cdots+\frac{a_{kk}c_k}{a_{1k}}+\frac{a_{k+1,k}c_{k+1}}{a_{1k}}\right)\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{k+1}\alpha_{k+1}$$
$$=0.$$

由于 $c_2,\cdots,c_{k+1}$ 不全为 0，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1}$ 线性相关。 □

推论 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则它们必定线性相关。也就是说，向量个数大于向量维数的向量组必为线性相关组。

3. 等价向量组

定义 3 设两个向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r, \tag{I}$$

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \tag{II}$$

当向量组(I)中每一个向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 都可被向量组(II)线性表示，则称向量组(I)可被向量组(II)线性表出，若向量组(II)也可被向量组(I)线性表示。则称此二向量组**等价**。

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，即有下式成立：

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1s}\beta_s\\
\alpha_2&=a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2s}\beta_s\\
&\cdots\cdots\\
\alpha_r&=a_{r1}\beta_1+a_{r2}\beta_2+\cdots+a_{rs}\beta_s
\end{aligned} \tag{7.3}$$

为了书写方便，将上式用矩阵乘积的形式表示为

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\ &\cdots&\cdots&\\ a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix} \tag{7.4}$$

例如

$$\alpha_1=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,$$
$$\alpha_2=3\beta_1+2\beta_2+\beta_3,$$

可写成

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}.$$

单独的一个向量 α_1 也可写成

$$\alpha_1=(1,2,3)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}.$$

对于这种形式的记法，以后常会用到，读者定要掌握。

定理 5 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可被向量组 $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，而向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 又可被向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性表示，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也可被向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性表示。

证 令 $A=(a_{ij})_{r\times s}$，$B=(b_{jk})_{s\times t}$，利用式(7.4)得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix},\tag{7.5}$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_t\end{pmatrix}.\tag{7.6}$$

将式(7.6)作为矩阵等式代入式(7.5)，便有

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=A\left(B\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_t\end{pmatrix}\right)=(AB)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_t\end{pmatrix}.$$

因此，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可被向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性表示，其中 α_i 的表示系数是矩阵 AB 的第 i 行元素。 □

据定义 3 与定理 5，容易证明向量组的等价关系有以下性质：

1° 自反性：每一个向量组都与自身等价。

2° 对称性：如果向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价，则向量组(Ⅱ)与向量组(Ⅰ)等价。

3° 传递性：如果向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价，向量组(Ⅱ)与向量组(Ⅲ)等价，则向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅲ)等价。

请读者自己证明

在考虑两个向量组之间的线性关系时，下面的定理起着重要的作用。

定理 6 给定两个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \tag{Ⅰ}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \tag{Ⅱ}$$

如果

(1) 向量组(Ⅰ)可被向量组(Ⅱ)线性表示；

(2) $r>s$。

则向量组(Ⅰ)必线性相关。

证 欲证向量组(Ⅰ)线性相关，只要证明存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

事实上，由于向量组(Ⅰ)可被向量组(Ⅱ)线性表示，即有

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1s}\beta_s, \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2s}\beta_s, \\ \cdots\cdots \\ \alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \cdots + a_{rs}\beta_s, \end{cases} \tag{7.7}$$

上式的系数构成了 r 个 s 维向量的一个向量组

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1s}), \\ \gamma_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2s}), \\ &\cdots\cdots \\ \gamma_r &= (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rs}). \end{aligned} \tag{Ⅲ}$$

因为 $r>s$，向量个数大于向量维数的向量组(Ⅲ)必线性相关，由定理 1 知，齐次方程组

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}k_i = 0,\quad j = 1, 2, \cdots, s \tag{7.8}$$

有非零解 $k_1, k_2, \cdots, k_r$. 又据式(7.7)和(7.8)可得

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} k_i a_{ij}\beta_j$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}\right)\beta_j = \mathbf{0},$$

因此,存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = \mathbf{0},$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关. □

推论 1 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表示,且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,则 $r \leqslant s$.

这只不过是定理 6 的另一说法而已.

推论 2 等价的两个线性无关的向量组所含向量的个数必相等.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是两个等价的线性无关向量组,由推论 1 知 $r \leqslant s$, 且 $s \leqslant r$, 因而 $r = s$. □

4. 向量组的极大无关组与秩

定义 4 若一个向量组中有部分向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 具有下面两个性质:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,

(2) 从这向量组中任意添一个向量(如果还有的话)所得的部分向量组都线性相关,则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是原向量组的**极大线性无关组**,简称**极大无关组**.

例 5 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_3 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_4 = (5, 7, 9, 11)$, $\alpha_5 = (7, 10, 13, 16)$, 由 α_1, α_2 组成的部分组就是一个极大无关组.

事实上,首先,容易看出 α_1, α_2 线性无关, 因为 α_1 与 α_2 的分

量不成比例.其次，$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=3\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2$.由此可见，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 都线性相关.

不难看出，α_1,α_3；α_1,α_4；α_1,α_5；也都是其极大无关组.

应该注意，一个线性无关向量组的极大无关组就是这个向量组自身.

从例 5 可见，一个向量组的极大无关组不是唯一的. 但是，极大无关组所包含的向量个数是否唯一？这个问题当我们证明了下面的定理后就清楚了.

定理7 向量组的任意一个极大无关组都与向量组本身等价.

证 设向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个极大无关组. 所谓向量组等价就是它们之间可以互相线性表示，由于

$$\alpha_i=0\cdot\alpha_1+\cdots+1\cdot\alpha_i+0\cdot\alpha_{i+1}+\cdots+0\cdot\alpha_s \quad (i=1,2,\cdots,r),$$

因而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以被原向量组线性表出.

反之，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s$ 也可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 实际上，向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中每一个向量都可以写成$\alpha_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$，而 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 中的任一向量，记为 α_j，由极大无关组的定义知，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_j$ 线性相关，即存存不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_r,k_j$，使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_j\alpha_j=\mathbf{0},$$

其中 $k_j\neq 0$，否则，$k_j=0$，则 $k_1,\cdots,k_r$ 就不全为 0，于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾. 因此，上式可写成

$$\alpha_j=-\frac{k_1}{k_j}\alpha_1-\frac{k_2}{k_j}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k_j}\alpha_r \quad (r<j\leqslant s),$$

即 $\alpha_j(r<j\leqslant s)$可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，于是证明了原方程组与它的极大无关组的等价性. □

推论 1 在一个向量组中，它的任意两个极大无关组所含向量个数相同.

证 因为任意两个极大无关组都与原向量组等价，利用等价

的传递性可知，它们彼此也等价．再由定理 6 的推论 2，它们所含向量个数相同． □

这样就回答了我们前面提出的问题：一个向量组的极大无关组虽然不是唯一的，但是它们所含向量的个数是相等的．推论1表明，极大无关组所含向量的个数与极大无关组的选择无关，它直接反映了向量组本身的性质．因此有以下定义．

定义 5 向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩．

有了秩的概念，据定理 7 和定理 6 的推论可得以下结论．

定理 8 设向量组(I)的秩为 r_1，向量组(II) 的秩为 r_2，

(1) 若向量组(I)可用向量组(II)线性表示，则 $r_1 \leqslant r_2$．

(2) 若向量组(I)与(II)等价，则 $r_1 = r_2$．

证 (1) 设向量组(I)的一个极大无关组为(I_1)，向量组(II)的极大无关组为(II_1)，(I)与(I_1)等价，(II)与(II_1) 等价．若向量组(I)可用向量组(II)线性表示，则据定理 5 可得(I_1)可用(II_1)线性表示．再由定理 6 推论 1 可知 $r_1 \leqslant r_2$．

(2) 若(I)与(II)等价，则(I_1)与(II_2)等价，据定理 6 推论 2 知 $r_1 = r_2$． □

§5.7 习 题

1．判断以下向量组是线性相关还是线性无关．

(1) $\alpha_1=(-1, 1, 2, 4)$, $\alpha_2=(0, -1, 1, 3)$, $\alpha_3=(2, 0, 6, -2)$, $\alpha_4=(-3, -1, 3, 4)$, $\alpha_5=(1, 1, -4, -7)$．

(2) $\alpha_1=(7, 0, 0, 0, 0)$, $\alpha_2=(-1, 3, 4, 0, 0)$, $\alpha_3=(1, 0, 1, 1, 0)$, $\alpha_4=(0, 0, 1, 1, -1)$．

2．求下式中向量 α：

$$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha),$$

其中 $\alpha_1=(2, 5, 1, 3)$, $\alpha_2=(10, 1, 5, 10)$, $\alpha_3=(4, 1, -1, 1)$．

3．假定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 m 个维数相同的向量，如果存在 m 个全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是否线性无关？如果任何不全是 0 的 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+$

$k_m\alpha_m \neq \mathbf{0}$，问 α_1，α_2，…，α_m 是否线性无关？

4．假定α_1，…，α_m，β_1，…，β_m是同维的向量，如果 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + k_1\beta_1 + \cdots + k_m\beta_m = \mathbf{0}$ 成立时只有 k_1，k_2，…，k_m 全为 0，问 α_1，α_2，…，α_m，β_1，β_2，…，β_m 是否线性无关？

5．如果 α 能够表示成α_1，…，α_m的线性组合，$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，问这表示是否唯一。

6．证明：α_1，α_2，α_3 线性无关的充要条件是 $\alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_2 + \alpha_3$，$\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关。

7．如果向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，而 α_1，α_2，…，α_s，β 线性相关，证明 β 可被向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性表示。

§5.8 矩 阵 的 秩

1．矩阵的行秩、列秩与秩

在上一节我们介绍了向量组的秩，如果把矩阵的每一行视为一个向量，则矩阵可认为是由这些行向量组成的。同样，如果把每一列视为一个向量，则矩阵也可以认为是由列向量组成的。

定义 1 一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组的秩叫做 A 的**行秩**，列向量组的秩叫做 A 的**列秩**。

例如，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

的行向量组是

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1),\ \alpha_2 = (1, 2, 3, 4),\ \alpha_3 = (2, 3, 4, 5),$$

$$\alpha_4 = (5, 7, 9, 11),\ \alpha_5 = (7, 10, 13, 16)$$

由 §5.7 例 5 知，向量组α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的秩为2，也就是说，矩阵 A 的行秩为 2。A 的列向量组是

$$\beta_1 = (1, 1, 2, 5, 7)^T,\ \beta_2 = (1, 2, 3, 7, 10)^T,$$

$$\beta_3 = (1, 3, 4, 9, 13)^T,\ \beta_4 = (1, 4, , 5, 11, 16)^T.$$

容易算出，β_1，β_2 是向量组β_1，β_2，β_3，β_4 的极大无关组，而且$\beta_3 = -\beta_1 + 2\beta_2$，$\beta_4 = -2\beta_1 + 3\beta_2$，所以，向量组 β_1，β_2，β_3，β_4的秩等于 2，因而矩阵 A 的列秩也为 2。

在上面的例题中，矩阵 A 的行秩等于列秩，这一点并不是偶然的，定理 4 将证明，任意一个矩阵的行秩与列秩都是相等的。

定理 1 如果将 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$按它的列分块，$A = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，则 $m \times n$ 方程组 $Ax = b$有解的充要条件是 b 可用 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表示。

证 必要性 若 $x = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 是 $Ax = b$ 的解，则

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = b,$$

因而 $b = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n$。

充分性 把上面的证明过程推回去，可知 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 是 $Ax = b$ 的解。 □

定理 2 矩阵$A = (a_{ij})_{m \times n}$的行秩在初等行变换下保持不变；矩阵 A 的列秩在初等列变换下也保持不变。

证 下面只证 A 的行秩在初等行变换下不变，类似地可证列秩的情况。

设 A 的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，它们在进行初等行变换后得到的新向量组与原向量组等价。事实上，

（1）对于换法变换，互换矩阵 A 的第 i，j 两行相当于把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中的向量 α_i 与 α_j 调换一下位置，所得新向量组显然与原向量组等价。

（2）对于倍法变换，把矩阵 A 的第 i 行乘以非零常数 k，所得新矩阵的行向量组为 $\alpha_1, \cdots, k\alpha_i, \cdots, \alpha_m$。由于

$$\alpha_i = \frac{1}{k}(k\alpha_i), \quad k\alpha_i = k \cdot \alpha_i,$$

故新向量组与原向量组能互相线性表示，即二者等价。

（3）对于消法变换，把矩阵 A 的第 i 行加上第 j 行的 k 倍后，所得新的行向量组为(不妨设 $i < j$)

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_i + k\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_m,$$

(凡未写出的都与原来相同)由于

$$\alpha_i = (\alpha_i + k\alpha_j) + (-k)\alpha_j,$$

$$\alpha_i + k\alpha_j = \alpha_i + k \cdot \alpha_j,$$

故新向量组与原向量组能互相线性表示，即二者等价。

利用 §5.7 定理 8,等价的向量组的秩相同,因此,矩阵A经过一次初等行变换后它的行秩不变。那么，经过任何次初等行变换后矩阵 A 的行秩也不变。 □

定理 3 矩阵 A 的列秩在初等行变换下保持不变；矩阵 A 的行秩在初等列变换下也不变。

证 (1) 证明A的列秩在初等行变换下保持不变。实际上,设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，其列秩为 r。不妨设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为列向量组的一个极大无关组。设矩阵 A 经初等行变换后所得新矩阵的列向量组为 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n'$，我们只要证明 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n'$ 是它的一个极大无关组。

先证 $\beta_1',\cdots,\beta_r'$ 线性无关。以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为列向量排成一个矩阵 B，因为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关,据 §5.7 定理 1，以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解。另一方面，以 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$为列向量排成矩阵 B_1，B_1 可由 B 经过初等行变换得到，因此，以 B_1 为系数矩阵的齐次线性方程组与以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组同解，因而也只有零解，故 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$ 线性无关。

再证任一向量 $\beta_i'(r+1\leqslant i\leqslant n)$可被 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$ 线性表示。为此,以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_i$ 为列向量组作出一个矩阵$\overline{B}$，由于 β_i 可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示，由定理 1 知，以 $\overline{B}$ 为增广矩阵的线性方程组有解。另一方面，以 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r',\beta_i'$ 为列向量组的矩阵 $\overline{B_1}$可由$\overline{B}$经初等行变换得到，因此，以 $\overline{B_1}$ 为增广矩阵的线性方程组与以 $\overline{B}$ 为增广矩阵的线性方程组同解，因而它也是有解的，再利用定理 1 即得 β_i' 可被 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$ 线性表示。

(2) 证明矩阵 A 的行秩在初等列变换下不变。由于矩阵 A 的行向量组就是它的转置矩阵 A^T 的列向量组，对 A 作初等列变换等价于对 A^T 作初等行变换。根据前面的结果，A^T 的列秩在初等行变换下不变。这就是说，矩阵 A 的行秩在初等列变换下不变。 □

有了这些准备工作,我们可得下面一个重要结论。

定理 4 任意一个 $m\times n$ 矩阵 A 的行秩等于列秩。

证 若 A 是零矩阵，显然，行秩与列秩都是 0。对非零矩阵 $A_{m\times n}$,由 §5.3 定理 4 知,用初等变换可将它化成标准形

$$A \to \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 r 是适合 $1 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$ 的整数。E_r 为 r 阶单位矩阵。

在标准形中，它的前 r 个行向量是其行向量组的极大无关组；它的前 r 个列向量是其列向量组的极大无关组，因而标准形的行秩与列秩都是 r，据定理 2 与定理 3，A 的行秩与列秩分别等于其标准形的行秩与列秩，而标准形的行秩与列秩相等，故矩阵 A 的行秩等于列秩。 □

定义 2（矩阵的秩） 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A 的行秩或列秩称为该矩阵的秩，记作 $r(A)$。

综合上面的讨论，我们可以得到一个重要结果：**初等变换不改变矩阵的秩。**

当 $r(A) = m$ 时，则矩阵 $A_{m \times n}$ 叫做**行满秩矩阵**；

当 $r(A) = n$ 时，则矩阵 $A_{m \times n}$ 叫做**列满秩矩阵**；

当 A 为 n 阶方阵，且 $r(A) = n$ 时，则方阵 $A_{n \times n}$ 叫做**满秩方阵**（或**满秩的**）。

2. 秩的求法

下面介绍求矩阵的秩的一种简便方法——利用初等变换求矩阵的秩的方法。

利用初等变换把矩阵化为标准形，标准形中 E_r 的阶数 r，即它的主对角线上 1 的个数便是此矩阵的秩。同时，这也就给我们提供了求向量组的秩的一个方法：只要把向量组作为矩阵的行（或列）向量排成一个矩阵，然后求该矩阵的秩即可。

例 1 将 5×5 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

化为标准形，并求其秩。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5)-(1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(5)-(4)]{(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}\widehat{3} \\ \widehat{5}-\widehat{4}}]{\widehat{2}-\widehat{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\widehat{5}-\widehat{2}]{\widehat{3}-\frac{1}{2}\widehat{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\widehat{4}-\widehat{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $r(A)=4$。

下面介绍用行列式求矩阵的秩的方法。

定理 5 设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 中有一个 r 阶子式 D 不等于 0，而所有包含 D 的 $r+1$ 阶子式全为 0，则矩阵 A 的秩等于 r，即 $r(A)=r$。

证 不失普通性，不妨假定 D 位于 A 的左上角（否则，可以经过行、列的换法变换，把 D 移到左上角上，根据定理 2，3，这样得到的新矩阵与原矩阵的秩相同），即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由于 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$，利用克莱姆法则与§5.7定理1可知，$D$ 的 r 个行向量是线性无关的。再由 §5.7 例 4 知，将 D 的 r 个行向量延长成矩阵 A 的前 r 个行向量也线性无关。下面再来证明，A 的任意行向量都可以被前 r 个行向量线性表示。为此，作 $r+1$ 阶辅助行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix},\quad \begin{array}{l} \text{其中：} r<k\leqslant m, \\ \qquad 1\leqslant s\leqslant n. \end{array}$$

当 $s\leqslant r$ 时，D_1 中有两列相同，因而 $D_1=0$；当 $r<s\leqslant n$ 时，由假设可知 $D_1=0$。将 D_1 按最后一列展开，得

$$a_{1s}A_1+a_{2s}A_2+\cdots+a_{rs}A_r+a_{ks}D=0,$$

其中 $A_i=(-1)^{i+(r+1)}M_i$，而 M_i 是 a_{is} 在 D_1 中的余子式（$i=1,2,\cdots,r$）。显然，A_i 是与 s 无关的数，因为 $D\neq 0$，故得

$$a_{ks}=-\frac{A_1}{D}a_{1s}-\frac{A_2}{D}a_{2s}-\cdots-\frac{A_r}{D}a_{rs}\quad(s=1,2,\cdots,n),$$

这说明，矩阵 A 的第 k 个行向量($r<k\leqslant m$)可用前 r 个行向量线性表示，因而矩阵 A 的秩为 r。 □

由定理 5 可知，阶梯形矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & a_r & * \cdots * \end{pmatrix},\quad a_1a_2\cdots a_r\neq 0$$

的秩为 r，因此，用初等变换求矩阵 A 的秩时，实际上并不需要化成标准形，只需化成阶梯形即可求出秩 $r(A)$。这样可减少许多工作量。例如，在例 1 中，若只求秩，在前两步作初等行变换已将矩阵化为阶梯形，就可求得其秩为 4，而不必作后面的列变换了。

例 2 求下列向量组的秩与一个极大无关组，

$$\alpha_1=(1,1,1,1),$$
$$\alpha_2=(1,2,3,4),$$
$$\alpha_3=(2,3,4,5),$$
$$\alpha_4=(3,4,5,7),$$
$$\alpha_5=(5,7,9,11).$$

解 把向量组作为行向量组排成一个 5×4 矩阵 A，同时把代表各向量的希腊字母写在它的右方，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \alpha_2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \alpha_3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & \alpha_4 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

然后对矩阵 A 作初等行变换（现在不能作初等列变换）将 A 变成阶梯形，在这过程中，右端的 α_i 也跟着变，这样，矩阵的每个行向量永远等于右端希腊字母所表示的向量，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \alpha_2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \alpha_3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & \alpha_4 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-3(1)]{\substack{(2)-(1)\\(3)-2(1)\\(5)-5(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \alpha_2-\alpha_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \alpha_3-2\alpha_1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \alpha_4-3\alpha_1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \alpha_5-5\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(5)-2(2)]{\substack{(3)-(2)\\(4)-(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \alpha_2-\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3-\alpha_1-\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_4-2\alpha_1-\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5-3\alpha_1-2\alpha_2 \end{pmatrix},$$

将最后矩阵的第3行与第 4 行互换就得到阶梯形矩阵，可见，$r(A)=3$，即向量组的秩为 3．其极大无关组包含 3 个向量．再据最后矩阵第 3 行与第 5 行的行向量为零向量，得

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_5=3\alpha_1+2\alpha_2.$$

故可取 α_1，α_2，α_4 为此向量组的一个极大无关组．

最后，我们给出一个关于矩阵乘积的秩的定理．

定理 6　已知矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{jk})_{s\times n}$，则矩阵乘积 AB 的秩不大于各因子的秩，即

$$r(AB)\leqslant\min\{r(A),\ r(B)\}.$$

证　只需证明 $r(AB)\leqslant r(A)$，$r(AB)\leqslant r(B)$ 即可．

令 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示矩阵 B 的行向量，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 表示 AB 的行向量，则

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix},$$

故

$$\gamma_i=\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j, \quad i=1, 2, \cdots, m.$$

这说明，AB 的行向量可以被 B 的行向量线性表示。据 § 5.7 定理 8，可得 $r(AB)\leqslant r(B)$。

同理，令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 A 的列向量，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ 是 AB 的列向量，则

$$AB=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ & \cdots & \\ b_{r1} & \cdots & b_{rp} \end{pmatrix},$$

因而

$$\xi_j=\sum_{i=1}^{s} b_{ij}\alpha_i, \quad j=1, 2, \cdots, p,$$

这说明，AB 的列向量可以被 A 的列向量线性表示，所以

$$r(AB)\leqslant r(A).$$ □

推论 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，若 P 是 m 阶可逆方阵，Q 是 n 阶可逆方阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ).$$

证 只证明 $r(A)=r(PA)$，另一个等式留给读者证明。

令 $B=PA$，由定理 6，

$$r(B)\leqslant r(A).$$

在 $B=PA$ 两边左乘 P^{-1} 得到

$$A=P^{-1}B,$$

再用定理 6 便有

$$r(A)\leqslant r(B).$$

所以

$$r(A)=r(B)=r(PA).$$ □

§5.8 习　题

1. 求下列各矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 14 & 13 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 给定向量组，求出它们的极大线性无关组与秩.

(1) $\alpha_1=(-1,0,1,0;0)$, $\alpha_2=(1,1,1,1,0)$, $\alpha_3=(0,1,2,1,0)$.

(2) $\alpha_2=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$, $\alpha_4=(0,1,1)$, $\alpha_5=(0,0,1)$.

(3) $\alpha_1=(1,0,1)$, $\alpha_2=(0,1,0)$, $\alpha_3=(0,0,1)$, $\alpha_4=(1,1,1)$, $\alpha_5=(1,1,0)$.

(4) $\alpha_1=(2,3,1,1)$, $\alpha_2=(4,6,2,2)$, $\alpha_3=(0,1,2,1)$, $\alpha_4=(0,-1,-2,-1)$.

(5) $\alpha_1=(6,4,1,9,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$, $\alpha_3=(1,4,-9,-6,22)$, $\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$.

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问当常数 c、k 满足什么条件时，向量组 $c\alpha_2-\alpha_1$, $k\alpha_3-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ 也线性无关?

4. 判断下列说法是否正确，对错误的结论举例反驳；对正确的结论给以证明. 设 A、B 是同型矩阵，则

(1) $r(A+B)=r(A)+r(B)$;　　(2) $r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$;

(3) $r(A+B)=\max(r(A),r(B))$;　　(4) $r(A+B)<r(A)+r(B)$.

5. 设 A、B 都是 n 阶方阵，$AB=\mathbf{0}$，试证:

$$r(A)+r(B)\leqslant n.$$

6. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=E$，试证:

$$r(E+A)+r(E-A)=n.$$

7. 设 A 是任意一个 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明

$$r(A)+r(A-E_n)=n.$$

§5.9 线性代数方程组

§5.6 克莱姆法则解决了 n 元线性方程组 $Ax=b$，当 $|A|\neq 0$ 时的求解问题，但在 $|A|=0$ 及一般方程个数与未知量个数不相等的方程组都不能直接使用克莱姆法则．本节讨论一般方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{9.1}$$

的求解方法，通常要解决以下三个问题：

(1) 方程组(9.1)是否有解，有解的充要条件是什么？

(2) 若有解，有多少组解？

(3) 若有无穷多组解，如何求出它的全部解？解的结构如何？

先介绍解方程组的高斯消元法，同时也解决前面两个问题．

1. 高斯消元法

方程组(9.1)对应的增广矩阵为

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots\cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

对方程组进行初等行变换相应于对矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换．高斯消元法是指以下方法：首先把 x_1 的系数不为零（特别是 1）的方程调至第 1 个方程，然后用初等变换消去其它 $m-1$ 个方程中的 x_1；用同样方法，在这 $m-1$ 个方程中再进行一次消元，使得仅在第二个方程保留 x_2，若在第一次消元时这 $m-1$ 个方程中的 x_2 全

被消去，则保留 x_3，等等；再后得到一个阶梯形式的同解方程组。用矩阵表示，即对 $\bar{A}$ 实施初等行变换化为阶梯形。为了讨论方便，对系数矩阵的列作适当调换（注意，这时变元的排列次序也作相应调换），就可将 $\bar{A}$ 化为以下形式矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & c_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & c_r \\ & & & & & & c_{r+1} \end{array}\right), \tag{9.2}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$, $i=1, 2, \cdots, r$, $c_{r+1}\neq 0$, $r+1\leqslant m$, $r\leqslant n$；或者

$$\left(\begin{array}{ccccccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & c_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & c_r \end{array}\right), \tag{9.3}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$, $i=1, 2, \cdots, r$; $r\leqslant \min(m, n)$。

对(9.2)的情形，方程组无解。这是因为第 $r+1$ 行对应的方程是矛盾方程：$0=c_{r+1}\neq 0$。此时，方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r$，而增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩 $r(\bar{A})=r+1$，$r(A)\neq r(\bar{A})$。

在(9.3)的情形，$r(A)=r(\bar{A})=r$，此时矩阵(9.3)可进一步作初等行变换化为形式

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & d_{1r+1} & \cdots & d_{1n} & d_1 \\ & 1 & & d_{2r+1} & \cdots & d_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ & & & 1 & d_{rr+1} & \cdots & d_{rn} \quad d_r \end{array}\right). \tag{9.4}$$

(1) 若 $r=n$，则方程组有唯一解

$$x_1=d_1, \quad x_2=d_2, \quad \cdots, \quad x_n=d_n。$$

(2) 若 $r<n$，(9.4)对应的方程组可写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - d_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - d_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = d_r - d_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - d_{rn}x_n, \end{cases} \tag{9.5}$$

任意给定一组数$(x_{r+1}, \cdots, x_n)$，(9.5)有唯一解$(x_1, \cdots, x_r)$，从而得到方程组(9.1)的一组解 $(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)$。$x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为**自由未知量**，$x_1, \cdots, x_r$ 称为主未知量。自由未知量可以任意取值，故方程组(9.1)有无穷多组解。

总结以上讨论可得下面的定理。

定理 1 (1) $m \times n$ 方程组(9.1)有解的充要条件是

$$r(A) = r(\bar{A}).$$

(2) 当 $r = r(A) = r(\bar{A}) = n$ 时，方程组(9.1)有唯一解。

(3) 当 $r = r(A) = r(\bar{A}) < n$ 时，方程组(9.1)有无穷多组解。

定义 1 若 $m \times n$ 方程组 $Ax = b$ 有解，则称它是**相容的**，或称它是**相容方程组**；若 $Ax = b$ 无解，则称它是**不相容的**，或称它是**矛盾方程组**。

对齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{9.6}$$

$r(A) = r(\bar{A})$，一定有解。

推论 1 (1) 当 $r(A) = n$ 时，方程组(9.6)只有零解。

(2) 当 $r(A) < n$ 时，(9.6)有无穷多组解。

(3) 当 $m < n$ 时，$r(A) \leqslant m < n$，(9.6)必有无穷多组解。

推论 2 n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{9.7}$$

有唯一解的充要条件是系数行列式$|A|\neq 0$.

证 充分性已由克莱姆法则证明,下证必要性.

设方程组(9.7)有唯一解,据定理 1(1)有 $r(A)=r(\overline{A})$;若 $|A|=0$,则 $r(\overline{A})=r(A)<n$,据定理 1(3)知方程组(9.7)有无穷多组解.这与有唯一解矛盾,故$|A|\neq 0$. □

推论 3 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases} \tag{9.8}$$

只有零解的充要条件是系数行列式$|A|\neq 0$;也就是说,(9.8)有非零解的充要条件是$|A|=0$.

证 据推论 2,(9.7)中取 $b_1=\cdots=b_n=0$,即得 (9.8) 有唯一零解的充要条件是$|A|\neq 0$. □

推论 4 n 个 n 维列(行)向量线性无关的充要条件是以它们的分量排成的方阵$A=(a_{ij})$的行列式$|A|\neq 0$(即A满秩$\Leftrightarrow A$可逆).

证 据 §5.7 定理1,A的 n 个列向量线性无关$\Leftrightarrow$方程组(9.8)只有零解$\Leftrightarrow|A|\neq 0$. □

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2, \\ 2x_1-5x_2\quad\quad=3, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=4. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$, $r(\bar{A})=3$, $r(A)\neq r(\bar{A})$，故此方程组无解。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\bar{A}$ 实施初等行变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-7(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)-(3)]{(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\times 2]{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

故方程组有唯一解 $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=4$。

2. 线性代数方程组解的结构

上一段我们已解决了本节开始提出的两个问题，这一段将讨论第三个问题——线性方程组解的结构。在方程组有唯一解时，当然没有什么结构问题。在有无穷多组解时，解的结构问题就是解与解之间的关系问题；本段将证明，其全部解都可以用有限多个解线性表示出来。

1) 齐次线性方程组解的结构

设齐次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

写成矩阵形式即是

$$Ax = \mathbf{0}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T.$$

前已证明，齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$总是有解的，$\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)^T$总是它的解，称为**零解**，若有非零解就有无穷多个，下面讨论这些非零解之间的关系.

首先指出，这些解所组成的集合具有线性性质，即若x^1与x^2是它的两个解，则$x^1 + x^2$及kx^1亦是它的解，这是因为

$$A(x^1 + x^2) = Ax^1 + Ax^2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$A(kx^1) = kAx^1 = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

因此，齐次线性方程组的解的线性组合还是它的解. 这个性质说明，如果求出了方程组的r个解，则这些解的所有可能的线性组合就给出了它的无穷多个解. 但是，方程组(9.6)的每个解是n维向量，据§5.7 定理4，当(9.6)解的个数多于n个时，这些解向量必线性相关，也就是说，(9.6)的解中线性无关的解至多只有n个. 进而我们要问，能否找到(9.6)的解集合的极大无关组？如果能找到，那就等于找到了(9.6)的所有解了.

定义 2 齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$的解向量组的一个极大无关组叫做它的一个**基础解系**.

现在我们来证明，当$r(A) < n$时，齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$确有基础解系，同时给出具体求基础解系的方法.

定理 2 设齐次线性方程组(9.6)的系数矩阵A的秩$r < n$，则(9.6)必有基础解系，且基础解系所含解的个数等于$n - r$.

证 由于$r < n$，不妨设A的左上角的r阶子式不为0，用高

斯消元法，可将(9.6)化为(9.5)形式，不过其中的$d_1=d_2=\cdots=d_r=0$，我们将它改写为

$$\begin{cases} x_1=\xi_{11}x_{r+1}+\cdots+\xi_{1n-r}x_n, \\ x_2=\xi_{21}x_{r+1}+\cdots+\xi_{2n-r}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r=\xi_{r1}x_{r+1}+\cdots+\xi_{rn-r}x_n, \end{cases} \tag{9.9}$$

其中 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 是自由未知量。当自由未知量给定一组数，就可得(9.9)的一组解 $x_1, x_2, \cdots, x_r$，也就得到(9.6)的一个解向量

$$(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)^T.$$

在(9.9)中分别让自由未知量$(x_{r+1}, \cdots, x_n)$取以下$n-r$组数，

$$(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1) \tag{9.10}$$

就得到方程组(9.6)的 $n-r$ 个解

$$\begin{cases} \xi_1=(\xi_{11}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{r1}, 1, 0, \cdots, 0)^T, \\ \xi_2=(\xi_{12}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{r2}, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{n-r}=(\xi_{1n-r}, \xi_{2n-r}, \cdots, \xi_{rn-r}, 0, \cdots, 0, 1)^T, \end{cases} \tag{9.11}$$

下面证明 (9.11) 就是 (9.6) 的一个基础解系。

首先，因为向量组(9.10)线性无关，把它们延长成向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关。

其次，证明(9.6)的任一解ξ都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性表示。设

$$\xi=(k_1, k_2, \cdots, k_r, k_{r+1}, \cdots, k_n)^T, \tag{9.12}$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是(9.6)的解，所以

$$k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_n\xi_{n-r}=(*, \cdots, *, k_{r+1}, \cdots, k_n)^T \tag{9.13}$$

也是(9.6)的一个解，而(9.12)与(9.13)这两个解的后 $n-r$ 个分量完全相同，由于给定一组自由未知量(这里正是后面 $n-r$ 个分量)可唯一确定(9.6)的一个解，所以这两个解相等，即有

$$\xi=k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_n\xi_{n-r}.$$

这就证明了方程组(9.6)当 $r(A)<n$ 时确有基础解系 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$，它含有 $n-r$ 个线性无关解。当然，一个方程组的基础解

系不是唯一的，但它们所含线性无关解的个数相同。 □

定理 2 证明了当 $r(A)<n$ 时，方程组(9.6)存在基础解系，并给出了求基础解系的一个方法。在求得基础解系(9.11)后，方程组(9.6)的全部解(也称通解)可表示为

$$\xi = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}, \tag{9.14}$$

其中 $c_1, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数。

例 3 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{9.15}$$

的一个基础解系，并求出全部解。

解 对系数矩阵实施初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)\\(4)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

取 x_1, x_2 为主未知量，x_3, x_4, x_5 为自由未知量，解得

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - 2x_4 - 6x_5 \\ x_2 = -3x_3 + x_4 + 5x_5. \end{cases} \tag{9.16}$$

令 $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, 得 $x_1 = 4$, $x_2 = -3$,

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, 得 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

$x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, 得 $x_1 = -6$, $x_2 = 5$.

故得到(9.15)的一个基础解系为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (4, -3, 1, 0, 0)^T, \\ \xi_2 &= (-2, 1, 0, 1, 0)^T, \\ \xi_3 &= (-6, 5, 0, 0, 1)^T, \end{aligned} \tag{9.17}$$

而其全部解为

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3, \tag{9.18}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

注意，如果将(9.18)用向量写出，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.19}$$

而将(9.16)添上三个方程 $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$, $x_5 = x_5$，也写成向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5. \tag{9.20}$$

比较(9.20)与(9.19)可看出，只要把(9.20)中的三个自由未知量看成任意常数，(9.20)就表示方程组的全部解，因此，在实际解题

时，只要解得(9.16)，然后将它写成(9.20)形式，说明 x_3，x_4，x_5是任意常数(或分别用 c_1，c_2，c_3 代替)，就得通解，同时也得到一个基础解系(9.17)。

2) 非齐次线性方程组解的结构

设非齐次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.1}$$

写成矩阵形式即是

$$Ax = b,\ \ b = (b_1, \cdots, b_m)^T.$$

相应的齐次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

称齐次方程组 (9.6) 为 (9.1) 的**导出组**. (9.1)的解与其导出组(9.6)的解之间有着密切的关系：

(1) 非齐次方程组(9.1)的任意两个解 η_1，η_2 之差是导出组(9.6)的解.这是因为由 $A\eta_1 = b$，$A\eta_2 = b$ 推出

$$A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = \mathbf{0}.$$

(2) 方程组(9.1)的一个解 η_0 与它的导出组 (9.6) 的解 ξ 之和仍是(9.1)的解. 这是因为由 $A\eta_0 = b$，$A\xi = \mathbf{0}$ 推出

$$A(\eta_0 + \xi) = A\eta_0 + A\xi = b + \mathbf{0} = b.$$

由这两点易得以下解的结构定理.

定理 3 设 η_0 是非齐次线性方程组(9.1)的某一解，则方程组(9.1)的任一解 η 都可表示为

$$\eta = \eta_0 + \xi, \tag{9.21}$$

其中 ξ 是导出组 (9.6) 的一个解. 当 ξ 取遍导出组的全部解时(9.21)取遍(9.1)的全部解.

证 $\eta=\eta_0+(\eta-\eta_0)$，$\eta-\eta_0$是导出组(9.6)的解，令$\xi=\eta-\eta_0$，则(9.1)的任一解$\eta$都可写成$\eta=\eta_0+\xi$。 □

定理3告诉我们，要找非齐次线性方程组(9.1)的全部解，只需找出它的一个解η_0以及它的导出组(9.6)的全部解。利用式(9.14)，方程组(9.1)的全部解(也称通解)可表示成

$$\eta=\eta_0+c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}, \tag{9.22}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数。

推论 在非齐次方程组(9.1)有解的条件下，解是唯一的充要条件是它的导出组(9.6)只有零解。

证 用反证法。

必要性 设η_0是(9.1)的唯一解，若(9.6)有一个非零解ξ，则据定理3，$\eta_0+\xi$也是(9.1)的解，且$\eta_0+\xi\neq\eta_0$，这与(9.1)只有一解相矛盾，所以，(9.8)只有零解。

充分性 若(9.1)解不唯一，有两个不同解η_1和η_2，则$\eta_1-\eta_2$是(9.6)的一个非零解，这与(9.6)只有零解矛盾。 □

例4 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=-1, \\ x_1-4x_3+2x_4+6x_5=1, \\ 3x_1+4x_2+2x_4-2x_5=-1, \end{cases} \tag{9.23}$$

的全部解。

解法1 在例3中取x_3, x_4, x_5为自由未知量，已求得其导出组的全部解为

$$\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3,$$

其中ξ_1,ξ_2,ξ_3由(9.17)表示。因此，再找出(9.23)的任一个解即可。较简单的办法是在(9.23)中令例3中取的三个自由未知量为零，即$x_3=x_4=x_5=0$，易解出$x_1=1, x_2=-1$，则得(9.23)的一个特解$\eta_0=(1,-1,0,0,0)^T$，故(9.23)的全部解为

$$\xi=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数。

解法 2 用消元法，对增广矩阵实施初等行变换，

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)\\(4)-3(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故得其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 4x_3 - 2x_4 - 6x_{55}, \\ x_2 = -1 - 3x_3 + x_4 + 5x, \\ x_3 = \quad x_3, \\ x_4 = \quad x_4, \\ x_5 = \quad x_5, \end{cases}$$

写成向量形式，它的全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_3，x_4，x_5 为任意常数（可分别用 c_1，c_2，c_3 代替）。

一般解方程组都用解法 2，仅在已知（或极易求得）导出组的通解时，才用解法 1 方便。

§5.9 习　　题

1. 求下列线性方程组的解。

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

2. 当 λ，a，b 取何值时，下列方程组有解？在有解时求其解。

(1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b. \end{cases}$

3. 设 $x_1-x_2=a_1$，$x_2-x_3=a_2$，$x_3-x_4=a_3$，$x_4-x_5=a_4$，$x_5-x_1=a_5$，证明：这方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5}a_i=0$。

4. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系。

(1) $\begin{cases} x_2-x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+3x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+6x_4-3x_5=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0. \end{cases}$

5. 求下列方程组的全部解。

(1) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 9x_1+12x_2+17x_4=4, \\ 6x_1+3x_2+3x_3+8x_4=4, \\ 3x_1+6x_2+6x_3+13x_4=2, \\ x_1+6x_2+2x_3+9x_4=0, \\ 6x_1+5x_2-x_3+7x_4=3. \end{cases}$

6. 设任一个 n 维向量都是下列齐次方程组的解向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+x_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

证明这个方程组的所有系数都为 0，即

$$a_{ij}=0,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

7. 证明：若方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + 2ny_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases}$$

有解的充要条件是方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

的任意一组解$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$必满足方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0。$$

6 多元函数微分学

在一元函数微积分学中，所考虑的运动过程只有两个变量，且运动状态仅依赖于一个独立变量．但大量的运动状态依赖于多个独立变量，例如，讨论自然现象时，通常总离不开空间和时间，空间点的坐标(x, y, z)就有三个独立变量，再加上时间变量t便有四个独立变量了，因此需要研究依赖于两个以上独立变元的多元函数及其微积分．首先学习多元函数微积分的理论基础——极限与连续．

§6.1 多元函数 极限 连续

1 n维欧几里得空间

在平面和空间建立直角坐标系后，xoy平面上的点$P(x, y)$与有序实数组的集合$R^2=\{(x, y)\mid x\in R, y\in R\}$之间建立了一一对应关系，$O$-$xyz$空间中的点$P(x, y, z)$与三维有序实数组的集合$R^3=\{(x, y, z)\mid x\in R, y\in R, z\in R\}$之间建立了一一对应关系．

平面上两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$之间的距离为

$$d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.1}$$

空间两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$之间距离为

$$d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.2}$$

且$d(P_1, P_2)$满足下列性质：

(1) 非负性 $d(P_1, P_2)\geqslant 0$，$d(P_1, P_2)=0$的充要条件是$P_1=P_2$；

(2) 对称性 $d(P_1, P_2)=d(P_2, P_1)$；

(3) 三点不等式 $d(P_1, P_2)\leqslant d(P_1, P_3)+d(P_3, P_2)$．

利用距离 d 来刻划平面或空间中点列$\{P_n\}$与点 P 的任意接近，可作如下规定

$$P_n \to P \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0.$$

这为多元函数的自变量的任意接近提供了一种方法. 因此，对定义了距离 d 的集合给以专门术语，称用式(1.1)定义了距离的 xoy 平面为**二维欧几里得**(Euclid)**平面**，记为 R^2；称用式(1.2)定义了距离的$Oxyz$空间为**三维欧几里得空间**，记为R^3. 推广到一般，则有

n 维有序实数组的全体所成的集合，记为 R^n，

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \mid x_i \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

对任意 $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，称

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \tag{1.3}$$

为 x 与 y 之间的**距离**. 可以证明，距离 (1.3) 也满足上述的非负性、对称性与三点不等式（详细讨论见第 14 章），称定义了距离(1.3)之后的集合 R^n 为 **n 维欧几里得空间**，简称 **n 维欧氏空间**.

为统一起见，称数轴——坐标直线为**一维欧几里得空间**. 由于三维有序数组(x_1, x_2, x_3)在 O-xyz 空间表示点，且它唯一确定了以 $O(0, 0, 0)$ 为起点，以 $P(x_1, x_2, x_3)$ 为终点的向量，因此也常称 R^n 中的元素 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$为**点**或 **$n$ 维向量**.

有了距离就可以正确的表达何谓收敛，还能够引进邻域，因而给出内点、边界点、开集、聚点、紧集、连通等一系列重要的概念，整个数学分析“大厦”便是建筑在这些概念基础之上的.

定义 1（邻域　内点　边界　开集）

设 A 是 R^n 中一些点所成的集，点 $\boldsymbol{P_0} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in R^n$.

(1) 邻域　分别称 R^n 中的集合

$$U(P_0, r) = \{P \mid d(P, P_0) < r, r > 0\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 < r^2, r > 0\right\},$$

$$V(P_0, r) = \{P \mid |x_i - x_i^0| < r, r > 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

为点 P_0 的**球形 r 邻域与方形 r 邻域**，简称为点 P_0 的**邻域**。分别称集合 $U(P_0, r)\backslash\{P_0\}$，$V(P_0, r)\backslash\{P_0\}$ 为点 P_0 的**球形去心 r 邻域与方形去心 r-邻域**，简称为点 P_0 的**去心邻域**。

$U(P_0, r)$，$V(P_0, r)$ 在 $n=2$ 时就是通常的平面上的开圆盘与开正方形；在 $n=3$ 时就是通常的开球与开正方体。

易见，在 P_0 的任何球形 r- 邻域内，存在方形 r_1-邻域，即 $V(P_0, r_1) \subset U(P_0, r)$；反之，任何一个方形 r_1- 邻域内，存在球形 r_2-邻域，即 $U(P_0, r_2) \subset V(P_0, r_1)$。

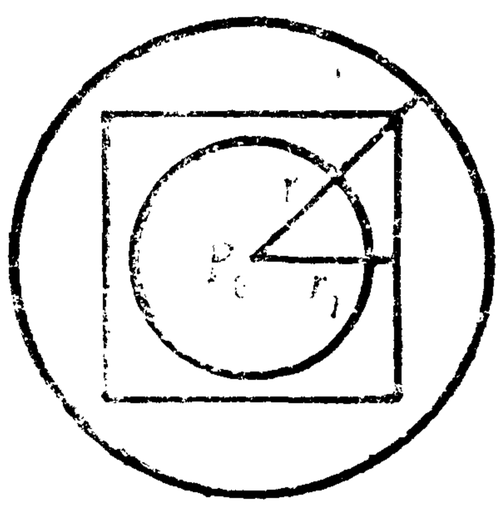


图 6.1

(2) 内点　如果存在 P_0 的一个 r- 邻域 $U(P_0, r) \subset A$，则称 P_0 为集合 A 的**内点**。

(3) 边界点　如果 P_0 的任意 r- 邻域 $U(P_0, r)$ 中既有集 A 的点，又有不属于 A 的点，则称 P_0 为集合 A 的**边界点**　A的所有边界点构成的集合称为集 A 的**边界**，记为 ∂A。

(4) 聚点　如果 P_0 的任意 r 邻域 $U(P_0, r)$ 中都有集合 A 的异于 P_0 的点，称 P_0 为集合 A 的**聚点**。

(5) 开集　如果集合 A 中每一点都是集合 A 的内点，称 A 为**开集**。

由定义可知，集 A 的内点与边界点都是集 A 的聚点。

定义 2（区域）　设 A 为 R^n 中的集合，如果对于 A 中任意两点 P_1, P_2，都可用包含于 A 中的折线（即由有限条直线段组成的连续曲线）相连接，则称集合 A 为具有折线连通性的**连通集**。连通的开集称为**区域**或**开区域**。

对于平面区域 D，若 D 内任一无重点①的闭曲线所围的区域 D_0 含于 D 内，则称 D 为平面上的**单连通区域**，否则称为**复连通区域**。从直观上讲，单连通区域是没有“洞“的区域，复连通区域是有

① 若曲线 l 的参数方程为：$x=x(t), y=y(t), a \leqslant t \leqslant b$，除 $t=a, t=b$ 外，当 $t_1 \neq t_2$ 时，点 $P_1(x(t_1), y(t_1))$ 与点 $P_2(x(t_2), y(t_2))$ 不相同，称曲线 l 是无重点的。

“洞”的区域，如图 6.2(a)、(b) 所示的是单连通区域，图 6.2(c)、(d)所示的区域是复连通区域。

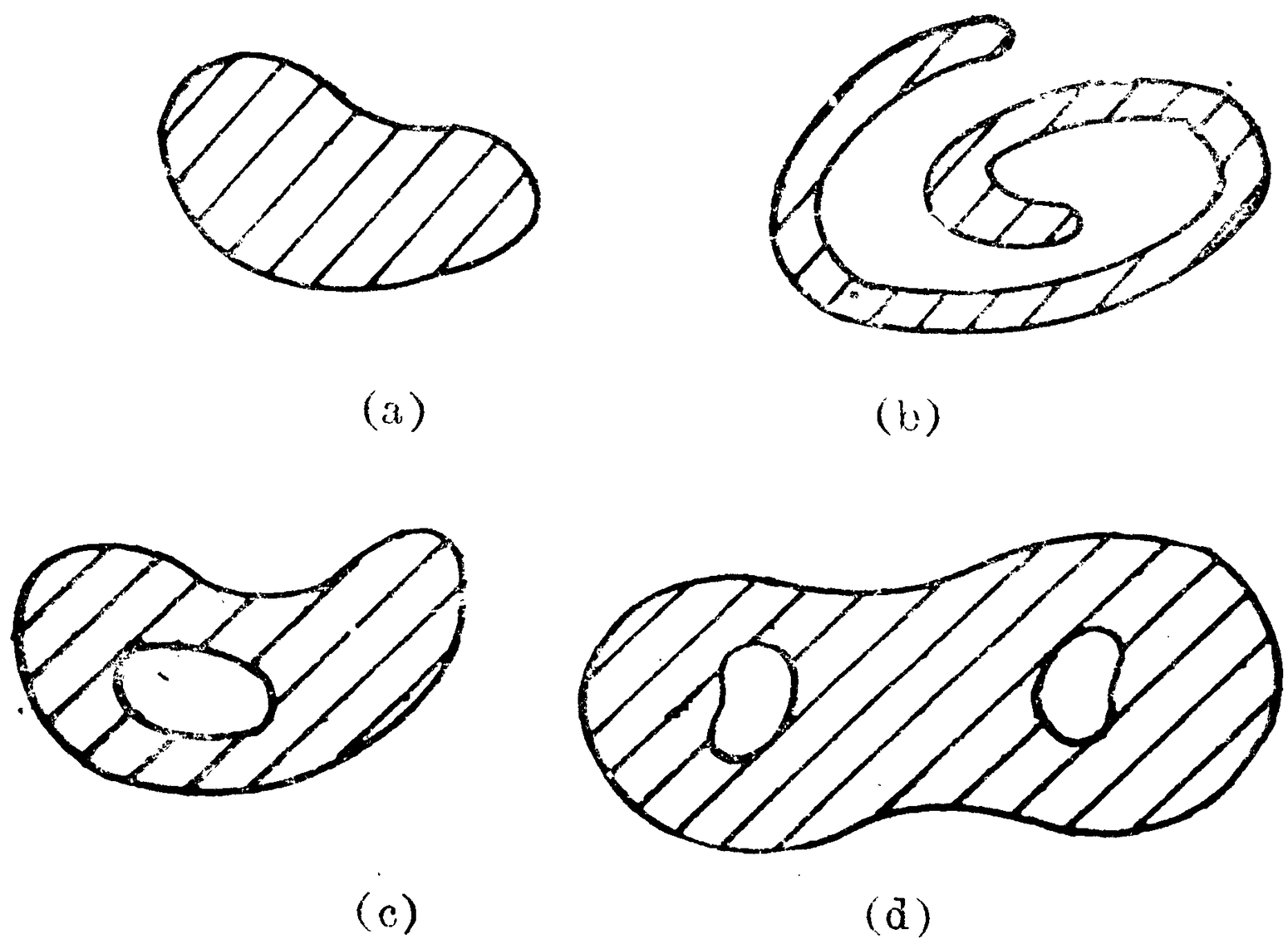


图 6.2

注 为使用方便，习惯上称开区域 D 及它的边界 ∂D 构成的并集 $D\cup\partial D$ 为**闭区域**，记为 $\bar{D}$。在不需指明区域的开闭性时，统称开区域、闭区域为区域，并用同一记号 D 表示。

定义 3（有界集，集合的直径） 设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的集合，若存在 $K>0$，使 $A\subset U(O,K)$，则称集合 A 是**有界集**，否则称 A 为**无界集**。称

$$d(A)=\sup\{d(P_1,P_2)\mid\forall P_1,P_2\in A\}$$

为**集合 A 的直径**。

例 1 设集合 A 是平面上以原点 O 为中心以 1 为半径的去心圆：

$$A=\{P\mid 0<d(P,O)<1\},$$

则 A 中每一点是集 A 的内点，原点及单位圆周是集 A 的边界点。闭单位圆盘

$$B=\{P\mid 0\leqslant d(P,O)\leqslant 1\}$$

上的一切点都是集 A 的聚点，A 是连通开集，且是复连通区域。

2. $R^n \to R^m$ 的映射

定义 4 ($R^n \to R^m$ 的映射) 设 D 是 R^n 中的子集，如果存在一个法则 f，对任意 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$，有唯一的元素 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in R^m$ 与 x 对应，则称 f 是 D 到 R^m 中的**映射**，记为

$$f: D \to R^m$$

$$x \mapsto y = f(x),$$

集合 D 称为映射 f 的**定义域**，集合 $f(D)=\{f(x) \mid x \in D, f(x) \in R^m\}$ 称为 f 的**值域**.

当 $m=1$ 时，

$f: D \to R$

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto y=f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

称 f 是 **n 元函数**；特别，若 $n=2$，称 f 为**二元函数**，简记为 $y=f(x_1, x_2)$；若 $n=3$，称 f 为**三元函数**，简记为 $y=f(x_1, x_2, x_3)$.

当 $m \geqslant 2$ 时，定义 4 中的自变量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与因变量 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 分别是 n 维、m 维向量，从几何上看，它们分别表示点 x，y 的坐标，由于 y 的每一坐标都依赖于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，即每一个 y_i 都是 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函数：

$$y_i = f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

于是 f 也可用坐标表示为

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\vdots \qquad\qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

并称 f_i 是映射 f 的**第 i 个坐标函数**，记 $f=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$，由于 f 在点 x 的值是一个向量 $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$，也常把 $R^n \to R^m$ 的映射 f 称为**向量值函数**.

二元函数 $z=f(x, y)$，$(x, y) \in D$ 在几何上可用一张空间曲

面来表示，这是因为 $P(x,y)$ 是 xOy 平面区域 D 上的一点，而 $(x, y, f(x, y))$ 表示 O-xyz 空间中的点，当 $P(x, y)$ 在 D 内变动时，点集

$$\{Q(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

就描绘出空间一张“曲面”，并称此曲面为函数 $z = f(x, y)$，$(x, y) \in D$ 的**图形**。

例 2 (1) 设 $D = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \backslash (0, 0)\}$

$$f: D \to R, (x, y) \mapsto z = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

f 是定义在 D 上的二元函数，它的图形是一旋转曲面，见图 6.3。

(2) 设

$$f: R^2 \to R, (x, y) \mapsto z = 1 - x^2 - y^2,$$

f 是定义在 R^2 上的二元函数，它的图形是旋转抛物面，见图 6.4。

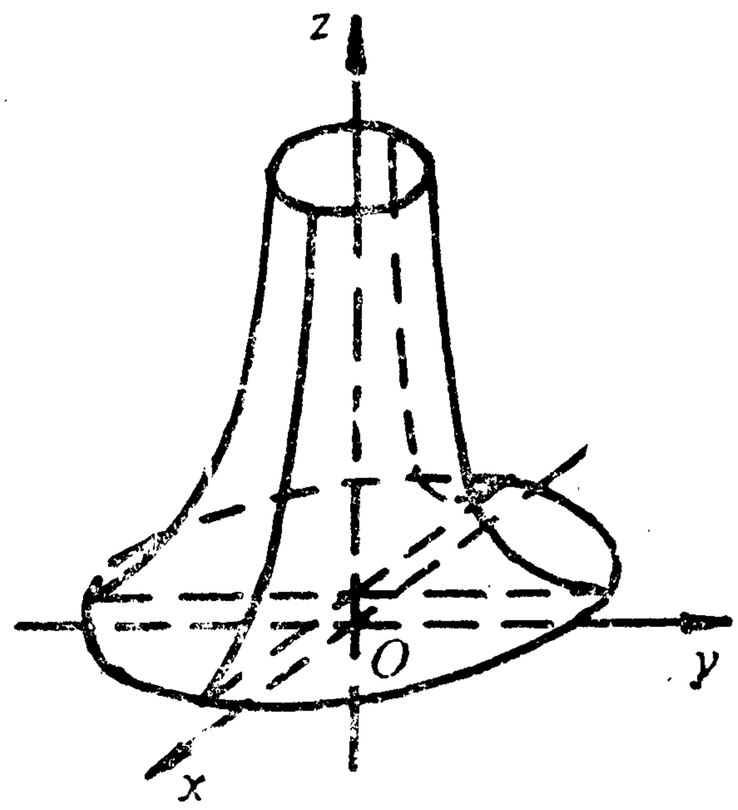


图 6.3

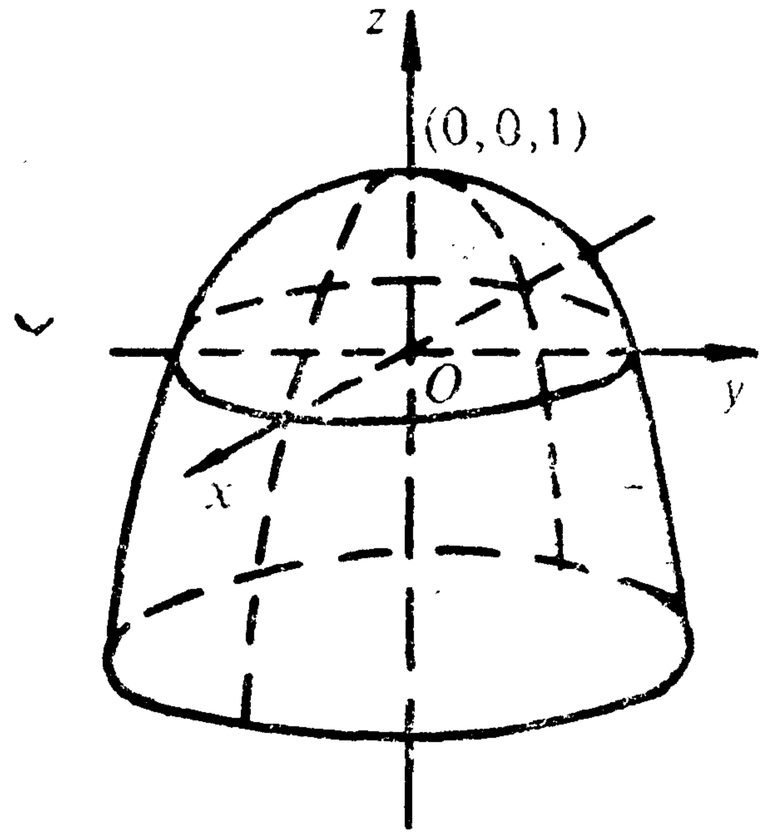


图 6.4

例 3 设

$$f: [a, b] \to R^3$$

$$t \mapsto (x, y, z),$$

则 f 是从 $[a, b]$ 到 R^3 的映射，是一元向量值函数，其值是三维的向量，用坐标函数写出来就是

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$$

如果 x, y, z 都在 $[a, b]$ 上连续，f 就是一条连续曲线的参数方程。

例 4 设 D 是 R^2 中的一个区域，

$$S:\ D \to R^3$$

$$(u, v) \mapsto (x, y, z),$$

S 是从 D 到 R^3 的映射，用坐标函数写出来就是，

$$S:\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D,$$

S 是曲面的参数方程，参数为 u，v。

例 5 设

$$T:\ R^2 \to R^2$$

$$(r, \theta) \mapsto (x, y),$$

其中 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，T 是从 R^2 到 R^2 的映射，它是平面上的极坐标代换。

上述例子表明，映射的概念是一个相当广泛的概念，它能使我们统一处理曲线、曲面、多元函数、向量值函数、坐标变换等各种不同的具体对象。

类似于一元复合函数，有复合映射与多元复合函数，今举例说明。设三元函数

$$w = f(x, y, z),\quad (x, y, z) \in D_1$$

及三个二元函数

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D,$$

且 x，y，z 的值域包含在 f 的定义域内，即

$$\{(x, y, z) \mid x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D\} \subset D_1.$$

这就构成了复合函数

$$w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\quad (u, v) \in D.$$

3. 多元函数的极限

由于空间中点的变化情况比数轴上点的变化复杂得多，所以多元函数的极限类型比一元函数极限要多一些。就概念与理论而言，多元函数与一元函数的极限有共通的一面，也有实质性的新

东西．但是，从二元到三元或更多元，这只增加描述的复杂性，并无本质的差异．因此，我们在讨论多元函数极限时以二元函数为主，这是为了叙述方便，且对实际应用也完全足够．对于函数的定义域，我们则限于是区域的情况．

下面关于二元函数重极限的定义完全类似于一元函数的极限．

定义 5（二元函数重极限的“ε-δ”定义） 设 f 是定义在 R^2 中的某区域 D 上的二元函数，即

$$f: D \to R$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

点 $P_0(x_0, y_0)$ 是区域 D 的聚点，l 是一个实数．如果对任给的正数 ε（不管多么小），总存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0)$，使对 D 内任何 $P(x, y)$，只要

$$0 < d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

便恒有

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon,$$

则称函数 f 当 $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ 时（或说 $x \to x_0$，$y \to y_0$ 时）存在（有限）极限 l，记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l,$$

或

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l,$$

或

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l.$$

我们把这种极限称为**重极限**．简写为

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P(x, y) \in D$$

且 $0 < d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$，有

$$|f(P) - l| < \varepsilon \qquad (1.4)$$

易证，式(1.4)等价于写法

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall P(x,y)\in D$$
且 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$, 有
$$|f(P)-l|<\varepsilon \tag{1.5}$$

将上述定义中的措词作适当修改，读者不难写出 l 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时的定义，以及变元 x，y 之一或者两者趋向 ∞ 时极限的定义.

与一元函数的极限类似，重极限也可用点列的语言表示.

定理 1 设 D 是 R^2 中的一个区域，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，f 是定义在 D 上的二元函数，即

$$f: D\to R$$
$$(x,y)\mapsto z=f(x,y),$$

则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=l$ 的充要条件是：对任何 $\{P_n\}$，$P_n\in D$，$P_n\neq P_0$，$P_n\to P_0(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=l$.

证 必要性证明略，现证充分性，用反证法.

设 $\forall\{P_n\}$，$P_n\neq P_0$，$P_n\to P_0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=l$，且 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)\neq l$，则存在 $\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists\bar{P}\in D$，虽 $0<d(\bar{P},P_0)<\delta$，但 $|f(\bar{P})-l|\geqslant\varepsilon_0$，于是，对每个 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathrm{N}$，$\exists\bar{P}_n\in D$，虽 $0<d(\bar{P}_n,P_0)<\dfrac{1}{n}$，但 $|f(\bar{P}_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$，因此找到点列 $\{\bar{P}_n\}$：$\bar{P}_n\neq P_0$，$\bar{P}_n\to P_0(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{P}_n)\neq l$，与假设矛盾，故有 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=l$. □

因此，与一元函数的情形一样，我们也可用点列语言来定义重极限.

定义 6（重极限的点列语言定义） 设 f 是在区域 $D\subset R^2$ 上定义的函数，P_0 是 D 的一个聚点，l 为一个实数. 如果对任意点列 $\{P_n\}$：$P_n\in D$，$P_n\neq P_0$，$P_n\to P(n\to\infty)$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=l$，

则称 f 当 $P\to P_0$ 时以 l 为极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=l$。

由定理 1 可得下面推论：

推论 设$\{P_n\}$和$\{\overline{P}_n\}$是 D 内的两个趋向于 P_0 的点列，则当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{P}_n)$ 存在而不相等，或其中之一不存在时，$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在。

多元函数重极限的性质与运算法则都和一元函数相类似，这里不一一叙述。

例 6 用“$\varepsilon-\delta$”定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$。

证 由 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$，有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

欲

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,\text{只需}\ \frac{1}{2}|x|<\varepsilon,$$

对任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta=2\varepsilon$，当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$，$(x,y)\neq(0,0)$时，有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.\qquad\square$$

例 7 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

证 记 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，选取 $P_n=\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)$，$P'_n=\left(\dfrac{2}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)$，显然 $P_n\to O$，$P'_n\to O$，$(n\to\infty)$，其中 $O=(0,0)$。对一切 n，

$$f\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{2}{5},\text{因此}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(P'_n),$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。$\square$

例 8 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 1-}} \dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{\arcsin(xy-2)}{\operatorname{arctg}(3xy-6)}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{xy}$.

解　(1) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 1-}} \dfrac{(x+y-1)(\sqrt{x}+\sqrt{1-y})}{x+y-1}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 1-}} (\sqrt{x}+\sqrt{1-y}) = 0$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{xy-2}{3xy-6} = \dfrac{1}{3}$.

(3) 原式 $= \exp[\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2)]$,

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$$

这是因为 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$，记 $u=(x^2+y^2)$，$\lim\limits_{u\to 0} u\ln u = 0$，所以

$$\text{原式} = e^0 = 1.$$

与一元函数极限不同，多元函数除了重极限之外，还有两类重要的极限，即累次极限与方向极限，我们仍限于讨论二元函数情形.

定义 7（累次极限、方向极限）　设 f 是定义在平面区域 D 上的二元函数，$P_0(x_0, y_0)$ 是区域 D 的聚点，称

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

分别为函数 f 在点 (x_0, y_0) 的先 x 后 y 与先 y 后 x 的两个**二次极限**，统称**累次极限**，而称

$$\lim_{\rho\to 0+} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)$$

为函数 f 在点 (x_0, y_0) 沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)=(\cos\alpha, \cos\beta)$ 的**方向极限**，其中 $\boldsymbol{l}$ 为过点 $P_0(x_0, y_0)$ 与 x 轴，y 轴分别成 α, β 角的射线 l 的方向向量，射线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha \\ y = y_0 + \rho\sin\alpha \end{cases} \quad \rho > 0.$$

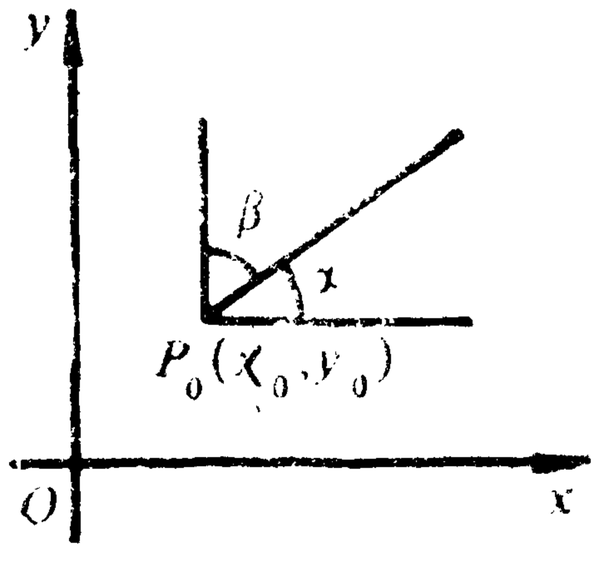


图 6.5

重极限、累次极限、方向极限之间有下列关系：

1° 若函数 f 在点 (x_0, y_0) 以 A 为重极限，则当 (x, y) 按任意方式趋于 (x_0, y_0) 时，例如，沿曲线、直线、射线趋于 (x_0, y_0) 时，函数 f 都以 A 为极限. 特别，

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$，则 $\lim\limits_{\rho\to 0+} f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) = A$.

(2) 如果 (x, y) 沿两种不同方式趋于 (x_0, y_0) 时，f 有不同的极限，或者 (x, y) 按某种方式趋于 (x_0, y_0) 时，f 不存在极限，则 f 在点 (x_0, y_0) 的重极限不存在.

2° 函数 f 在点 (x_0, y_0) 的重极限及一个累次极限若存在，则这两个极限值必相等，即

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} A$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} B$，则 $A = B$.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} C$，则 $A = C$.

进而有

(3) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} B$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) \overset{\exists\text{且}}{=\!=} C$，则 $A = B = C$.

因此，当重极限与两个累次极限都存在时，可交换求累次极限的次序

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y).$$

我们略去上述关系的证明，并在下面举例说明，除上述确定关系外，重极限、两个累次极限、方向极限之间没有其它因果关系.

例 9（重极限存在，但两个累次极限不存在） 设

$$f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x},\quad xy\neq 0.$$

由

$$|f(x, y)|\leqslant|x|+|y|,$$

得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0,$$

故在点(0, 0)重极限存在，但两个累次极限显然不存在.

例 10（两个累次极限存在且相等，但重极限不存在） 设

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad (x, y)\neq(0, 0),$$

由例 7 知道，f 在点(0, 0)的重极限不存在，但

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0+y^2}=0.$$

例 11（两个累次极限都存在，但不相等） 设

$$f(x, y)=\frac{x+y}{x-y}\quad (y\neq x),$$

则有

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1.$$

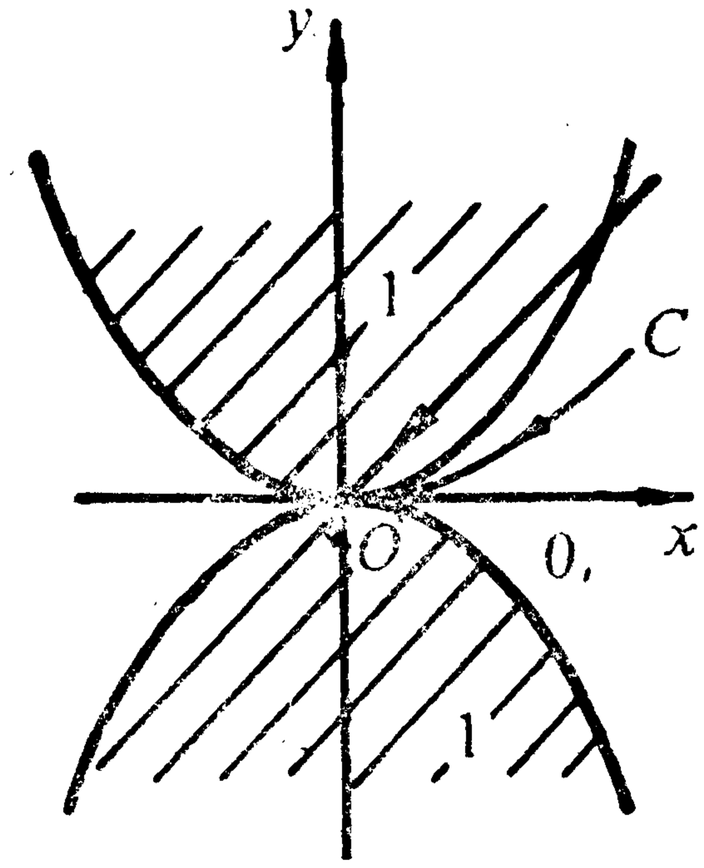


图 6.6

例 12（所有方向极限都存在且相等，但重极限不存在） 设

$$f(x, y)=\begin{cases}1, \text{当 } |y|\geqslant x^2 \text{ 或 } y=0,\\ 0, \text{其它},\end{cases}$$

则当 x 充分小时，过点(0, 0)的任一条直线 $y=kx$，$k\neq 0$ 的纵坐标的绝对值 $|y|=|kx|>x^2$（见图6.6），因而沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $(\alpha\neq 0, \pi)$的方向极限

$$\lim_{\rho\to 0+} f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)=\lim_{\rho\to 0+} 1=1.$$

当 $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ 时, $y=0$, 亦有

$$\lim_{\rho\to 0+} f(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)=\lim_{\rho\to 0+} 1=1,$$

因此, f 在点(0, 0)的任何方向的方向极限都存在且极限值为1。

但(x, y)沿曲线 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ 趋于(0, 0)时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{1}{2}x^2}} f(x, y)=0,$$

所以 f 在点(0, 0)的重极限不存在。

4. 多元函数的连续性

我们仍讨论二元函数的情形, 读者不难把所讲的内容推广到 $n(\geqslant 3)$元函数上去。

定义 8 (二元函数连续性) 设

1° f 是定义在 R^2 中某区域 D 上的二元函数, 即

$$f:\ D\to R$$

$$(x, y)\mapsto z=f(x, y),$$

点 $P_0(x_0, y_0)\in D$。

2° 重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 存在 。

3° $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$。

则称函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ **连续**, 否则就说 f 在点 P_0 **间断**。

如果函数 f 在区域 D 内每点都连续, 则说 f 是 D 上的连续函数。在区域 D 上的连续函数的全体所成的集合记为 $C(D)$或C_D, f 在 D 上连续则记为 $f\in C(D)$ 或 $f\in C_D$。

类似于一元函数, 二元函数在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续也有下列等价说法。

(1) **增量说法** 记 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$, 则

$$f\text{在点}P_0\text{连续}\Leftrightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\Delta f=0.$$

(2) "ε－δ"语言

f 在点 P_0 连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0,\forall P\in D,d(P,P_0)<\delta$，都有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$。

还有点列、邻域等说法，这里从略。

与一元函数的间断点不同的是：二元函数除有间断点外，有时还有间断线。例如，函数

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$$

有间断线 $y=0$。

二元连续函数有与一元连续函数相类似的性质，我们叙而不证列举在下面：

1) **保号性** 设 $f(P)$ 在 P_0 连续，$f(P_0)>0$，则存在 P_0 的球形 r-邻域 $U(P_0,r)$，当 $P\in U(P_0,r)\cap D$ 时有 $f(P)>0$。

2) **运算法则** 连续函数的和、差、积、商(分母 $\neq0$)及复合均为连续函数。

3) **闭区域上连续函数的性质** 设

$$f:\ D\to R,(x,y)\mapsto z=f(x,y)$$

是定义在平面有界闭区域 D 上的连续函数，则

(1) f 在 D 上是有界的，即

$$\exists m,M\quad\text{使}\quad m\leqslant f(P)\leqslant M,\forall P\in D.$$

(2) f 在 D 上取到最大值与最小值，即

$$\exists P_1、P_2\in D\quad\text{使}\quad f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2),\forall P\in D.$$

这里，$f(P_2)=\max\limits_{P\in D}f(P)$，$f(P_1)=\min\limits_{P\in D}f(P)$。

(3) f 在 D 上取到最大值 M、最小值 m 之间的一切值，即对 $\forall\mu,m<\mu<M$，必存在点 $P\in D$，使 $f(P)=\mu$。

(4) f 在 D 上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对 $\forall P', P''\in D$，当 $d(P', P'')<\delta$，有

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon.$$

或等价地有，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对 $\forall P'(x', y')$，$P''(x'', y'')\in D$，当 $|x'-x''|<\delta$，$|y'-y''|<\delta$，有

$$|f(x', y')-f(x'', y'')|<\varepsilon.$$

§6.1 习　题

1. 利用柯西不等式证明 n 维欧几里得空间 R^n 中的点满足三点不等式

$$d(P_1, P_2)\leqslant d(P_1, P_3)+d(P_3, P_2),$$

其中 $P_i=(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$，$i=1, 2, 3$，

$$d(P_i, P_j)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(i)}-x_k^{(j)})^2}.$$

2. 试作下列平面点集的草图，并由草图说明它们各自的内点、边界点、聚点所成的集合。

(1) $A=\{(x, y)\colon 3x^2+2y^2<6, 0<x\leqslant y\leqslant 2x\}$;

(2) $B=\{(x, y)\colon y>x^2, |x|<2\}$;

(3) $C=\{(x, y)\colon xy<1\}$;

(4) $D=\{(x, y)\colon x>0, y>0, x+y<1\}$;

(5) $E=\{(x, y)\colon (2x-x^2-y^2)(x^2+y^2-x)>0\}$。

3. 判别函数 $z_1=\ln[x(x-y)]$ 与 $z_2=\ln x+\ln(x-y)$ 是否为同一函数？试求两函数的定义域，并画出定义域的草图。

4. 求出下列函数的定义域，并画出定义域的草图。

(1) $z=\ln(2\sqrt{2}-x^2-y^2)+\ln(|y|-1)$;

(2) $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\ln(y-x)$;

(3) $z=\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}$;

(4) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sin y+x^2e^y$;

(5) $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$;

(6) $z=y\sqrt{\cos x}$。

5. 作下列函数的图形。

(1) $z=1-x-y$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

(2) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$, $x^2+y^2\leqslant 4$, $x^2+y^2\neq 1$;

(3) $z=x^2-4y^2$.

6. (1) 设 $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(-3, 4)$ 和 $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$;

(2) 设 $g\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $(x>0)$，求 $g(x)$.

7. 已知函数 $f(x, y)=x^2+y^2$, $\varphi(x, y)=x^2-y^2$，试求：

(1) $f(\varphi(x, y), y^2)$;

(2) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

8. 试述下列二元函数重极限的定义.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} f(x, y)=A$(有限);

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to +\infty}} f(x, y)=A$(有限);

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to y_0}} f(x, y)=-\infty$.

9. 设 $\varphi(P)\leqslant f(P)\leqslant g(P)$，且 $\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P)=\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=A$（有限，$+\infty$，$-\infty$），试证 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$存在且等于 A.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to \pi}} x^2\sin\dfrac{y}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1+}} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)}}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to b}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

11. 讨论下列极限的存在性.

(1) $\operatorname{ilm}\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\ln(x^4+y^4)$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.

12. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

试证：沿着过点$(0,0)$的每条射线$x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $(0\leqslant t<+\infty)$是连续的，即$\lim\limits_{t\to 0+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$，但是这个函数在点$(0,0)$处不连续。

13. 求下列二元函数的间断点。

(1) $z=\exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{|x-y|}}\right)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$;

(3) $z=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$;

(4) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;

(5) $u=\dfrac{1}{xyz}$;

(6) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

*14. 设$f(P)$在$P_0\in D$连续，且$f(P_0)>0$，试证：存在$r>0$，使得在$D\cap U(P_0,r)$内$f(P)>0$。

§6.2 偏导数　全微分

本节讨论以二元函数为主，这些结果都极易推广到更多变元的函数。

1. 偏导数

定义1（偏导数）　设$(x,y)\mapsto z=f(x,y)$是一个定义在$\mathbf{R}^2$的开集D上的二元函数，点$P_0(x_0,y_0)\in D$。如果取y为常数y_0，则$x\mapsto f(x,y_0)$成为一元函数g。若g在x_0可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 f 在点 $P_0(x_0,\ y_0)$ **对 x 的偏导数**，记为

$$f'_x(x_0,\ y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\quad \text{或将 } f \text{ 换为 } z.$$

若取 x 为常数 x_0，考察函数 $y\mapsto f(x_0,\ y)$，同样可定义 f 在点 $P(x_0,\ y_0)$ **对 y 的偏导函数**为极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y},$$

记作 $f'_y(x_0,\ y_0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)$，或将 f 换为 z.

如果对区域 D 中的每一点函数 f 都有对 x、y 的偏导数，则偏导数是 $(x,\ y)$ 的函数，称为**偏导函数**，记为

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f'_x,\ f'_y \text{ 或 } f_x,\ f_y \text{（省去撇号）}$$

或将 f 换为 z. 偏导函数习惯上也称为偏导数.

以上定义可毫无困难地推广到一般 n 元函数 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mapsto f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，偏导数的定义为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,\ \cdots,\ x_i+\Delta x_i,\ \cdots,\ x_n)-f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}{\Delta x_i}$$

由偏导数的定义可见，求偏导数实际上归结为求一元函数的导数.

例 1　设 $z=x^y(x>0)$，求 z'_x 与 z'_y.

解　$z'_x=yx^{y-1}$，$z'_y=x^y\ln x$.

例 2　求 $f(x,\ y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(0,\ 1)$ 的偏导数.

解　$f'_x=2x-y$，$f'_x(0,\ 1)=-1$；

或用另一方法求 $f'_y(0,\ 1)$，

$$f(0,\ y)=y^2,\quad f'_y(0,\ y)=2y,\quad f'_y(0,\ 1)=2.$$

例 3　设 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，其中 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是定点，求 $\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y}$，$\dfrac{\partial r}{\partial z}$.

解 $$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=\frac{x-x_0}{r},$$

轮换 x，y，z 可得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_0}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_0}{r}.$$

例 4 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0，0)存在偏导数，但不连续.

证 $$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0,$$

但在 § 6.1 例 7 我们已证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，因而在点 (0，0)不连续. □

二元函数**偏导数** $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 的**几何意义**：

在空间直角坐标系中，$z=f(x,y)$的图形是一个曲面 S，如图 6.7 所示. $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$在 S 上，曲线 C_1 是曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线，其方程为

$$\begin{cases}z=f(x,y_0)\\ y=y_0,\end{cases}$$

曲线 C_2 是曲面 S 与平面 $x=x_0$ 的交线，其方程为

$$\begin{cases}z=f(x_0,y)\\ x=x_0,\end{cases}$$

偏导数 $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$ 就是曲线 C_1 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率 $\mathrm{tg}\,\alpha$，而 $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$ 是曲线 C_2 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率 $\mathrm{tg}\,\beta$.

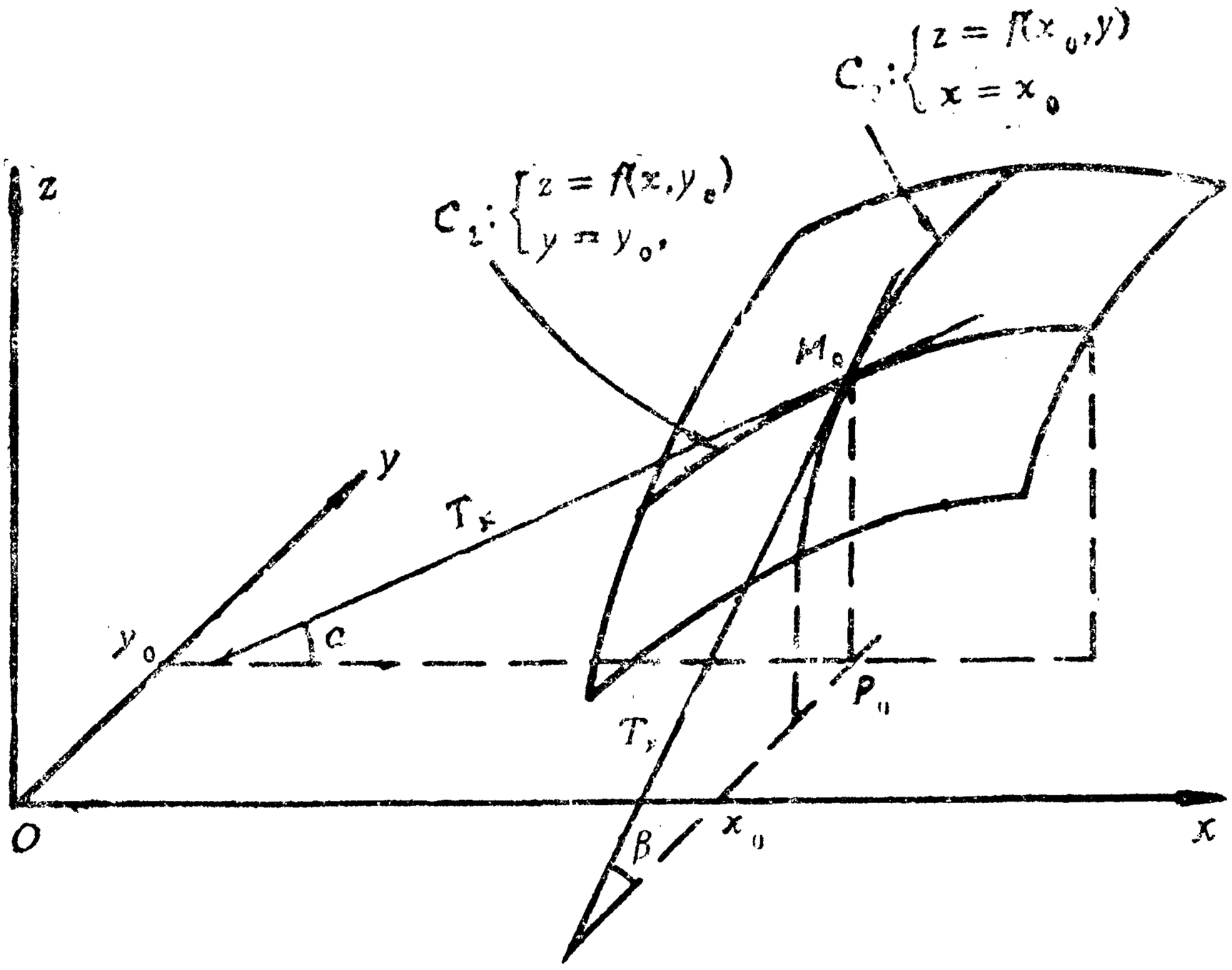


图 6.7

对一元函数，若在某点可导，则在该点必定连续．但对多元函数而言，即使在某点全部偏导数都存在，函数在该点也未必连续，如例 4．这是因为偏导数只能反映函数在该点沿坐标轴方向的变化情况，而不能反映在该点邻域内的变化情况．对二元函数，$f'_x(x_0, y_0)$只反映沿曲线 C_1 的变化，$f'_y(x_0, y_0)$只反映沿曲线 C_2 的变化，它们与曲面 S 上 C_1、C_2 以外的点无关，而二元函数在点 P_0 是否连续却与 S 上 M_0 点附近的一切点有关．

2．全微分

定义 2（全微分） 设函数 f 在区域 $D \subset R^2$ 内定义，$z = f(x, y)$，$P_0(x_0, y_0) \in D$，当自变量 x，y 有改变量 Δx，Δy 时，相应地函数有改变量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$，（称为全增量），记 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 是点 $P_0(x_0, y_0)$ 与点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$之间的距离，若当 $\rho \to 0$ 时，Δz 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \tag{2.1}$$

其中 A, B 不依赖于 Δx、Δy，则称函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ **可微**，Δz 的线性主部 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 f 在点 P_0 的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f$，即

$$\mathrm{d}z = A\,\Delta x + B\,\Delta y.$$

如果函数 f 在区域 D 上每一点(x, y)都可微，就说 f 是 D 上的可微函数.

注意，$\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$；而

$$h = o(\rho)(\rho \to 0) \Leftrightarrow h = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y,\ \alpha \to 0,\ \beta \to 0(\rho \to 0),$$

这是因为，若 $h = o(\rho)(\rho \to 0)$，则有

$$h = o(\rho)\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\rho^2} = \frac{o(\rho)}{\rho}\left(\frac{\Delta x}{\rho}\,\Delta x + \frac{\Delta y}{\rho}\Delta y\right) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

其中

$$|\alpha| = \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right| \to 0,$$

$$|\beta| = \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right| \to 0.$$

所以 $\alpha \to 0$, $\beta \to 0(\rho \to 0)$.

反之，若 $h = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0(\rho \to 0)$，则

$$\left|\frac{h}{\rho}\right| = \left|\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\,\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| + |\beta|\,\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|$$
$$\leqslant |\alpha| + |\beta| \to 0 \quad (\rho \to 0),$$

即 $h = o(\rho)$.

因此，式(2.1)可用以下等价的式子代替：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad \alpha \to 0, \beta \to 0(\rho \to 0). \tag{2.2}$$

由可微的定义立即可得，**可微的函数必定连续.**

定理 1 若函数 f 在点 $P(x, y)$ 可微，则在该点两个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 必存在，且 $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$，因而有

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

证 因为式(2.1)对任意 Δx，Δy 都成立，当 $\Delta y=0$ 时，$\rho=|\Delta x|$，式(2.1)可写成

$$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

两边除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$，取极限，得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A,$$

这说明在点 $P(x, y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$存在且等于 A.同理可证在点$P(x, y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在且等于 B. □

我们约定，自变量的改变量就是自变量的微分，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$，$\Delta y=\mathrm{d}y$，于是 f 在点 $P(x, y)$ 的全微分可写成

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad 或 \quad \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

对一元函数，可微与存在有限导数等价. 对二元函数，定理 1 说明，可微函数的两个偏导数都存在；反之，若两个偏导数存在是否能推出函数可微？不能. 例 4 说明，函数在某点偏导数存在不能保证函数在该点连续，而可微函数是连续的，函数在某点不连续必不可微. 即使函数 f 在某点连续且偏导数存在，也不一定可微，见例 5.

例 5 证明函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在原点连续，偏导数存在，但不可微.

证 在原点显然连续. 又

$$z'_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0,$$

$$z'_y(0, 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y}=0,$$

在原点两个偏导数存在且为 0. 但在点(0, 0)却不可微. 事实上，若可微，则有

$$\mathrm{d}z=z'_x(0, 0)\mathrm{d}x+z'_y(0, 0)\mathrm{d}y=0,$$

$$\Delta z=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}-0=\sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\rho}=\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}\neq 0,$$

其中 $\Delta x=\rho\cos\theta$, $\Delta y=\rho\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 即 $\Delta z-\mathrm{d}z$ 不是比 ρ 高阶的无穷小,这与可微的定义矛盾.

定理 2 设函数 f 在点 $P(x,y)$ 的邻域U内有连续的偏导数,则 f 在点 P 可微.

证 据一元函数的微分中值定理,令 $z=f(x,y)$,

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]\\&\quad+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\\&=f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\\&\qquad(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1),\end{aligned}\tag{2.3}$$

据假设 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 连续,则有

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f'_x(x,y)+\alpha,\quad\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0,$$

$$f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f'_y(x,y)+\beta,\quad\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0,$$

代入式(2.3)即得

$$\Delta z=f'_x\,\Delta x+f'_y\,\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

因此,据式(2.2),函数 f 在点 P 可微. □

推论 若 f'_x, f'_y 在某区域内恒等于零,则 $f(x,y)$ 在该区域内为一常数.

证 由式(2.3)立即可得. □

归纳以上讨论,得以下关系:

$$\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{可微}\begin{cases}\Rightarrow\text{连续}\\ \Rightarrow\text{偏导数存在}\end{cases}$$

箭头反向不一定成立. 可微不能推出偏导数连续的反例见本节未习题的题 4.

以上全微分的概念可推广到 n 元函数的情形. 例如,对三元

函数$(x, y, z)\mapsto u=f(x, y, z)$，若在点$(x, y, z)$函数的全增量$\Delta u$可表示为

$$\Delta u=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho)\quad(\rho\to 0),$$

其中A, B, C与$\Delta x, \Delta y, \Delta z$无关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$，则称函数$u$在该点可微，而增量的线性主部$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$称为函数$u$的全微分，且有

$$\mathrm{d}u=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

例 6　求函数$z=x^3+2y^2$在$(1,1)$处的全微分.

解　$z=3x^2$, $z_y=4y$均为连续函数，因此该函数可微，且$z_x(1,1)=3$, $z_y(1,1)=4$，所以

$$\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y.$$

例 7　求函数$u=y^2+\mathrm{e}^{xz}$的全微分.

解　因为偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\mathrm{e}^{xz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x\mathrm{e}^{xz}$$

都是连续函数，因此函数可微，其全微分为

$$\mathrm{d}u=z\mathrm{e}^{xz}\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+x\mathrm{e}^{xz}\mathrm{d}z.$$

在全微分定义中忽略高阶无穷小量$o(\rho)$，可得近似式$\Delta z\approx\mathrm{d}z$，

即　$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\approx f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y,\tag{2.4}$$

可用它来近似计算增量Δz和函数值$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

例 8　计算$(10.2)^{1.97}$的近似值.

解　设$f(x, y)=x^y$, $x=10$, $\Delta x=0.2$, $y=2$, $\Delta y=-0.03$, $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$, $f_x(10,2)=20$, $f_y(10,2)=100\ln 2$，用式(2.4)可得

$$\begin{aligned}(10.2)^{1.97}&\approx 10^2+20\times 0.2+100\ln 2\times(-0.03)\\&=100+4-3\times 2.303=97.09.\end{aligned}$$

3. 复合函数微分法

1) 链式法则

设 z 是变量 x、y 的函数，而 x 和 y 又是 t 的函数，且构成复合函数 $z=f(x(t), y(t))=z(t)$（x、y 称为中间变量）.

定理 3 设 $z=f(x, y)$ 可微，而 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 可导，则复合函数 $z=f(x(t), y(t))=z(t)$ 也可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{2.5}$$

证 给 t 一个增量 Δt，相应地 x、y 有增量 Δx、Δy，又引起 z 有增量 Δz. 因 f 可微，则有

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，$\beta\to 0$，于是

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

因 $x(t)$、$y(t)$ 可导，必定连续，所以，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，导出 $\alpha\to 0$，$\beta\to 0$ 及 $\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t)$，$\frac{\Delta y}{\Delta t}\to y'(t)$，于是

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

这就证明了 $z(t)$ 可导，且式(2.5)成立. □

类似地，对有 n 个中间变量情况，若 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可微，且 $x_i=x_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$ 可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

推论 若 $z=f(u, v)$ 可微，而 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 存在偏导数，则复合函数 $z=f[u(x, y), v(x, y)]=z(x, y)$ 的偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.7}$$

证 对 x 求导数将 y 看作常数，应用式(2.5)即得式 (2.6)；对 y 求导数将 x 看做常数，应用式(2.5)即得式(2.7)。 □

对中间变量与自变量的个数多于 2 的情况，只要相应的条件满足，也有类似的结果。如设 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$x_j=x_j(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，$j=1, 2, \cdots, m$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial t_k}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_k}, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

在质点运动学中常见的函数为 $u=u(t,x,y,z)$，而 x、y、z 又是 t 的函数，则有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

注意区别 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 是把 u 作为 t 的一元函数的全导数，而 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是把 u 看作四元函数时将 x, y, z 固定对 t 的偏导数。

对 $u=f(t, x, y, z)$，$y=y(t, x)$，$z=z(t, x)$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

要注意区别 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial t}$，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$，记号不可混淆。

例 9 设 $z=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 令 $u=xy$，$v=x+y^2$，则 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1$$

$$=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y^2)+\cos(x+y^2)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 2y$$

$$=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y^2)+2y\cos(x+y^2)].$$

例 10 证明 $z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$。

证 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+\varphi-\frac{y}{x}\varphi',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+\varphi',$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+\varphi-\frac{y}{x}\varphi'\right]+y[x+\varphi']$$

$$=2xy+x\varphi=xy+z。$$

2) 一阶全微分形式不变性

一元函数有一阶微分形式不变性，多元函数也有一阶全微分形式不变性。例如，对二元函数 $z=z(u,v)$，当 u,v 是自变量时，有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v,\tag{2.8}$$

当 u,v 是中间变量时，公式 (2.8)仍成立。这种性质称为微分形式不变性。事实上，若 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，x、y 是自变量，则 $z=z[u(x,y),v(x,y)]=z(x,y)$，

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y。$$

据复合函数微分法，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

所以有

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v。$$

根据一阶全微分形式的不变性，我们也可用一元函数时讲的微分公式来求多元函数的全微分和偏导数。

例 11 求函数 $u=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$ 的全微分 $\mathrm{d}u$ 和三个一阶偏导数.

解
$$\mathrm{d}u=\frac{(x^2+y^2)\mathrm{d}(z^2)-z^2\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{(x^2+y^2)2z\,\mathrm{d}z-z^2(2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=-\frac{2xz^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{2yz^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+\frac{2z}{x^2+y^2}\mathrm{d}z.$$

上式中 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的系数分别是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, 因此同时得到三个一阶偏导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xz^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2yz^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2}.$$

4. 曲面的切平面与法线

设曲面 S 的方程是

$$F(x,y,z)=0,$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面 S 上的一点,并设函数 $F(x,y,z)$ 的偏导数 F_x, F_y, F_z 在点 M_0 的邻域上连续且不同时为 0. 在曲面 S 上过点 M_0 任取一条光滑曲线 L, 其参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

点 M_0 对应的参数为 t_0. 由第 4 章 § 4.6 知, 曲线 L 在点 M_0 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

现在证明,这些切线都在一个平面上.

因为曲线 L 在曲面 S 上,所以有

$$F[x(t),y(t),z(t)]=0,$$

对 t 求导,由复合函数微分法, 在点 M_0 有

$$F_x(M_0)x'(t_0)+F_y(M_0)y'(t_0)+F_z(M_0)z'(t_0)=0. \quad (2.9)$$

式(2.9)表示曲线 L 的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$与向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x(M_0),\ F_y(M_0),\ F_z(M_0))$$

垂直. 由于曲线 L 是 S 上过点 M_0 的任一条光滑曲线，因此，它们在点 M_0 的切线都与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，于是，这些切线都在过点 M_0 的同一平面上. 我们称这个平面为曲面 S 在 M_0 的**切平面**，而 $\boldsymbol{n}$ 即为它的**法向量**，亦称为曲面 S 在点 M_0 的法向量. 所以，切平面的方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0. \tag{2.10}$$

过点 M_0 垂直于切平面 (2.10) 的直线称为曲面 S 在点 M_0 的**法线**，其方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}. \tag{2.11}$$

特别，当曲面的方程由显式 $z=f(x,y)$ 给出时，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则

$$F_x=f_x,\quad F_y=f_y,\quad F_z=-1,$$

于是，当函数 f 有连续偏导数时，曲面 S 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程是

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0, \tag{2.12}$$

法线方程是

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{2.13}$$

由以上讨论可见，若 F_x，F_y，F_z 在曲面 S 上每一点都连续且不全为 0，则过 S 上每一点都有切平面和法向量，并且随着切点在 S 上连续移动，切平面也连续转动，这种曲面称为**光滑曲面**.

例 12 求曲面 $z=xy+x-1$ 的平行于平面 $3x+y-z=0$ 的切平面方程.

解 先求切点. 令 $f(x,y)=xy+x-1$，$f_x=y+1$，$f_y=x$，据已知条件，向量 $(y+1,x,-1)$ 与向量 $(3,1,-1)$ 平行，即有

$$\frac{y+1}{3}=\frac{x}{1}=\frac{-1}{-1},$$

解得 $x=1$，$y=2$，代入曲面方程得到 $z=2$，故点 $(1,2,2)$ 是所求之切点。曲面在切点的法向量 $\boldsymbol{n}=(3,1,-1)$，故所求的切平面方程为

$$3(x-1)+(y-2)-(z-2)=0,\quad 即\quad 3x+y-z-3=0.$$

§6.2 习　题

1. 求下列函数的偏导数。

(1) $f(x,y)=x^3y-xy^3$；　　(2) $f(x,y)=(x+2y)\operatorname{tg}(2x+y)$；

(3) $z=\ln\sin(x-2y)$；　　(4) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$；

(5) $u=z\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$；　　(6) $u=x^{\frac{y}{z}}$。

2. 求下列函数在指定点的偏导数。

(1) $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，在点 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(2) $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，在点 $(1,2,0)$。

3. 求下列函数的全微分。

(1) $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$，$x=2$，$y=1$，$dx=0.01$，$dy=0.03$；

(2) $z=\ln(1+x^2+y^2)$，$x=1$，$y=2$；

(3) $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$，在点 $(1,1,1)$；

(4) $z=e^{\frac{y}{x}}$；

(5) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$；

(6) $u=x^{yz}$。

4. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在原点可微，但偏导数不连续。

5. 求下列复合函数的导数。

(1) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$;

(2) $z=u^2v-uv^2$, $u=x\cos y$, $v=x\sin y$;

(3) $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$, $x=s+t$, $y=s-t$;

(4) $u=f(x, y, z)$, $x=s+t$, $y=s-t$, $z=st$.

6. 证明下列函数满足指定的一阶偏微分方程(f 可微)。

(1) $z=\exp\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$;

(2) $z=f(x^2+y^2)$ 满足 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$;

(3) $z=x^nf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$ 满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$。

7. 求曲面 $e^z-z+xy-3=0$ 在点(2, 1, 0)的切平面和法线方程。

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程。

9. 证明曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任意点(x_0, y_0, z_0)的切平面与三个坐标面围成的四面体体积是$\dfrac{9}{2}a^3$。

10. 当圆罐的底半径 R 由 2 米膨胀到 2.02 米，高 H 由 5 米膨胀到 5.03 米时，试用全微分求容积增加的近似值。

§6.3 高阶偏导数 泰勒公式

1. 高阶偏导数

设 $(x, y)\mapsto f(x, y)$ 是定义在 R^2 的某个开子集 D 内的函数，假定 f_x, f_y 仍在 D 内有定义，且存在偏导数，则 f_x 的偏导数 $(f_x)_x$ 和 $(f_x)_y$ 依次记为

$$f_{xx}(\text{或 } f_{x^2}) \quad \text{和} \quad f_{xy},$$

同理，f_y 的偏导数记为

$$(f_y)_x=f_{yx}, \quad (f_y)_y=f_{yy}=f_{y^2},$$

有时也记为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

它们称为 f 的二阶偏导数. 同样，二阶偏导数的偏导数称为 f 的三阶偏导数，继续求导可得更高阶的偏导数，可见求高阶偏导数实际上是逐次求一阶偏导数.

例 1 设 $f(x, y)=x^3y^2-xy^3$，求全部二阶偏导数及 f_{xy^2}，f_{y^2x}.

解 $f_x=3x^2y^2-y^3$，$f_y=2x^3y-3xy^2$，

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2-y^3)=6xy^2,$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2-y^3)=6x^2y-3y^2,$$

$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y-3xy^2)=6x^2y-3y^2,$$

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y-3xy^2)=2x^3-6xy,$$

$$f_{xy^2}=\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y-3y^2)=6x^2-6y,$$

$$f_{y^2x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^3-6xy)=6x^2-6y.$$

关于不同变元的偏导数 f_{xy}，f_{yx}，f_{xy^2} 等等统称为**混合偏导数**. 由例 1 可见，$f_{xy}=f_{yx}$，$f_{xy^2}=f_{y^2x}$，这里涉及一个普遍的事实.

定理 1 若 $f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 f_{xy} 与 f_{yx} 在开区域 D 内连续，则 $f_{xy}=f_{yx}$.

证 设 $(x_0, y_0)\in D$，我们只考察点 (x_0, y_0) 的充分小邻域 $U\subset D$ 内的点. 记

$$\begin{aligned}w=&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)\\&-f(x_0, y_0+\Delta y)+f(x_0, y_0),\end{aligned}$$

令

$$\varphi(x)=f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0),$$

则 w 可写成

$$w=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$$

据微分中值定理，得到

$$w=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x \quad 0<\theta_1<1$$
$$=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x,$$

再将方括号内的函数对 y 用微分中值定理，得到

$$w=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\,\Delta x, \quad 0<\theta_2<1. \quad (3.1)$$

另一方面，若令

$$\psi(y)=f(x_0+\Delta x, y)-f(x_0, y),$$

则可把 w 写成

$$w=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0).$$

根据微分中值定理，可得到

$$w=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y \quad 0<\theta_3<1$$
$$=[f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0, y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y$$
$$=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0<\theta_4<1. \quad (3.2)$$

比较式(3.1)和(3.2)，约去 $\Delta x\Delta y$，我们有

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y),$$

由于 f_{xy} 和 f_{yx} 在(x_0, y_0)处连续，因此，令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，即得

$$f_{xy}(x_0, y_0)=f_{yx}(x_0, y_0). \qquad \square$$

注意，定理 1 说明，当 f_{xy} 与 f_{yx} 存在且连续时，两者相等。当它们存在但不连续时，两者不一定相等。例如，函数

$$f(x, y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

在原点(0, 0)的两个偏导数 $f_{xy}(0, 0)$ 与 $f_{yx}(0, 0)$ 都存在，但两者不相等(证明留给读者)。

定理 1 的结果可推广到多元函数的高阶混合偏导数上去，就是说，在相应的高阶偏导数连续的条件下，高阶混合偏导数与求导次序无关。因此，可使各个偏导数按自变量的顺序求导到需要的次数。例如对 $f(x, y)$，它的任一个 n 阶偏导数都可写成形式

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}},$$

其中 k 是 0, 1, 2, …, n 中之一，故不同 n 阶偏导数只有 $n+1$ 个，而原来却有 2^n 个。

若函数 f 的一切 n 阶偏导数在 D 内连续，则记作 $f\in C^n(D)$ 或 $f\in C_D^n$，在不必强调区域 D 时，常简写为 $f\in C^n$。

例 2 证明函数 $u=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ 满足拉普拉斯方程(二阶偏微分方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-a}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}-(x-a)(-3r^{-4})\frac{x-a}{r}=\frac{-1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

用轮转法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-b)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-c)^2}{r^5},$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^5}[(x-a)^2\\&\quad+(y-b)^2+(z-c)^2]\\&=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.\end{aligned}$$

例 3 设 $u=f\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$，$f\in C^2$，求一阶偏导数与 u_{xy}。

解 令 $\xi=xy$ $\eta=\frac{x}{y}$，则 $u=f(\xi,\eta)$。为简便起见，通常记 $f_1=f_\xi$，$f_2=f_\eta$，$f_{12}=f_{\xi\eta}$，……(在求复合函数偏导数时经常使用)。用链式法则，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=f_1\cdot y+f_2\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=f_1\cdot x-f_2\frac{x}{y^2}.$$

注意，f_1, f_2仍然是以ξ, η为中间变量的关于x, y的复合函数，于是

$$u_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1\cdot y+f_2\frac{1}{y}\right)=y\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_1+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{1}{y_2}f_2$$

$$=y\left(f_{11}\cdot x-f_{12}\frac{x}{y^2}\right)+f_1+\frac{1}{y}\left((f_{21}\cdot x-f_{22}\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{y^2}f_2$$

$$=xyf_{11}-\frac{x}{y}f_{12}+\frac{x}{y}f_{21}-\frac{x}{y^3}f_{22}+f_1-\frac{1}{y^2}f_2.$$

据假设$f\in C^2$，因而$f_{21}=f_{12}$，故得

$$u_{xy}=xyf_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}+f_1-\frac{1}{y^2}f_2.$$

例 4 证明$u=f(x-at)+g(x+at)$满足弦振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx},$$

其中$f, g\in C^2$，a为常数.

证 $u_t=f'(-a)+g'a$, $u_{tt}=a^2f''+a^2g''$,

$u_x=f'\cdot 1+g'\cdot 1$, $u_{xx}=f''+g''$,

因此

$$u_{tt}=a^2u_{xx}.$$

2. 高阶微分

设函数$u=f(x, y)$，$f\in C^r$，则全微分(也称一阶微分)为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若x, y是自变量，则$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$是取定的x, y的任意改变量，可视为常数，因此，$\mathrm{d}u$仍是x, y的函数. 若$\mathrm{d}u$仍可微，则它的全微分$\mathrm{d}(\mathrm{d}u)$称为u的二阶微分，记为d^2u，于是

$$\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2. \qquad (3.4)$$

类似地可归纳定义 u 的 n 阶微分为 $\mathrm{d}^n u=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}u)$。微分的阶数越高，表达式越复杂，为了简化记号，常引用微分算符

$$\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y},$$

则

$$\mathrm{d}u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)u,$$

$$\mathrm{d}^2u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u,$$

归纳可得 u 的 n 阶微分为

$$\mathrm{d}^n u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u, \tag{3.5}$$

将它展开有 $n+1$ 项，其中符号 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j u$ 表示 $\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\partial y^j}$。

符号公式(3.5)可推广到 $n(n\geqslant 3)$ 元函数，如对三元函数 $u=f(x,y,z)$，有

$$\mathrm{d}^n u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u,\quad (n=1,2,\cdots).$$

这些记法简化了微分的表示法，在理论上带来不少方便，但在实际计算微分时，常用的仍是上节的微分法则。

例 5 设 $u=\mathrm{e}^{xy}$，求 $\mathrm{d}u$ 及 d^2u。

解 $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}(xy)=\mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\mathrm{d}[\mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)]=\mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)^2+\mathrm{e}^{xy}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{xy}[y^2\mathrm{d}x^2+2(xy+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}y^2].\end{aligned}$$

若 x，y 不是自变量，是中间变量，符号公式(3.5)不成立，因为此时 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 是自变量的函数，$\mathrm{d}^2x\neq 0$，$\mathrm{d}^2y\neq 0$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)+\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\\&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}^2y\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}^2x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}^2y.$$

与式(3.4)比较多出了最后两项.

3. 泰勒公式

一元函数的泰勒公式可以推广到多元函数,为简单起见,本段只讨论二元函数的泰勒公式,采用的方法是作一个辅助函数将二元函数化为一元函数,再利用一元函数的泰勒公式和复合函数微分法求出二元函数的泰勒公式.这些结果容易平行地推广到 n 元函数.

定理 2 设函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域 U 内有 $n+1$ 阶连续偏导数,(x_0+h, y_0+k) 是此邻域内的任一点,则有

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0)+r_n; \tag{3.6}$$

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

$$0<\theta<1.$$

式(3.6)称为 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 **n 阶泰勒公式**. r_n 称为**拉格朗日余项.**

证 考虑辅助函数

$$\varphi(t)=f(x_0+th, y_0+tk), \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\varphi(1)=f(x_0+h, y_0+k), \quad \varphi(0)=f(x_0, y_0),$$

据已知条件,$\varphi(t)$ 可展为麦克劳林公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \quad (0<\theta<1),$$

令 $t=1$，得到

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1. \tag{3.7}$$

下面用复合函数微分法求 $\varphi^{(m)}(t)$. 记 $x=x_0+th$, $y=y_0+tk$, 则

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y),$$

$$\varphi''(t)=[\varphi'(t)]'=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\right]$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y),$$

容易归纳得

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y).$$

令 $t=0$，从而 $x=x_0$, $y=y_0$，则得

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0),$$

又有

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),$$

一起代入式(3.7)即得带拉格朗日余项的泰勒公式(3.6). □

特别，零阶泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1$$

就是二元函数的**微分中值公式**.

泰勒公式(3.6)是将二元函数 $f(x,y)$ 展开成 $h=x-x_0$, $k=y-y_0$ 的多项式，可写成

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^m f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0$$
$$+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0)),\ (0<\theta<1).$$
(3.8)

若取 $x_0=y_0=0$，则得

$$f(x,\ y)=f(0,\ 0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(0,\ 0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x,\ \theta y),$$
$$0<\theta<1,$$ (3.9)

式(3.9)称为二元函数的 n **阶麦克劳林公式**，它将函数表示为 x，y 的多项式.

注意，式(3.6)仅是一个便于记忆的形式，每一项中

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,\ y_0)=\mathrm{d}^m f(x_0,\ y_0)$$

展开有 $m+1$ 项，即

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,\ y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i h^i k^{m-i}\frac{\partial^m f(x_0,\ y_0)}{\partial x^i\partial y^{m-i}}$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{\partial^m f(x_0,\ y_0)}{\partial x^i\partial y^{m-i}}(x-x_0)^i(y-y_0)^{m-i}.$$

例 6　求函数 $f(x,\ y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 的麦克劳林公式.

解　函数 f 在 R^2 有任意阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^{m-i}}=\mathrm{e}^{x+y},\quad \frac{\partial^m f(0,\ 0)}{\partial x^i\partial y^{m-i}}=\mathrm{e}^0=1,$$

由公式(3.9)可得 e^{x+y} 的麦克劳林公式

$$\mathrm{e}^{x+y}=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}(x+y)^m+\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}\mathrm{e}^{\theta(x+y)},$$
$$0<\theta<1.$$

这个结果与将 e^{x+y} 中的 $x+y$ 当作一个变量，用一元函数的麦克劳林公式所得的结果一致.

§6.3 习　　题

1．求下列函数的二阶偏导数．

(1) $u=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2) $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$．

2．求下列函数的指定阶偏导数．

(1) $u=x\ln(xy)$，　$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$；

(2) $u=e^{xyz}$，　$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$；

(3) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，$u_{xx}$，$u_{xz}$．

3．设 $f\in C^2$，求下列复合函数的指定偏导数．

(1) $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 u_{xx}，u_{xy}；

(2) $z=f(xy, x^2-y^2)$，求 z_{xx}，z_{xy}；

(3) $u=f(x, xy, xyz)$，求 u_{xy}．

4．证明下列函数满足指定的二阶偏微分方程．

(1) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$．

(2) $u(x, t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ 满足 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

5．求下列函数的二阶微分．

(1) $z=\dfrac{x}{y}$；　　(2) $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$；

(3) $u=\sqrt{x^2+y^2}$；　　(4) $u=f(ax, by)$．

6．求函数 $f(x, y)=e^x\ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式．

7．写出函数 $f(x, y)=x^2+2xy+2y^2$ 在点 (a, b) 的泰勒公式．

§6.4　隐函数及其微分法

1．由一个方程确定的隐函数

前面所讨论的一元函数，都是给出 $y=f(x)$ 的明显表达式，如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=e^x$ 等，称为显函数；但有时函数关系隐含于方程

$F(x, y)=0$ 中，即若 $(x, y)\mapsto F(x, y)$ 是定义在 $D\subset \mathrm{R}^2$ 上的一个二元实函数，如果对某个区间 $I\subset \mathrm{R}$ 上的每一个 x，都有唯一确定的 y 值满足方程

$$F(x, y)=0, \tag{4.1}$$

于是，二元方程(4.1)确定了一个定义在 I 上的函数 $f: I\to \mathrm{R}, x\mapsto y=f(x)$，且 f 在 I 上满足恒等式

$$F(x, f(x))\equiv 0, \quad x\in I.$$

这样确定的函数 $y=f(x)$，$x\in I$，称为由方程(4.1)所定义的**隐函数**，并说方程(4.1)存在隐函数。

必须指出，不是任何二元方程(4.1)都存在隐函数，例如

$$x^2+y^2+1=0$$

就不存在隐函数，因为平面上任何点都不满足它；有时即使存在隐函数，但是要将它表示成显函数的形式是十分困难的，甚至是办不到的。例如，方程

$$y-x-\varepsilon \sin y=0, \quad 0<\varepsilon<1;$$

$$a^y-xy=0, \quad a>1,$$

若我们限定 x 为自变量，要想把 y 表成 $y=f(x)$，就不是容易的事。下面的隐函数定理告诉我们，如果对二元函数 $F(x, y)$ 加上一些极易判定的条件，就可在局部范围内确定隐函数 f 的存在性，且 f 还是连续可微的，进而还可直接从 F 的表达式求得隐函数的导数。

定理 1（隐函数存在可微性定理(1)）

设 $D=\{(x, y)\mid |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$，$F: D\to R$，若

(1) F 在 D 上有关于 x，y 的连续偏导数；

(2) $F(x_0, y_0)=0$；

(3) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$；

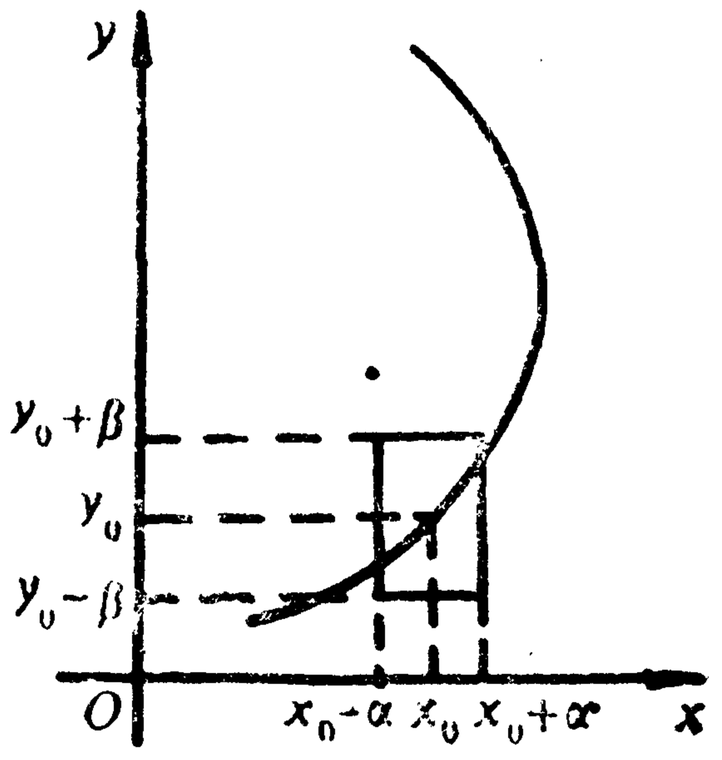


图 6.8

则存在包含于 D 内的点 (x_0, y_0) 的某邻域 $D_1=\{(x, y)\mid |x-x_0|<\alpha, |y-y_0|<\beta\}$, $\alpha\leqslant a$, $\beta\leqslant b$, 使

1° 方程 $F(x, y)=0$ 在 D_1 内存在唯一解 $y=f(x)$, 即

$$F(x, f(x))=0, \forall x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$$

且

$$f(x_0)=y_0;$$

2° f 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内有连续导数, 且有

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad \text{记为 } y'=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4.2}$$

证明 (略)

求导公式(4.2)不必死记, 事实上, 若隐函数存在, 则可对恒等式

$$F(x, f(x))\equiv 0$$

两边求导, 得到

$$F'_x+F'_y f'(x)=0 \quad (\text{或写成} \quad F'_x+F'_y\cdot y'=0),$$

解出 $f'(x)$ 即得式 (4.2). 求隐函数的导数常用这个方法.

定理 1 可推广到多元隐函数, 叙述如下:

定理 2 (隐函数存在可微性定理(2)) 设

(1) $n+1$ 元函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 在点 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ 的某个邻域 $D(n+1$ 维)内定义, 且 $F\in C^1$;

(2) $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)=0$;

(3) $F'_y(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)\neq 0$;

则存在含于 D 内的点 P_0 的某邻域 $D_1(n+1$ 维), 使

1° $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)=0$, 在 D_1 内存在唯一解 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 即

存在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的某邻域 $U(n$ 维), 在 U 上确定隐函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))=0,$$

$$y^0=f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0);$$

2° $f\in C^1(U)$, 且有

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{4.3}$$

例 1 设由方程 $e^{x+y} = xy$ 确定隐函数 y，求 y'，y''。

解 视y 为 x 的函数，方程两边对 x 求导，得到

$$e^{x+y}(1+y') = y + xy', \quad \text{即} \quad xy(1+y') = y + xy',$$

可解得

$$y' = \frac{y(1-x)}{x(y-1)}.$$

再对 x 求导，得到

$$y'' = \frac{[y'(1-x)-y]x(y-1) - y(1-x)[y-1+xy']}{x^2(y-1)^2},$$

将 y' 的表达式代入并化简得

$$y'' = -\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}.$$

例 2 设 $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2x + 2z - 2 = 0$，求在点 $(-1, 0, 1)$处的 z'_x，z'_y 及 z''_{xy}。

解 x，y 是自变量，z 是 x，y 的函数，方程两端分别对 x、y 求导，得到

$$2x - 6zz'_x + 2y - 2 + 2z'_x = 0, \tag{4.4}$$

$$4y - 6zz'_y + 2x + 2z'_y = 0. \tag{4.5}$$

将 $x = -1$，$y = 0$，$z = 1$ 代入，式(4.4)和(4.5)变为

$$-4 - 4z'_x = 0 \quad \text{和} \quad -4z'_y - 2 = 0,$$

故得

$$z'_x(-1, 0, 1) = -1, \quad z'_y(-1, 0, 1) = -\frac{1}{2}.$$

又将式(4.4)对 y 求导，得到

$$-6z'_y z'_x - 6zz''_{xy} + 2 + 2z''_{xy} = 0,$$

将 $x = -1$，$y = 0$，$z = 1$，$z'_x = -1$，$z'_y = -\frac{1}{2}$ 代入可得

$$-1 - 4z''_{xy} = 0 \Rightarrow z''_{xy}(-1, 0, 1) = -\frac{1}{4}.$$

例 3 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(y - x, yz) = 0$ 所确定的隐

函数，其中 $F\in C^2$，求 z_x，z_y 及 z_{xy}。

解 用一阶微分形式不变性，对方程求微分，得到

$$F_1(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)+F_2(z\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z)=0,$$

由此可得

$$\mathrm{d}z=\frac{F_1\mathrm{d}x-(F_1+zF_2)\mathrm{d}y}{yF_2},$$

故

$$z_x=\frac{F_1}{yF_2},\qquad z_y=-\frac{F_1+zF_2}{yF_2}.$$

而

$$\begin{aligned}z_{xy}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_1}{yF_2}\right)=\frac{1}{y^2F_2^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot yF_2-F_1\frac{\partial}{\partial y}(yF_2)\right)\\&=\frac{1}{y^2F_2^2}\{yF_2[F_{11}+F_{12}(z+yz_y)]-F_1[F_2\\&\quad+y(F_{21}+F_{22}(z+yz_y))]\}\\&=\frac{1}{y^2F_2^2}\left\{yF_2F_{11}+yF_2F_{12}\left(z-\frac{F_1+zF_2}{F_2}\right)\right.\\&\quad\left.-F_1F_2-yF_1F_{21}-yF_1F_{22}\left(z-\frac{F_1+zF_2}{F_2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{y^2F_2^3}(yF_2^2F_{11}+yF_1^2F_{22}-2yF_1F_2F_{12}-F_1F_2^2).\end{aligned}$$

2. 由方程组所确定的隐函数（向量值隐函数）

考察方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\\\quad\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)=0.\end{cases}\tag{4.6}$$

设函数 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 都在 R^{n+m} 的某开域 D 内有连续的偏导数，问题是要从这 m 个方程中确定 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 作为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的隐函数。当 $m=1$ 时（只有一个方程，一个未知函数），如定理 2 所述，能在局部范围内从 $F=0$ 确定 y。关于方程组所确定

的向量值隐函数的存在可微性定理，其条件与结论的叙述与定理2十分相似，只是定理2中的条件(3) $F'_y(P_0)\neq 0$ 需换为雅可比(Jacobi)函数行列式 J 在点 P_0 的值不为0，即

$$J|_{P_0}=\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\Big|_{P_0}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{P_0}\neq 0.$$

定理3（方程组的隐函数存在可微性定理） 设

(1) 函数 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_m)$ $(i=1,2,\cdots,m)$在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0;\ y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 的某邻域 V 内有连续偏导数；

(2) $F_i(P_0)=0,\quad (i=1,2,\cdots,m)$；

(3) $\dfrac{D(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\Big|_{P_0}\neq 0$；

则存在包含在 V 内的点 P_0 的某邻域 V_1，使

1° 在 V_1 内方程组(4.6)唯一确定向量值函数

$$y=f(x)\quad \text{即}\quad \begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

满足 $y_i^0=f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，$i=1,2,\cdots,m$。

2° f_i 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域内有连续偏导数，且有

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{D(F_1,\cdots,F_i,\cdots,F_m)}{D(y_1,\cdots,x_j,\cdots,y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\cdots,F_i,\cdots,F_m)}{D(y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_m)}}.$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\qquad (4.7)$$

具体求这些偏导数时，也不必死记公式(4.7)，常用以下求法直接推得(4.7)。例如，考虑由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z; u, v) = 0, \\ G(x, y, z; u, v) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

确定隐函数

$$\begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \end{cases} \tag{4.9}$$

对方程组(4.8)求全微分，得到

$$\begin{cases} F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z + F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v = 0, \\ G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_z\,\mathrm{d}z + G_u\,\mathrm{d}u + G_v\,\mathrm{d}v = 0, \end{cases}$$

把它看作 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ 的线性方程组，因 $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$，据克莱姆法则，可解出 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= -\frac{\begin{vmatrix} F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z & F_v \\ G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_z\,\mathrm{d}z & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \\ &= -\left(\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}x + \frac{\dfrac{D(F, G)}{D(y, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}y + \frac{\dfrac{D(F, G)}{D(z, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}z \right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z \\ G_u & G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_z\,\mathrm{d}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \\ &= -\left(\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, x)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}x + \frac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, y)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}y + \frac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, z)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}\,\mathrm{d}z \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

式(4.10)中 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的系数就是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$; 式(4.11)中 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的系数就是 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z}$.

隐函数的(偏)导数也可用下面方法求得. 例如, 所考虑的是以下问题:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

确定

$$y = y(x), \quad z = z(x). \tag{4.13}$$

因为(4.12)是二个方程三个变量,只有一个独立变量,按(4.13)的要求,x 是独立变量, 将(4.13)代入(4.12)得恒等式

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \\ G(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

将式(4.14)对 x 求导, 得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$的线性方程组

$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ G_x + G_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \end{cases}$$

可解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}.$$

例 4 试说明方程组

$$x^2 + y^2 = 2z^2, \quad x + y + z = 3$$

在点 $P_0(1, 1, 1)$ 的邻域内确定唯一的一组有连续导数的函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 并求在点 P_0 处的 y', z'; y'', z'' 值.

解 记

$$F = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad G = x + y + z - 3,$$

显然 $F, G \in C^1$, 在 R^3 上, 且

$$F(1, 1, 1) = 0, \quad G(1, 1, 1) = 0,$$

$$\left.\frac{D(F, G)}{D(y, z)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2y & -4z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{P_0} = 6 \neq 0,$$

定理 3 的条件满足, 说明所给方程组在点 P_0 的邻域内能确定唯一的一组有连续导数的函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$. 视 y, z 为 x 的函数, 将方程组对 x 求导, 得到

$$\begin{cases} x + yy' - 2zz' = 0, \\ 1 + y' + z' = 0, \end{cases} \tag{4.15}$$

将点 P_0 的坐标 $x = y = z = 1$ 代入可得

$$\begin{cases} y' - 2z' = -1, \\ y' + z' = -1, \end{cases} \text{解得} \quad \begin{cases} y'(1, 1, 1) = -1, \\ z'(1, 1, 1) = 0. \end{cases}$$

将式(4.15)再对 x 求导, 得到

$$\begin{cases} 1 + y'^2 + yy'' - 2z'^2 - 2zz'' = 0, \\ y'' + z'' = 0, \end{cases}$$

将 $x = y = z = 1$, $y' = -1$, $z' = 0$ 代入可得

$$\begin{cases} y'' - 2z'' = -2, \\ y'' + z'' = 0, \end{cases} \text{解得} \quad \begin{cases} y''(1, 1, 1) = -\dfrac{2}{3}, \\ z''(1, 1, 1) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

例 5 设由方程组

$$\begin{cases} xy - u^2 + v^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - uv = 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

定义隐函数 u, v, 求 u_x, u_y, v_x, v_y.

解 对方程组(4.16)求微分, 得到

$$\begin{cases} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - 2u\,\mathrm{d}u + 2v\,\mathrm{d}v = 0, \\ 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2u\,\mathrm{d}u - 2v\,\mathrm{d}v = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \\ v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y, \end{cases}$$

解出

$$\mathrm{d}u=\frac{\begin{vmatrix} y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y & -2v \\ 2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(yu+4xv)\mathrm{d}x+(xu+4yv)\mathrm{d}y}{2(u^2+v^2)},$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\begin{vmatrix} 2u & y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y \\ v & 2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(4xu-yv)\mathrm{d}x+(4yu-xv)\mathrm{d}y}{2(u^2+v^2)}.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu+4xv}{2(u^2+v^2)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xu+4yv}{2(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}.$$

注 若只求 u_x, v_x, 则只需将方程组 (4.15) 对 x 求导就可解得;而将(4.15)对y求导可解得 u_y, v_y.

例 6 设 $y=f(x,t)$, 而 t 是由方程 $G(x,y,t)=0$ 所确定的 x, y 的函数,其中 f, g 可微, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程组为

$$\begin{cases} y=f(x,t), \\ G(x,y,t)=0, \end{cases}$$

对它求微分,得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}y=f_x\,\mathrm{d}x+f_t\,\mathrm{d}t, \\ G_x\,\mathrm{d}x+G_y\,\mathrm{d}y+G_t\,\mathrm{d}t=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \mathrm{d}y-f_t\,\mathrm{d}t=f_x\,\mathrm{d}x, \\ G_y\,\mathrm{d}y+G_t\,\mathrm{d}t=-G_x\mathrm{d}x, \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}t$ 得

$$(G_t + f_t G_y)\mathrm{d}y = (G_t f_x - f_t G_x)\mathrm{d}x,$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G_t f_x - f_t G_x}{G_t + f_t G_y}.$$

3. 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{4.17}$$

如果 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都在$[\alpha, \beta]$上连续，并且当 $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$ (或$(\alpha, \beta]$)，且 $t_1 \neq t_2$ 时，$(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$，称曲线 L 为**无重点曲线**或**简单曲线**. 如果对 L 上每点，$x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 都连续且不同时为0，则称曲线 L 为**光滑曲线**. 由第 4 章 § 4.6，曲线 L 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切线与法平面方程为

切线
$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}, \tag{4.18}$$

法平面
$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0, \tag{4.19}$$

其中 $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. 显然，光滑曲线是有连续转动切线的曲线.

设空间曲线 L 由隐函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

给出，这里函数 F, G 具有一阶连续偏导数，我们来求曲线 L 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程.

设 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0} \neq 0$，则由方程组(4.20)可确定

$$y = y(x), \quad z = z(x), \tag{4.21}$$

并且

$$y'(x)=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}},\quad z'(x)=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_x\\ G_y & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}},$$

这时式(4.21)就是曲线 L 的参数方程，x 为参数. 因此曲线 L 在点 P_0 的切向量为 $\boldsymbol{\tau}(1, y'(x_0), z'(x_0))$，故得切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}, \tag{4.22}$$

或

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{P_0}}. \tag{4.23}$$

又这切线是曲面 $F(x, y, z)=0$ 与 $G(x, y, z)=0$ 在 P_0 的切平面的交线，故它的方程又可表示为

$$\begin{cases}F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0,\\ G_x(x-x_0)+G_y(y-y_0)+G_z(z-z_0)=0,\end{cases} \tag{4.24}$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)$$
$$+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0. \tag{4.25}$$

显然这后一方程又可写成

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}=0, \tag{4.26}$$

其中一切偏导数都在 P_0 取值.

例 7 求例 4 的方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+z=3\end{cases}$$

所表示的曲线在点(1, 1, 1)处的切线和法平面方程.

解 例 4 已求出在点(1, 1, 1)处，$y'=-1$，$z'=0$，故切向量 $\vec{\tau}=(1,-1,0)$，因此可得

切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$.

法平面方程为 $(x-1)-(y-1)=0$，即 $x-y=0$.

§6.4 习 题

1. 求下列隐函数的导数：

(1) $xy-\ln y+\ln(1+x)=0$，求 y'.

(2) $e^x-xy+\sin y=0$，求 y'.

(3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，求 y'，y''.

(4) $x^3+y^3-3axy=0$，求y'，y''.

(5) $yz^2-xz+xy-4=0$，求z_x，z_y.

(6) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求z_x，z_y.

(7) $x+y+z=e^z$，求 $z(x, y)$的一阶、二阶偏导数.

(8) $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$，求 $z(x, y)$ 的一、二阶偏导数.

(9) $F(x-z, y+z)=0$，$F\in c^\infty$ 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(10) $F(x, y, x-z, y^2-u)=0$，$F\in c^2$ 求 u_y，u_{yy}.

2. 证明方程 $xy^1-x^3+y=0$ 在点 $(0, 0)$ 附近定义一个隐函数 $x\mapsto y=f(x)$，并求 f 的图形在点 $(0, 0)\in\mathbf{R}^2$ 处的切线.

3. 试证：下列各题中，由隐式所确定的函数满足所给方程.

(1) $1+xy=c(x-y)$，其中 c 为常数，$\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{1+y^2}$.

(2) 设 $\varphi(u, v)$ 可微，证明由方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的 $z=f(x, y)$满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c \quad (a, b, c\text{ 为常数}).$$

(3) $F(xy, z-2x)=0$，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x$.

(4) $F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

4. 求下列方程组所确定的隐函数的导数：

(1) 设 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

(2) 设 $\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 求 u_x, u_y, v_x, v_y.

(3) 设 $\begin{cases} u^3+xv=y, \\ v^3+yu=x, \end{cases}$ 求 u_x, v_x.

5. (1) 证明在点(0, 0, 0)附近，方程组

$$\begin{cases} 4xy+2xz+4y-3z=0 \\ xy+xz+yz+2x+2y-2z=0 \end{cases}$$

定义了两个有连续导数的隐函数 $x\mapsto y(x)$, $x\mapsto z(x)$, 并使 $y(0)=z(0)=0$.

(2) 试求在 R^3 内由上面方程组所确定的曲线在点 (0, 0, 0) 的切线方程.

6. 设 $f(x, y, z)=x^2yz^3$, 其中 $z=z(x, y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数，求 $f_x(1, 1, 1)$.

7. 求下列曲线在给定点的切线及法平面方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0, \end{cases}$ $P_0(1, 1, 1)$.

(2) $\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2+z^2=14, \end{cases}$ $P_0(-1, -2, 3)$.

8. 已知曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 上某点的切线垂直于向量(1,4,1)，求该切线方程.

*§6.5 向量值函数的微分法 函数的相关性

在上节关于向量值隐函数的理论中提到了雅可比行列式及其作用. 本节来讨论向量值函数的微分法，雅可比行列式及函数的相关性，它们在今后的重积分及微分方程理论中都有重要应用.

1. 向量值函数的微分法

对一元函数 $x\mapsto y=f(x)$, 设它在 $I\subset R$ 上定义且可导，则有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

如果记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，$f'=Df$，则式(5.1)可写成

$$\mathrm{d}y = Df(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

考虑定义在开区域 $\Omega\subset R^n$ 内取值于 R^m 的向量值函数 f：$\Omega\mapsto R^m$，$x\mapsto f(x)$，详细写出其坐标函数为

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases}$$

如果 $f\in C^1$，则有

$$\mathrm{d}y_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

按矩阵乘法，上式可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

如果记

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}y=\begin{pmatrix}\mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}y_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathrm{d}y_m\end{pmatrix},\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}\end{pmatrix},$$

$$Df(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

则式(5.3)可写成

$$\mathrm{d}y=Df(x)\mathrm{d}x, \tag{5.5}$$

式(5.4)的矩阵称为 $f(x)$ **的雅可比矩阵**，或 $y_1,\cdots,y_m$ 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的**雅可比矩阵**，也叫**函数矩阵**. 当 $m=n$ 时，$Df(x)$ 是方阵，其行列式 $\det(Df(x))$ 称为 f（或 $y_1,\cdots,y_n$ 关于 $x_1,\cdots,x_n$）的**雅可比行列式**或函数行列式，通常简记为 J，或将全部因变量和自变量写出记为

$$\frac{D(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\ \text{或}\ \frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

式(5.5)在形式上与一元函数的微分公式(5.2)一样. 对向量值函数的复合函数，也有与一元函数的复合函数求导公式类似的求导法则.

设有两个向量值函数 $y=y(u)$ 与 $u=u(x)$，它们分别在开区域 $V\subset R^k$ 和 $\Omega\subset R^n$ 内定义：

$$\begin{aligned} y&:\ V\to R^m,\quad u\mapsto y(u),\\ u&:\ \Omega\to R^k,\quad x\mapsto u(x),\end{aligned} \tag{5.6}$$

如果 u 的值域 $u(\Omega)\subset V$，则 $y=y(u(x))$ 是在 Ω 上定义的 m 维向量值函数。若用坐标分量表示，即是

$$y_i=y_i(u_1,\cdots,u_k),\quad i=1,2,\cdots,m,$$

$$u_j=u_j(x_1,\cdots,x_n),\quad j=1,2,\cdots,k.$$

假设 $y_i\in C^1$，$u_j\in C^1$，则据复合函数微分法有

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_t}=\frac{\partial y_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_t}+\frac{\partial y_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_t}+\cdots\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_t},$$

$$(i=1,2,\cdots,m,\ t=1,2,\cdots,n)$$

按矩阵乘法，这 $m\times n$ 个等式可用矩阵表示为

$$Dy(u(x))=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ &\cdots&\cdots&\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\frac{\partial y_m}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial u_1}&\frac{\partial y_1}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial u_k}\\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1}&\frac{\partial y_2}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial y_2}{\partial u_k}\\ &\cdots&\cdots&\\ \frac{\partial y_m}{\partial u_1}&\frac{\partial y_m}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial u_k}\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ &\cdots&\cdots&\\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}&\frac{\partial u_k}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}=Dy(u)\cdot Du(x).\tag{5.7}$$

特别，当 $m=k=n$ 时，据(5.7)可得到雅可比行列式的两条性质：

性质 1
$$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(u_1,\cdots,u_n)}\frac{D(u_1,\cdots,u_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}. \tag{5.8}$$

性质 2
$$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}=1. \tag{5.9}$$

性质 1 是复合函数求导公式 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ 的推广，性质 2 是反函数求导公式 $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$ 的推广。

从形式上看，性质 1 中将 u_i 换为 x_i，x_i 换为 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$就可得到性质 2，但这时函数之间的关系(5.6)成为

$$\begin{cases} y_1=y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_n=y_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$ 与其反函数 $$\begin{cases} x_1=x_1(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \cdots\cdots \\ x_n=x_n(y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{cases}$$

之间的关系。从映射(或变换)的观点看，这是映射(变换)与其逆映射(逆变换)之间的关系。据向量值隐函数的存在可微性定理，可得以下反函数的存在可微性定理。

定理 1 设函数 f_i 在点 $x_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内有连续的一阶偏导数，并且

$$y_i^0=f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\quad i=1,2\cdots,n,$$

$$\left.\frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{x_0}\neq 0,$$

则存在点 $y_0(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0)$ 的某邻域 U 和点 x_0 的某邻域 V，使得 $\forall y(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in U$，方程组

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{cases} \tag{5.10}$$

在 V 内有唯一的一组有连续偏导数的解

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(y_1,\ y_2,\ \cdots,y_n), \\ \cdots\cdots \\ x_n=\varphi_n(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n), \end{cases} \quad \text{且满足} \quad \begin{cases} x_1^0=\varphi_1(y_1^0,\ \cdots,\ y_n^0), \\ \cdots\cdots \\ x_n^0=\varphi_n(y_1^0,\ \cdots,\ y_n^0). \end{cases} \tag{5.11}$$

这时区域U内点y与区域V内点x是一一对应的。

证明 将式(5.10)写成方程组

$$\begin{cases} F_1=f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)-y_1=0, \\ \cdots\cdots \\ F_n=f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)-y_n=0. \end{cases} \tag{5.12}$$

记$P_0=(x_1^0,\cdots,\ x_n^0;\ y_1^0,\cdots,\ y_n^0)$，据假设，§6.4 定理 3 的条件(1)、(2)满足，而条件(3)成为

$$\left.\frac{D(F_1,\ \cdots,\ F_n)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\right|_{P_0}=\left.\frac{D(f_1,\ \cdots,\ f_n)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\right|_{x_0}\neq 0$$

也满足，故应用 §6.4 定理 3 即得本定理。 □

2. 函数的相关性

定义(函数相关) 设有函数组

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n), \\ \cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,\ \cdots,\ x_n) \end{cases} \tag{5.13}$$

在区域$D\subset R^n$的定义且有连续的一阶偏导数，如果$y_1,\ \cdots,\ y_m$中的某个，例如y_j，可以用其余的函数表示为

$$y_j=F(y_1,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_m),\quad (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in D, \tag{5.14}$$

或者存在m元函数G，使

$$G(y_1,\ \cdots,\ y_m)=0,\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)\in D, \tag{5.15}$$

其中F，G具有连续的一阶偏导数，且这些偏导数不全为 0，则称$y_1,\ \cdots,\ y_m$在D上**函数相关**；如果在D的任何子区域上都不能使式(5.14)或(5.15)成立，则称函数组$y_1,\ \cdots,\ y_m$在D上是**函数独**

立的，或函数无关的。

为了讨论函数组的函数相关性判别法，需要引入雅可比矩阵的秩的概念。在 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的雅可比矩阵

$$Dy(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

中，如果在 D 内至少有一个 k ($\geqslant 1$) 阶子行列式不恒等于 0，而一切 $k+1$ 阶子行列式恒等于 0(因而在 D 内一切高于 k 阶的子行列式都恒等于0)，则称 $Df(x)$在 D 内的**秩**为 k。如果在点 x_0 有 k 阶子行列式异于 0，则称 $Df(x)$ 在点 x_0 达到秩 k。

定理 2 设函数组 (5.13) 的雅可比矩阵 $Df(x)$ 在 D 内的秩为 $k\geqslant 1$，它在点 $x_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 达到此秩，则在 x_0 的充分小邻域内，有

(1) $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 中有 k 个函数是函数独立的(就是在 x_0 处不为 0 的那个 k 阶子行列式中所涉及的 k 个函数)；其余的函数与这 k 个函数都函数相关。

(2) 当 $k=m$ 时，函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 函数独立。

推论 对函数组(5.13)，

(1) 当 $m=n$ 时，若在 D 内每点有

$$J=\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}\neq 0,$$

则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在 D 上函数无关；若在 D 上每点有 $J=0$，则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在 D 上函数相关。

(2) 当 $m>n$ 时，$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 必函数相关。

证明 略。

例 1　证明函数组

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ y_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

在 R^3 内函数相关.

解　雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2 + x_3 & x_3 + x_1 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的秩 $\leqslant 2$，根据定理 2，y_1，y_2，y_3 是函数相关的. 事实上，存在关系 $y_2 = y_1^2 - 2y_3$. 易看出，y_1，y_2，y_3 中每两个都是函数独立的.

例 2　证明旋转变换函数组

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha(\alpha \text{ 是常数})$$

在 R^2 内函数独立.

证　因为在 R^2 内

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

据定理 2 的推论知它们在 R^2 内函数独立.

§6.5 习　　题

证明下列函数组是函数无关的：

1. $x = \dfrac{\xi}{1+\eta},\ y = \dfrac{\xi\eta}{1+\eta},\ 0 < \xi < +\infty,\ 0 < \eta < +\infty$.
2. $u_1 = x,\ u_2 = x + y,\ u_3 = x + y + z$，在 R^3.
3. $u = x + ze^{-y},\ v = y + ze^{-x}$，在 R^3.

§6.6　二元函数的极值

1. 二元函数的极值

定义　设函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域 U 内定义，若对 $\forall (x, y) \in U$，有

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)[f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)],\qquad (6.1)$$

则称函数 f 在点 P_0 取**极大(小)值** $f(x_0, y_0)$，称点 P_0 为 $f(x, y)$ 的**极大(小)点**. 极大值、极小值统称为**极值**，取到极值的点统称为**极值点**. 可能取极值的点称为**极值可疑点**. 若在式 (6.1) 中，当 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时，严格不等式成立，就称这种极大(小)值为**严格的极大(小)值**.

若 $f(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值，则 $f(x_0, y_0)$ 一定是一元函数 $f(x, y_0)$ 与 $f(x_0, y)$ 的极值. 据一元函数极值的必要条件，如果 f 在点 (x_0, y_0) 有偏导数，则

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = 0,$$

于是有以下定理 .

定理 1 (极值点的必要条件) 设点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f \in C^1$，则下列三个等价条件成立：

(1) $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(2) $\mathrm{d}f(x_0, y_0) = 0$.

(3) f 的图形在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切平面与 xOy 平面平行.

我们称满足

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

的点为 f 的**驻点**. 定理 1 说明，当 $f \in C^1$ 时，f 的极值点一定是驻点. 但反之不成立. 例如，点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 的驻点，但不是极值点. 因为在点 $(0,0)$ 的任意去心 r 邻域内，都有 $f(x, 0) > 0$，$f(0, y) < 0$. 另外，部分或全部一阶偏导数不存在的点也可能是极值点，例如，圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，显然，$(0, 0)$ 是其极小点，但是它的两个偏导数 z_x、z_y 在点 $(0, 0)$ 都不存在. 因此，极值可疑点是使一阶偏导数同为 0 或者不存在的点.

因为驻点不一定是极值点，因此，对每一个驻点都必须判别它

是否是极值点，下面讲极值点的一个常用判别法.

定理 2（极值点的充分条件） 设 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内有连续的二阶偏导数，P_0 是 f 的驻点，记 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f_{yy}(x_0, y_0)$，则有

1° 当 $AC-B^2>0$ 时(这时 A 与 C 必同号)，P_0 是 f 的极值点，又

(1) 若 $A>0$，P_0 是 f 的极小点；

(2) 若 $A<0$，P_0 是 f 的极大点.

2° 当 $AC-B^2<0$ 时，P_0 不是 f 的极值点.

证 用一阶泰勒公式，因 $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$，故有

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$
$$+2hkf_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)],$$
$$0<\theta<1 \tag{6.2}$$

据假设，f 的二阶偏导数在点 P_0 处连续，所以

$$f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{xx}(x_0, y_0)+\alpha=A+\alpha,$$
$$f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{xy}(x_0, y_0)+\beta=B+\beta,$$
$$f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{yy}(x_0, y_0)+\gamma=C+\gamma,$$

（当 $h\to 0$、$k\to 0$ 时，$\alpha\to 0$、$\beta\to 0$、$\gamma\to 0$）.

因此，式(6.2)可写成

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)$$
$$=\frac{1}{2}\varphi(h, k)+o(\rho^2)\quad(\rho\to 0), \tag{6.3}$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$，$\varphi(h, k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$. 这是因为

$$\left|\frac{\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2}{\rho^2}\right|\leqslant|\alpha|+2|\beta|+|\gamma|$$

因而

$$\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)=o(\rho^2)\quad(\rho\to 0).$$

故当 ρ 充分小时，式(6.3)右边的符号由 $\varphi(h, k)$ 的符号确定. 下面讨论 $\varphi(h, k)$ 的符号.

因 h、k 不同时为 0，不妨设 $k\neq 0$，则 $\varphi(h, k)$ 可写成

$$\varphi(h, k)=k^2\left[A\left(\frac{h}{k}\right)^2+2B\left(\frac{h}{k}\right)+C\right]=k^2 I. \tag{6.4}$$

根据二次三项式 $Ax^2+2Bx+C=I(x)$（抛物线）的性质：当且仅当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 时，$I(x)$恒正；当且仅当 $A<0$，$AC-B^2>0$ 时，$I(x)$恒负；而当 $AC-B^2<0$ 时(包括 $A=0$ 情况)，可取到 x_1，x_2，使 $I(x_1)<0$，$I(x_2)>0$. 立即可得以下结论：

(1) 当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 时，$\varphi(h, k)$ 恒正，P_0 是严格极小点；

(2) 当 $A<0$，$AC-B^2>0$ 时，$\varphi(h, k)$ 恒负，P_0 是严格极大点；

(3) 当 $AC-B^2<0$ 时，在点 P_0 的任何邻域内，总可找到点 (x_0+h_1, y_0+k_1)和点(x_0+h_2, y_0+k_2)，使 $\frac{h_1}{k_1}=x_1$，$\frac{h_2}{k_2}=x_2$，满足 $\varphi(h_1, k_1)=k_1^2 I\left(\frac{h_1}{k_1}\right)=k_1^2 I(x_1)<0$，$\varphi(h_2, k_2)=k_2^2 I\left(\frac{h_2}{k_2}\right)=k_2^2 I(x_2)>0$，即 P_0 不是极值点. □

注意，当 $AC-B^2=0$ 时，不能判定 P_0 是否是极值点. 例如，对 $f(x, y)=ax^4+by^4$，点 $O(0, 0)$ 是其驻点，$f(0, 0)=0$，且在点 O 有 $AC-B^2=0$，但易验证，当 $a>0$、$b>0$ 时，O 是极小点；当 $a<0$、$b<0$ 时，O 是极大点；当 $a>0$，$b<0$ 时，O 不是极值点.

例 1 求函数 $f(x, y)=2x^3-2y^3-3x^2+6y$ 的极值.

解 $f_x=6x^2-6x$，$f_y=-6y^2+6$，解方程组

$$\begin{cases}6x^2-6x=0\\-6y^2+6=0\end{cases}\text{得到}\begin{cases}x=0, 1.\\y=\pm 1.\end{cases}$$

故 f 有 4 个驻点：$(0, -1)$，$(0, 1)$，$(1, -1)$，$(1, 1)$. 再求 f 的

二阶偏导数，

$$f_{xx}=12x-6,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=-12y,$$

列出表格

驻点	A	B	C	$AC-B^2$	$f(x,y)$
$(0,-1)$	-6	0	12	−	-4，不是极值
$(0,1)$	-6	0	-12	+	4，极大值
$(1,-1)$	6	0	12	+	-5，极小值
$(1,1)$	6	0	-12	−	3，不是极值

结论：极大值为 $f(0,1)=4$，极小值为 $f(1,-1)=-5$。

例 2 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值。

解 $f_x=4x^3-2(x+y)$，$f_y=4y^3-2(x+y)$，解方程组

$$\begin{cases}4x^3-2(x+y)=0\\4y^3-2(x+y)=0\end{cases}$$

得 $$x=y=0,\ \pm1.$$

故 f 有三个驻点：$(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,-1)$。求出 f 的二阶偏导数

$$f_{xx}=12x^2-2,\ f_{xy}=-2,\ f_{yy}=12y^2-2,$$

列出表格

驻点	A	B	C	$AC-B^2$	$f(x,y)$
$(0,0)$	-2	-2	-2	0	0，
$(1,1)$	10	-2	10	+	-2，极小值
$(-1,-1)$	10	-2	10	+	-2，极小值

对点 $(0,0)$，不能用定理 2 判别，但是，对足够小的 $\varepsilon>0$，$f(\varepsilon,\varepsilon)=2\varepsilon^2(\varepsilon^2-2)<0$，$f(\varepsilon,-\varepsilon)=2\varepsilon^4>0$，故 $(0,0)$ 不是极值点。

结论：极小值为 $f(1,1)=-2$ 与 $f(-1,-1)=-2$，无极大

值.

注 例2中有两个极小值而无极大值，这与一元函数情况不同，对一元连续函数，两个极小值之间必有极大值.

2. 条件极值——拉格朗日乘数法

在实际问题中往往会遇到这样的极值问题：在自变量 x, y, z 受一定条件约束的情况下求 $u=f(x, y, z)$ 的极值. 这种极值叫做**条件极值**，而把本节1中讲的极值叫做**无条件极值**.

条件极值问题的一般提法是：在条件(叫做约束条件)

$$F_j(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0, \quad j=1, 2, \cdots, m$$

之下，求函数(叫目标函数)

$$u=f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

的极值. 为简单起见，我们先讨论在条件 $F(x, y, z)=0$ 下求函数 $u=f(x, y, z)$ 的极值问题. 如果从 $F(x, y, z)=0$ 能较简单地解出 $z=\varphi(x, y)$，代入目标函数就可化为求二元函数 $u=f(x, y, \varphi(x, y))$ 的无条件极值问题. 但是，一般要从 $F(x, y, z)=0$ 解出 z 是困难的，甚至是办不到的. 下面我们介绍一种求条件极值可疑点的方法——拉格朗日乘数法.

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是条件极值点，则有 $F(x_0, y_0, z_0)=0$. 假设在 P_0 的邻域内 F, f 有连续的一阶偏导数，且 $F_z(P_0)\neq 0$，根据隐函数存在可微性定理，$F(x, y, z)=0$ 在 P_0 的邻域内定义了唯一的具有连续偏导数的解 $z=\varphi(x, y)$，满足

$$\varphi(x_0, y_0)=z_0, \ F(x, y, \varphi(x, y))=0,$$

并且有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}, \tag{6.5}$$

于是把求条件极值问题化为求函数

$$u=f(x, y, \varphi(x, y))\equiv \psi(x, y)$$

的极值问题. 因 P_0 是 $f(x, y, z)$ 的极值点，则 $Q_0(x_0, y_0)$ 是

$\psi(x, y)$的极值点，据极值的必要条件，有

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

利用复合函数求导法则及式(6.5)，上式可写成

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f_x + f_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_x - \frac{F_x}{F_z} f_z = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = f_y + f_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_y - \frac{F_y}{F_z} f_z = 0,$$

若令 $\frac{f_z}{F_z} = -\lambda$，则有

$$f_x + \lambda F_x = 0, \ f_y + \lambda F_y = 0, \ f_z + \lambda F_z = 0, \qquad (6.6)$$

因此，(x_0, y_0, z_0)除满足约束条件 $F(x, y, z) = 0$ 外，还需满足式(6.6)。如果引入函数 Φ：

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z),$$

则式(6.6)及 $F(x, y, z) = 0$，即是

$$\Phi_x = 0, \ \Phi_y = 0, \ \Phi_z = 0, \ \Phi_\lambda = 0,$$

这样，就得到了完全对称的，便于记忆的极值点必须满足的条件。仿照上述讨论，不难得到求一般条件极值问题极值可疑点的方法，这里不再详述。现就两种代表性情况总结如下：

1) 求 $f(x, y, z)$ 在条件 $F(x, y, z) = 0$ 下的极值点。

(1) 令 $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$，$\lambda$ 是乘数。

(2) 由方程组

$$\begin{cases} \Phi_x = f_x + \lambda F_x = 0, \\ \Phi_y = f_y + \lambda F_y = 0, \\ \Phi_z = f_z + \lambda F_z = 0, \\ \Phi_\lambda = F(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

解出 x_0, y_0, z_0 和 λ，则点(x_0, y_0, z_0)便是极值可疑点。

2) 求 $f(x, y, u, v)$ 在条件 $F(x, y, u, v) = 0$，$G(x, y, u, v) = 0$ 下的极值点。

(1) 令 $\Phi = f + \lambda F + \mu G$，$\lambda, \mu$ 为乘数。

(2) 由方程组

$$\begin{cases} \Phi_x = f_x + \lambda F_x + \mu G_x = 0, \\ \Phi_y = f_y + \lambda F_y + \mu G_y = 0, \\ \Phi_u = f_u + \lambda F_u + \mu G_u = 0, \\ \Phi_v = f_v + \lambda F_v + \mu G_v = 0, \\ \Phi_\lambda = F = 0, \\ \Phi_\lambda = G = 0 \end{cases}$$

解出 x_0, y_0, u_0, v_0, λ, μ, 则点(x_0, y_0, u_0, v_0)即是极值可疑点.

上述这种方法称为**拉格朗日乘数法**，它是求条件极值问题极值可疑点的方法. 至于如何判定这些极值可疑点是否取极值的问题较为复杂,我们不去讨论了. 在许多实际问题中,常常要求函数的最大(小)值,而据问题的实际意义可断定最大(小)值是存在的,如果求得极值可疑点只有一、二个点,就不难判断出在那个点取极大(小)值.

例 3 建造一个容积为 V 米^{3}的长方形无盖水池，已知底面每平方米造价为 p_1，侧面每平方米造价为 p_2，问怎样选择水池的尺寸才使费用最少.

解 设水池的长、宽、高分别为 x, y, z(米)(如图 6.9 所示), 体积 $V = xyz$. 现在的问题是:在体积 V 固定的条件下求费用

$$W = p_1 xy + p_2(2xz + 2yz) \quad (6.7)$$

的最小值. 若从 $V = xyz$ 解出 $z = \dfrac{V}{xy}$ 代入式(6.7),则将条件极值问题化为求

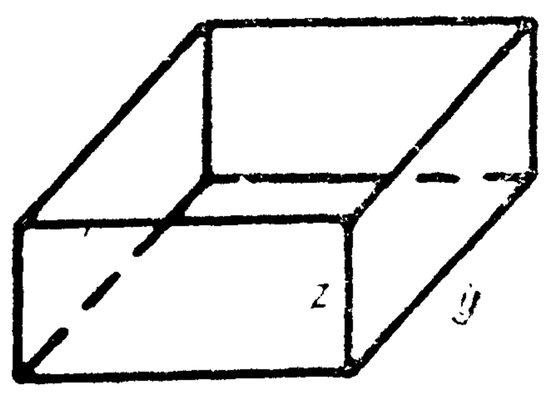


图 6.9

$$W = p_1 xy + 2p_2 V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$$

在区域 $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 的无条件极值问题. 由方程组

$$\begin{cases} W_x = p_1 y - \dfrac{2p_2 V}{x^2} = 0, \\ W_y = p_1 x - \dfrac{2p_2 V}{y^2} = 0, \end{cases}$$

解得 $x_0=y_0=\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}$，在 D 内只有一个极值可疑点$\left(\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}},\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}\right)$，而据题意知，$W(x,y)$在 D 内必有最小值，因此 W 在该点取最小值。当 $x_0=y_0=\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}$时，$z_0=V\Big/\left(\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}\right)^2=\frac{p_1}{2p_2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}$，故选择尺寸为 $x_0=y_0=\frac{2p_2}{p_1}$ $z_0=\sqrt[3]{\frac{2p_2V}{p_1}}$ 米时，费用最少。

例 4 求原点到椭圆 $5x^2+6xy+5y^2=8$ 的最大距离和最小距离；并求椭圆的面积。

解 设 $P(x,y)$ 是椭圆上的任一点，则问题化为在条件

$$5x^2+6xy+5y^2-8=0 \tag{6.8}$$

之下求 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值和最小值。而 d 的最大、小值点与 $d^2=x^2+y^2$ 的最大、小值点相同，为计算简便，我们将问题改为求 $d^2=x^2+y^2$ 在条件(6.8)下的最大、小值点。

令

$$\Phi=x^2+y^2+\lambda(5x^2+6xy+5y^2-8),$$

解方程组

$$\begin{cases}\Phi_x=2x+10\lambda x+6\lambda y=2(x+5\lambda x+3\lambda y)=0,\\ \Phi_y=2y+6\lambda x+10\lambda y=2(y+3\lambda x+5\lambda y)=0,\\ \Phi_\lambda=5x^2+6xy+5y^2-8=0,\end{cases}$$

前两个方程是 x，y 的线性齐次方程组，有非零解(因(0,0)不满足式(6.8))的充要条件是系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}1+5\lambda & 3\lambda\\ 3\lambda & 1+5\lambda\end{vmatrix}=16\lambda^2+10\lambda+1=0$$

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{8}$。对 $\lambda=-\frac{1}{2}$，$y=-x=\pm\sqrt{2}$，$d=2$；对 $\lambda=-\frac{1}{8}$，$y=x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$d=1$。因椭圆是闭曲线，它到原点的最大距离和最小距离均存在，故 $d=2$ 是最大距离，$d=1$ 是最小距离。

因所给椭圆方程对称于原点O，O是椭圆的中心，所以，求得的最大距离和最小距离即是椭圆的半长轴和半短轴，故其面积为2π.

例 5 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=6z \\ x^2+y^2+xy=9 \end{cases}$ 上的点到 xOy 平面的距离的最大值和最小值.

解 $x^2+y^2=6z$ 是旋转抛物面，$x^2+y^2+xy=9$ 是母线平行于 z 轴的椭圆柱面，它们的交线是一条闭曲线，因此，所求的最大距离和最小距离显然存在. 因 $z\geqslant 0$，问题归为求这条交线上的点的 z 坐标的最大、小值. 令

$$\Phi=z+\lambda(x^2+y^2-6z)+\mu(x^2+y^2+xy-9),$$

解方程组

$$\begin{cases} \Phi_x=2\lambda x+2\mu x+\mu y=0, \\ \Phi_y=2\lambda y+2\mu y+\mu x=0, \\ \Phi_z=1-6\lambda=0, \\ \Phi_\lambda=x^2+y^2-6z=0, \\ \Phi_\mu=x^2+y^2+xy-9=0, \end{cases}$$

因 $(x, y)\neq(0, 0)$，由前三个方程可知，$\mu\neq 0$，且 $y^2=x^2\neq 0$，再由后两个方程，可解出：$y=x=\pm\sqrt{3}$，$z=1$；$y=-x=\pm 3$，$z=3$. 故最大距离为 3，在点$(3, -3, 3)$和$(-3, 3, 3)$达到；最小距离为 1，在点 $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ 和 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$达到.

3. 最大值与最小值

若 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一定能取到最大值和最小值. 取到最大、小值的点(x, y)可能在 D 内，也可能在 D 的边界 Γ 上，因此，我们只要求出 $f(x, y)$ 在 D 内的全部极值可疑点及 $f(x, y)$ 在边界 Γ 上的全部极值可疑点，算出相应的函数值，这些值中的最大者就是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值，最小者就是最小值. 但是要注意，在多元函数情况，即使在区域 D 内只有一个极大(小)值，此值仍不一定是 D 上的最大(小)值，这与一元函

数情形不同。

例 6 求 $z=2x^3-2y^3-3x^2+6y$ 在闭区域

$$D:\ y\geqslant 0,\ x\geqslant -1,\ y\leqslant 3-x$$

上的最大值与最小值。

解 在例 1 中已求出函数的四个驻点，其中(0, 1)和(1, 1)两个驻点在 D 内。再考虑在 D 的边界上 z 的极值可疑点：除三个顶点 $A(-1, 0)$、$B(3, 0)$，$C(-1, 4)$ 外，还有：

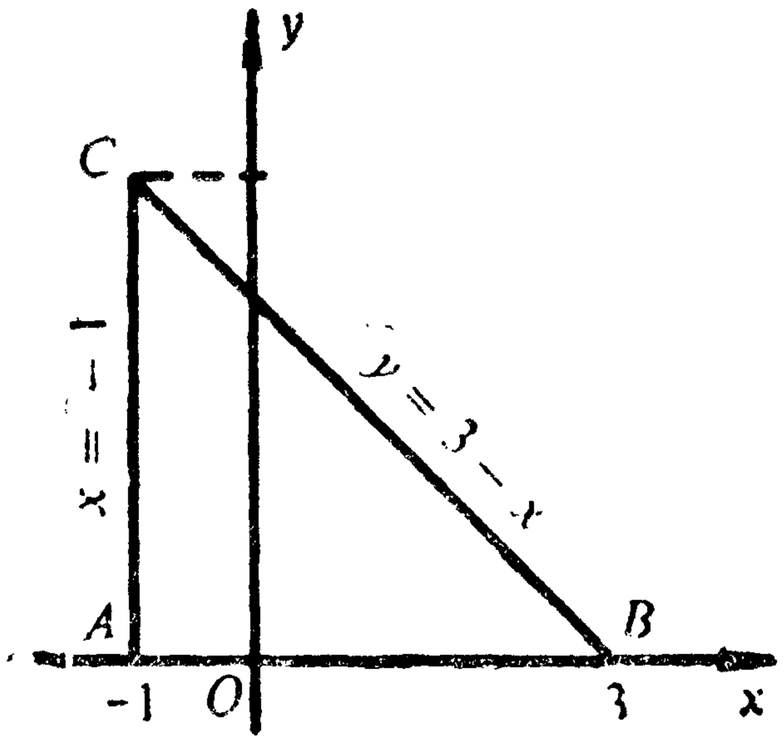


图 6.10

(1) 在 AB 上，$y=0$，$z=2x^3-3x^2$，$x\in[-1, 3]$，由 $z'_x=6x^2-6x=0\Rightarrow x=0、1$，得极值可疑点(0, 0)和(1, 0)。

(2) 在 BC 上，$y=3-x$，$z=2x^3-2(3-x)^3-3x^2+6(3-x)$，$x\in[-1, 3]$，$z'_x=6(2x^2-7x+8)>0$，无极值点。

(3) 在 AC 上，$x=-1$，$z=-2y^3+6y-5$，$y\in[0, 4]$，由 $z'_y=-6y^2+6=0\Rightarrow y=\pm 1$($-1\notin[0, 4]$舍去)，得极值可疑点$(-1, 1)$。

算出函数值：$z(0, 1)=4$，$z(1, 1)=3$，$z(-1, 0)=-5$，$z(3, 0)=27$，$z(-1, 4)=-109$，$z(0, 0)=0$，$z(1, 0)=-1$，$z(-1, 1)=-1$，比较它们的大小即得最大值为 $z(3, 0)=27$，最小值为 $z(-1, 4)=-109$。

这个例子还说明，在区域 D 内 z 只有一个极大值 $z(0, 1)=4$(见例 1)，但它并不是最大值。

4. 最小二乘法

在许多实际问题中，常常需要根据两个变量的几组实验数据来求出这两个变量间的函数关系的近似表达式，通常把这样得到

的近似表达式叫做**经验公式**．这里作为二元函数极值的例子来介绍一种常用的建立经验公式的方法——最小二乘法．实际上用得最多的函数是线性函数，下面就介绍求线性函数经验公式 $y=ax+b$ 的方法．这种方法也不难推广到求其它类型函数(如二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 等)的经验公式．

设由实验测得下列 n 组数据：

x	x_1	x_2	……	x_i	……	x_n
y	y_1	y_2	……	y_i	……	y_n

把各对数据作为 xOy 平面上点的直角坐标在坐标纸上画出来，如果这些点 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$，大体在一条直线附近(见图 6.11)，我们就可用一个线性函数

$$y=ax+b$$

来近似反映 x 与 y 间的关系．问题是怎样选择 a 和 b，使这种近似程度最好，也就是说，使得在 $x_1, \cdots, x_n$ 处的函数值 $ax_1+b, \cdots, ax_n+b$ 与实验数据 $y_1, \cdots, y_n$ 相差都很小．

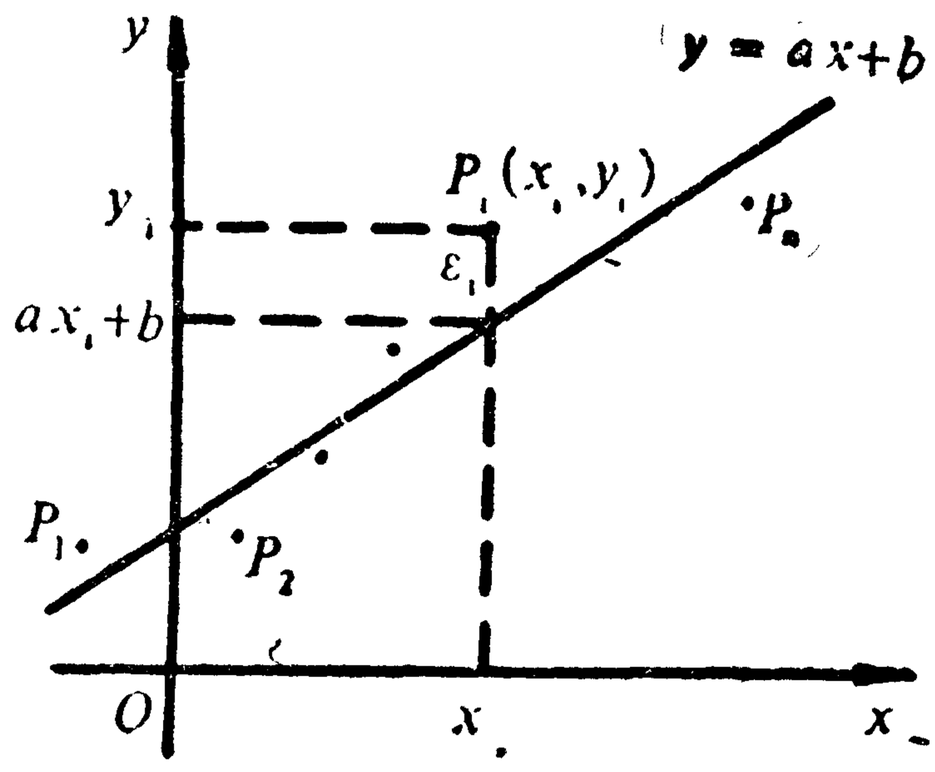


图 6.11

如果 $P_1(x_1, y_1)$ 在直线 $y=ax+b$ 上，应有 $y_1=ax_1+b$，$\varepsilon_1 \equiv y_1-ax_1-b=0$，这时函数 $y=ax+b$ 准确地反映了 x_1 与 y_1 的关系．如果 $P_1(x_1, y_1)$ 不在直线 $y=ax+b$ 上，则 $\varepsilon_1 \neq 0$，ε_1 表示用函数 $y=ax+b$ 来反映 x_1 与 y_1 的关系所产生的偏差．因此，我们用 $\varepsilon_i=y_i-ax_i-b(i=1, 2, \cdots, n)$ 来表示相应的偏差．怎样才使偏差都很小？使这些偏差的和 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ 最小行吗？不行，因为偏差 ε_i 有正有负，求和时可互相抵消，所以，即使 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ 最小，但可能各个偏

差并不小。为了避免这种情形，可用各个偏差绝对值的和 $\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|$ 最小来保证每个偏差的绝对值都很小，由于绝对值讨论不方便，所以用偏差的平方和

$$M(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2,$$

这种用偏差的平方和最小来确定 a，b 的方法叫做**最小二乘（方）法**。

为了求出 a，b 使偏差平方和 $M(a, b)$ 最小，用极值的必要条件。由方程组

$$\frac{\partial M}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0,$$

整理成 a，b 满足的线性方程组

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i,\end{cases}\tag{6.9}$$

可以解得 a 和 b。

例 4 有一种含铅的合金，它的熔解温度 θ℃ 与合金中含铅量的百分率 p 之间有线性关系

$$\theta=ap+b,$$

据实验测量得六组数据：

p（%）	36.9	49.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ（℃）	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法确定 a 和 b。

解 计算式(6.9)的系数

i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	36.9	49.7	63.7	77.8	84.0	87.5	399.6
θ_i	181	197	235	270	283	292	1458
$p_i\theta_i$	6678.9	9790.91	14969.5	21006	23772	25550	101767.8
p_i^2	1321.61	2470.09	4057.69	6052.84	7056	7656.25	28654.48

代入方程组(6.9)，得到

$$\begin{cases} 28654.48a + 399.6b = 101767.3, \\ 399.6a + 6b = 1458, \end{cases}$$

可解得 $a = \dfrac{27987}{12246.72} = 2.29$，$b = \dfrac{1112018.76}{12246.72} = 90.80$，因此，所求的线性函数为

$$\theta = 2.29p + 90.8.$$

在研究单分子化学反应速度时有经验公式：反应混合物中物质的量 y 与时间 t 满足指数关系

$$y = ke^{mt},$$

其中 k 和 m 是待定常数，现从实验测得一组数据 (t_i, y_i)，用来确定常数 k 和 m。我们可将指数关系两边取对数，得

$$\lg y = (m \lg e)t + \lg k. \tag{6.10}$$

因此，$\lg y$ 与 t 满足线性关系，即在半对数坐标纸 $(t, \lg y)$ 上，式(6.10)的图形是直线。用最小二乘法就可确定常数 k 和 m。

在地下水动力学中，水井抽水量 Q 与水位降深 s 之间有许多经验公式，如幂函数型公式

$$Q = n\sqrt[m]{s},$$

式中 n，m 待定，两边取对数，得到

$$\lg Q = \frac{1}{m} \lg s + \lg n,$$

在双对数坐标纸(lg Q, lg s)上，lg Q～lg s 的图形是一条直线，据抽水试验测得几组数据(Q, s)就可用最小二乘法确定系数 m，n。

§6.6 习　　题

1. 求下列函数的极值点：

(1) $f(x, y)=x^2+xy+y^2-6x+2$.

(2) $u=(2ax-x^2)(2by-y^2)$, $(ab\neq 0)$.

(3) $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

(4) 由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$.

2. 求证：$\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 的极大值为 $\sqrt{a^2+y^2+c^2}$.

3. 求下列条件极值：

(1) $z=x^2+y^2$，在条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 下 $(a, b>0)$.

(2) $u=xyz$，在条件 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$ 之下.

4. 要制作一个帐幕，上部是正圆锥形的蓬顶，下部是圆柱形（见图6.12），设帐蓬的容积为一定数 V，要使制作帐幕的用料最少，应当怎样选择尺寸.

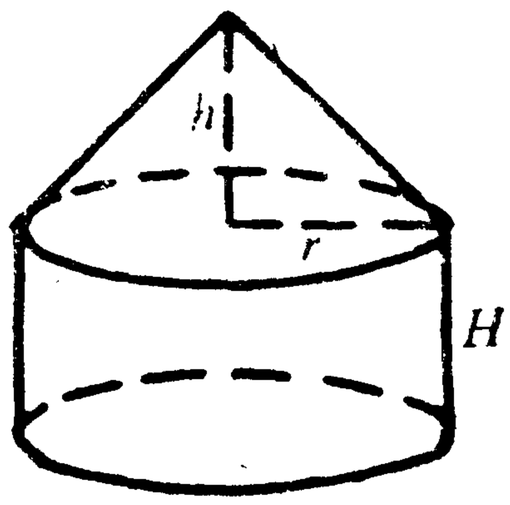


图　6.12

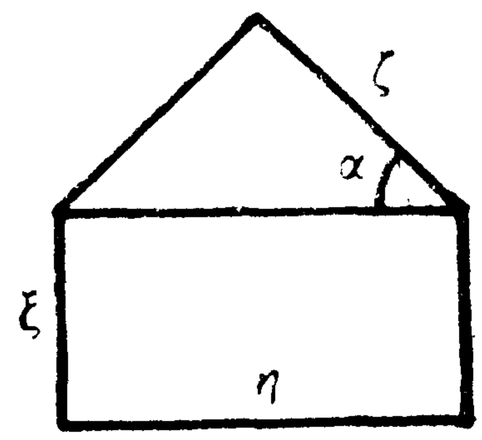


图　6.13

5. 求曲面

$$z=\frac{x^2}{2}-4xy+9y^2+3x-14y+\frac{1}{2}$$

的最低点. 它有没有最高点？

6. 设防空洞的横断面为一矩形与一等腰三角形拼成的五边形（见图6.13）. 若五边形的周长为定值 p，问其各边应如何规定才使通风的面积最大？（提示：取 α、ζ 为自变量）.

7. 在 xOy 平面上求一点，使它到三条直线：$x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和为最小.

8. (1) 求函数 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 在 $y=x+2$，$x=0$，$y=0$ 所围

成的平面闭区域上的最大值和最小值.

(2) 求 $z=x^2-xy+y^2$ 在 $|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

9. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为最小，并求出切点坐标及该四面体的体积.

10. 用极值方法求直线 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 与直线 $x=y-3=z$ 之间的最短距离.

11. 在椭球面 $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求出与平面 $3x+4y+12z=288$ 的距离最近的点和最远的点.

12. 已知金属棒的长度 L 随温度 t 的变化而变化，变化规律是 $L=L_0\cdot(1+\alpha t)$，其中 α 是膨胀系数，L_0 表示 0℃ 时金属棒的长度.现测得五组数据

t℃	20	30	40	50	60
$L(mm)$	1000.36	1000.53	1000.74	1000.91	1001.06

试用最小二乘法求 L_0 与 α 的值.

§6.7 曲面的参数方程

1. 曲面的参数方程

在第 4 章 § 4.5，曲面方程由 $F(x, y, z)=0$ 表示. 一般，曲面方程还可由两个参数 u, v 的函数方程组

$$\begin{cases} x=x(u, v), \\ y=y(u, u), (u, v)\in D\subset R^2 \\ z=z(u, v), \end{cases} \tag{7.1}$$

表示. 并称(7.1)为曲面的**参数方程**. 或写成向量形式

$$r=r(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}. \tag{7.2}$$

直角坐标系中的曲面方程 $z=f(x, y)$ 可写成参数方程

$$x=u, y=v, z=f(u, v).$$

当式(7.1)中 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 是 u, v 的线性式子时，方程(7.1)代表一张平面。例如，方程组

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v, \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v, \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v, \end{cases}$$

表示过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 并与两个不平行的固定向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 平行的平面，其向量方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.$$

又如，将地球表面看作半径为 a 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，从南极到北极的轴线取为 z 轴，若用经度 θ 和纬度 φ 作参数(图6.14)，则球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta, \\ y = a\cos\varphi\sin\theta, \\ z = a\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{matrix} \tag{7.3}$$

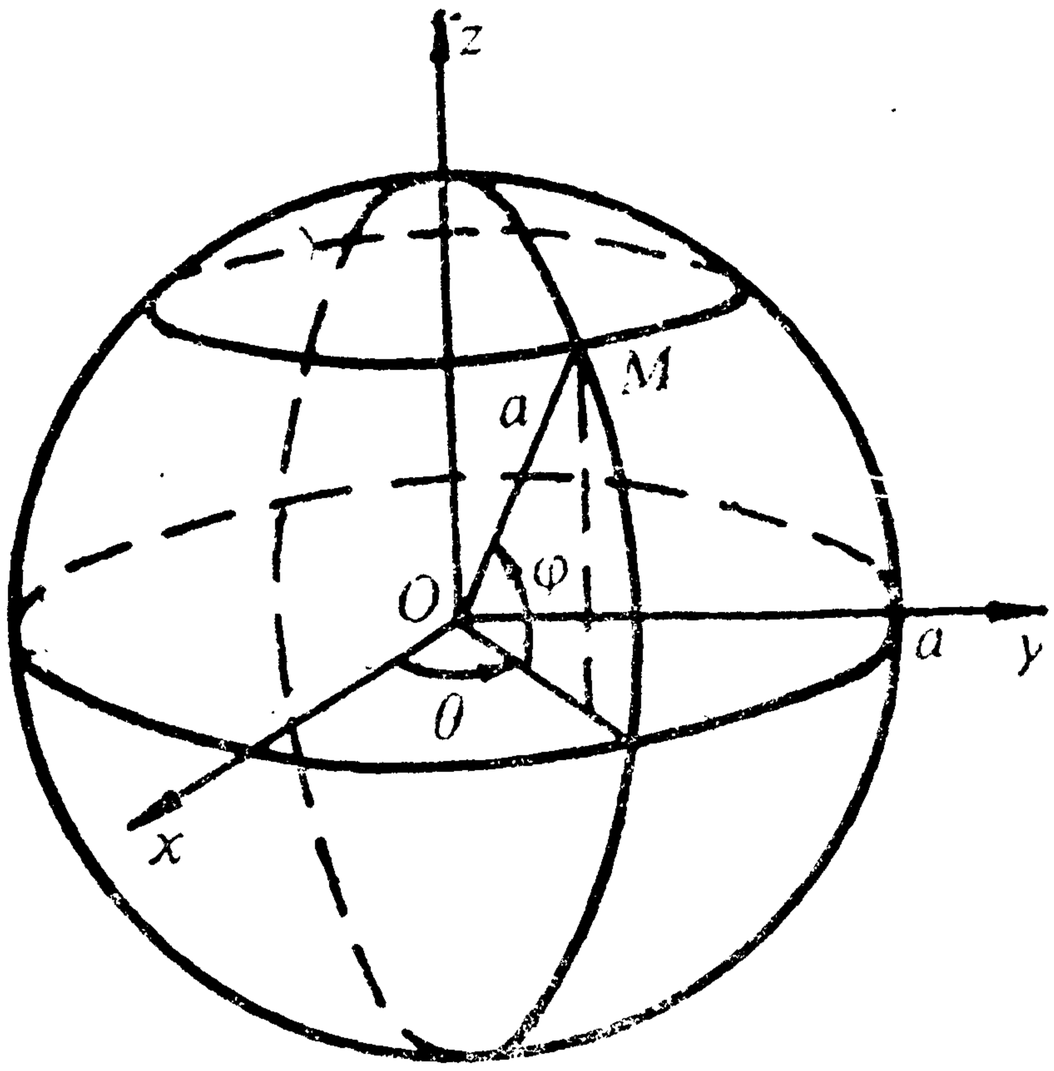


图 6.14

如果不对 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 给以适当的限制，则方程(7.1)也可能只代表曲线，例如，

$$x = u + v,\ y = (u + v)^2,\ z = (u + v)^3$$

就只代表一条曲线 $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$；而

$$x=\frac{ux_1+vx_2}{u+v},\quad y=\frac{uy_1+vy_2}{u+v},\quad z=\frac{uz_1+vz_2}{u+v}\quad (u+v\neq 0)$$

只代表过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线$\left(令\ t=\frac{v}{u+v}\right)$

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\ y=y_1+t(y_2-y_1),\ z=z_1+t(z_2-z_1).$$

为了找出函数 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 所满足的条件，使(7.1)确代表一曲面，注意固定 $v=v_0$，参数方程(7.1)中只含有一个参数 u，它表示一条空间曲线，显然它在曲面上．变动v_0值得到曲面上一簇曲线，称它为 **u 曲线**(它们以 u 为参数)．同样，固定 $u=u_0$，参数方程 (7.1) 中只含有一个参数 v，表示曲面上的一条曲线，变动 u_0 值得到曲面上一簇曲线，称为 **v 曲线**(它们以 v 为参数)．u 曲线和 v 曲线叫做曲面 (7.1) 的**坐标曲线**（如图 6.15 所示）．

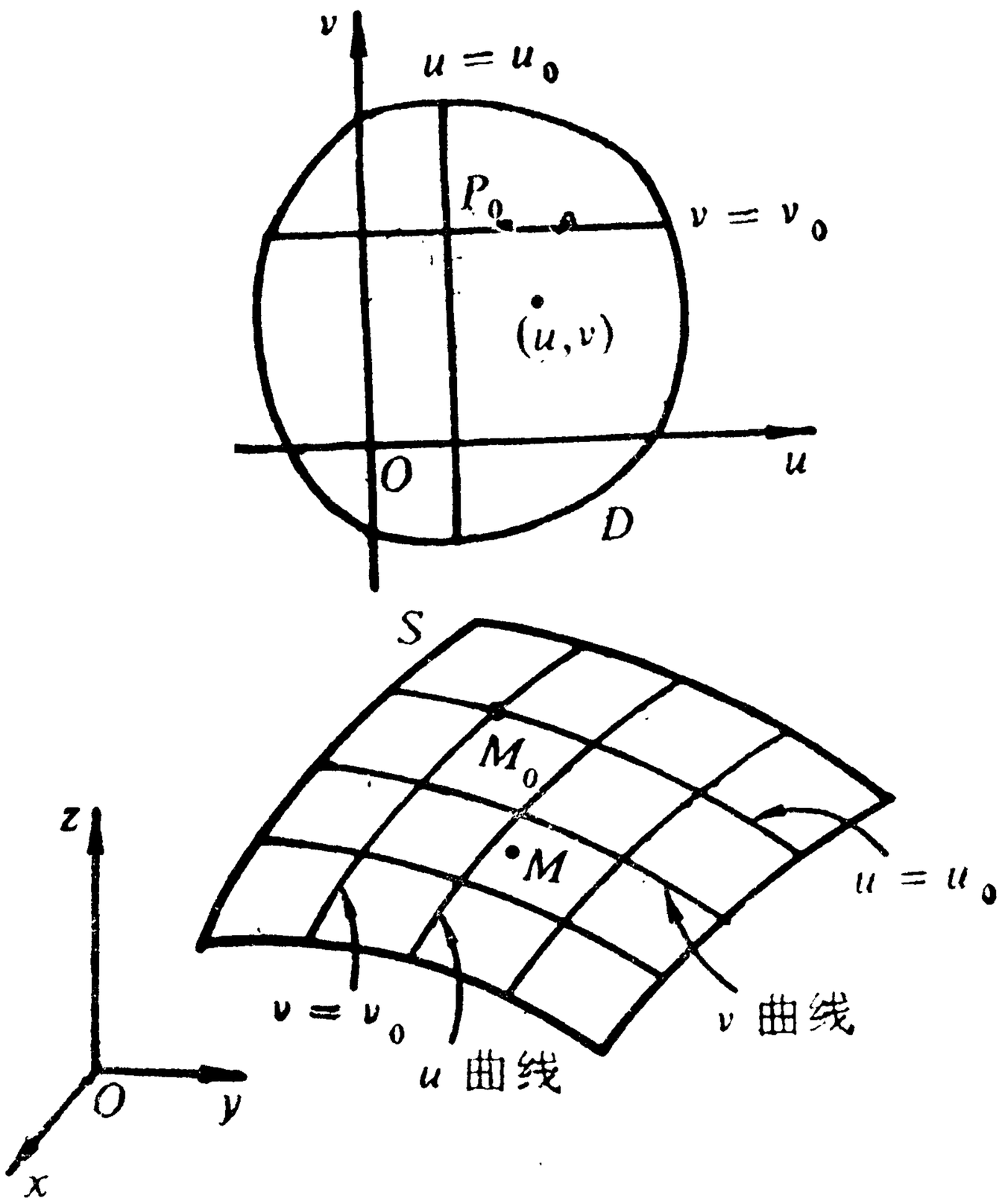


图 6.15

若 $P_0(u_0,v_0)$ 是 D 内一点，$x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$,

$z_0 = z(u_0, v_0)$，即点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲面 S 上。 假设 $x(u, v)$，$y(u, v)$，$z(u, v)$在区域 D 内有连续的一阶偏导数，且曲面上过点 M_0 的 u 曲线和 v 曲线存在非零切向量

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k},\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

为了使两簇坐标曲线在空间织成一片曲面，在它们的交点的切向量应该不平行，即 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \neq 0$，也就是函数行列式 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$，$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$，$\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$不同时为零，不妨假设 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$，据隐函数存在可微性定理，从方程组

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0, \\ y(u, v) - y = 0, \end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad u, v \in C^1$$

代入(7.3)第三个方程，便得函数

$$z = z(u(x, y), v(x, y)), \quad z \in C^1$$

因此，(7.1)确代表一曲面。

2. 切平面

曲面 S 上一条曲线 L 可以用参数方程

$$u = u(t), \ v = v(t), \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{7.5}$$

表示，特别地，它也可以用 $u = u(v)$ 或 $v = v(u)$ 表示，有时，也可用隐式方程 $F(u, v) = 0$ 来表示曲面上的曲线。

在曲面 S：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上取一点 $M_0(u_0, v_0)$，设(7.5)为曲面 S 上经过点 M_0 的任意一条曲线 L 的方程，而且 $u_0 = u(t_0)$，$v_0 = v(t_0)$，曲线 L 在点 M_0 的切向量是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{M_0}=\boldsymbol{r}_u(u_0,\ v_0)\ \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{M_0}+\boldsymbol{r}_v(u_0,\ v_0)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{M_0}.$$

(7.6)

在点 M_0，由于 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 不平行（图 6.16），在空间的直角坐标系下，$\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 与点 M_0 一起确定一个平面 π，式(7.6)表明，曲线 L 的切线位于平面 π 上，由于 L 是曲面 S 上经过点M_0的任意曲线，因此，曲面 S 上经过点M_0的一切曲线在点 M_0 的切线都在同一个平面 π 上，所以，这个平面 π 就是曲面S在点M_0的切平面，而$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$就是曲面 S 在点 M_0 的法向量，即

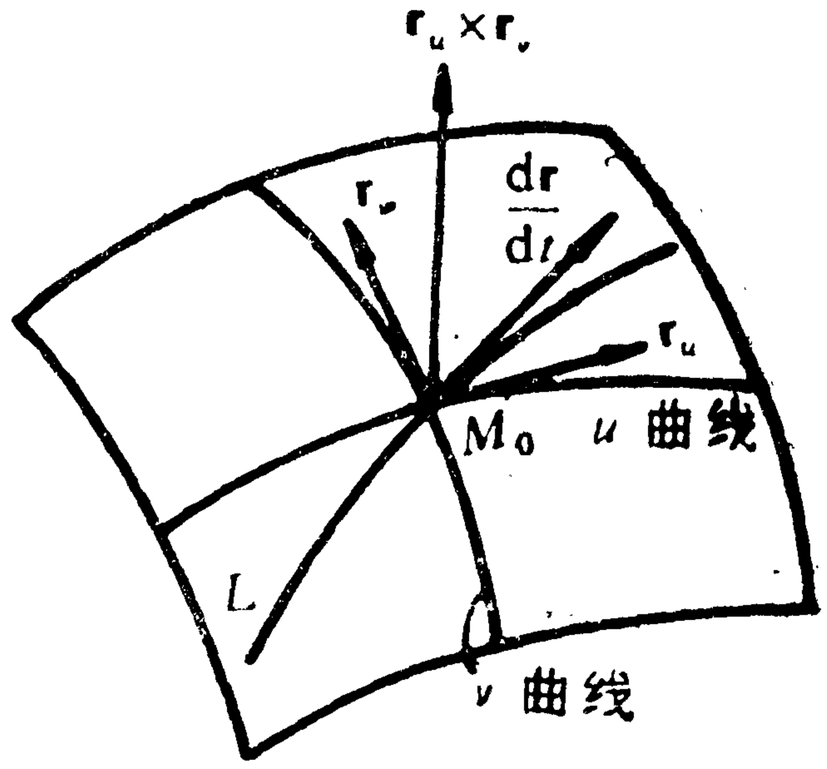


图 6.16

$$\boldsymbol{n}\Big|_{M_0}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\Big|_{M_0}=\left[\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{i}+\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{j}+\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{k}\right]_{(u_0,v_0)}=[J_1\boldsymbol{i}+J_2\boldsymbol{j}+J_3\boldsymbol{k}]_{(u_0,v_0)},$$

(7.7)

所以切平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}|_{M_0}=0,$$

即

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)|_{M_0}=0.$$

将切平面方程写成行列式形式，得

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,\ v_0) & y_u(u_0,\ v_0) & z_u(u_0,\ v_0) \\ x_v(u_0,\ v_0) & y_v(u_0,\ v_0) & z_v(u_0,\ v_0) \end{vmatrix}=0. \qquad (7.8)$$

若记

$$E(u,\ v)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\ F(u,\ v)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\ G(u,\ v)=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v, \qquad (7.9)$$

则利用向量运算中拉格朗日恒等式可得

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \cdot \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2, \tag{7.10}$$

于是有

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = EG - F^2, \tag{7.11}$$

曲面 S 在 M_0 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{J_1\boldsymbol{i} + J_2\boldsymbol{j} + J_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{7.12}$$

例 1 求单叶双曲面

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v,\ y = b \operatorname{ch} u \sin v,\ z = c \operatorname{sh} u$$

在 $(u, v) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$相应的点处的切平面方程.

解 $\boldsymbol{r}(u, v) = a \operatorname{ch} u \cos v\boldsymbol{i} + b \operatorname{ch} u \sin v\boldsymbol{j} + c \operatorname{sh} u\,\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{r}_u = a \operatorname{sh} u \cos v\boldsymbol{i} + b \operatorname{sh} u \sin v\boldsymbol{j} + c \operatorname{ch} u\,\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{r}_v = -a \operatorname{ch} u \sin v\,\boldsymbol{i} + b \operatorname{ch} u \cos v\,\boldsymbol{j}$,

$$\boldsymbol{r}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{r}_u\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = (0, 0, c),$$

$$\boldsymbol{r}_v\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

切平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - \frac{a}{\sqrt{2}} & y - \frac{b}{\sqrt{2}} & z \\ 0 & 0 & c \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即} \quad bx + ay = \sqrt{2}\,ab.$$

当曲面方程由显式 $z = f(x, y)$ 给出时，则 $x = u$，$y = v$，$z = f(u, v)$，从式(7.8)可得

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

这便是 §6.2 式(2.12).

3. 曲面的第一、第二基本形式

设$M(u, v)$及 $M'(u + \Delta u, v + \Delta v)$是曲面 S 上两个邻近点，它们的位置向量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 及 $\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$，利用向量函数的泰勒公式

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_u \Delta u + \boldsymbol{r}_v \Delta v + \cdots\cdots,$$

略去部分是 Δu, Δv 的一阶以上的无穷小，从上式可得到向量函数 $\boldsymbol{r}$ 的微分关系式是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \Delta u + \boldsymbol{r}_v \Delta v.$$

当点 M' 无限接近于点 M 时(即 $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ 时)，我们就把 $\overrightarrow{MM'}$ 在空间中的长度的主要部分 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 定义为曲面 s 上这两个无限邻近点之间的距离 ds，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v)\cdot(\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v) \\ &= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v^2,\end{aligned}$$

由式(7.9)，上式可改写成

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2, \tag{7.13}$$

这个二次微分形式称为曲面的**第一基本形式**，又称为曲面的**线素**. 通过它可以计算曲面上任意一条曲线 $L: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ 的弧长 s

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{7.14}$$

以及曲面的面积(参看第 9 章 § 9.4).

为了考虑曲面在点 M 处的弯曲程度，在曲面上点 $M(u, v)$ 附近另取一点 $M'(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v)$，我们来考虑

$$\delta = \boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{r}(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v) - \boldsymbol{r}(u, v)],$$

$\boldsymbol{n}$ 是曲面在点 M 的单位法向量($|\delta|$ 是 M' 到 M 的切平面的距离，见图6.17)，藉以考察切平面贴近曲面的程度及曲面在点 M 邻近处的形状.

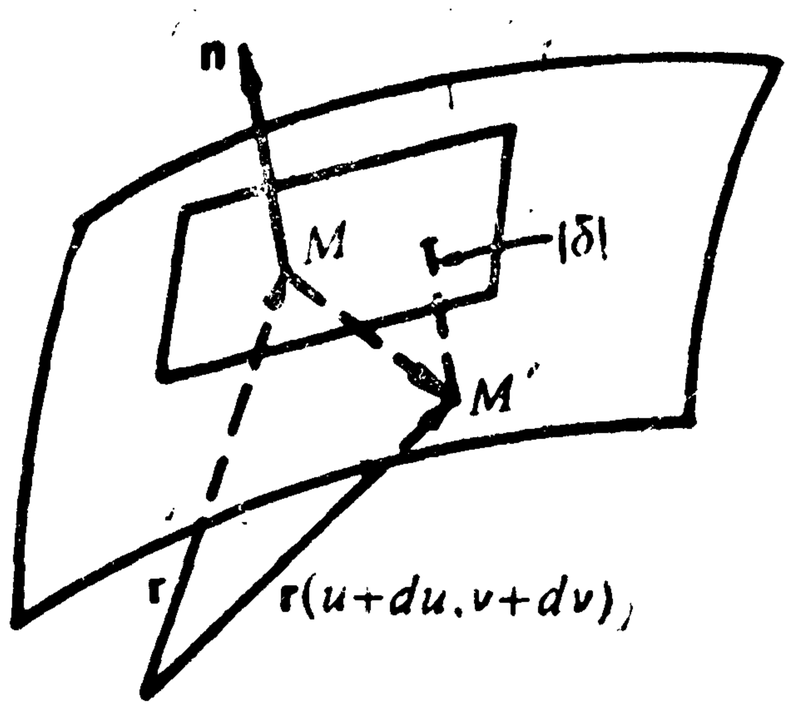


图 6.17

用泰勒公式展开，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v) - \boldsymbol{r}(u, v) \\ &= \boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u^2 \\ &\quad + 2\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_{vv}\mathrm{d}v^2) + o(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \sqrt{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}$. 注意 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u = 0 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v$，并引入符号

$$L = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

则得

$$\delta=\frac{1}{2}(L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2)+o(\varepsilon^2). \tag{7.15}$$

所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时，如果 L、M、N 不同时为 0，则 δ 是关于 ε 的二阶无穷小，其主部为

$$\frac{1}{2}(L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2),$$

而对过 M 的其它平面来说，因 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v$ 不同时为 0，δ 是 ε 的一阶无穷小，故可以说切平面是最贴近曲面的平面.

其次，如果 L，M，N 不同时为 0，则当 ε 充分小时，δ 的正负号由二次微分式

$$L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2$$

的符号确定，据二次三项式的性质，分三种情况讨论：

(1) 当 $LN-M^2>0$ 时，$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$ 与 L 同号，在点 M 附近曲面全部在切平面的一侧，这时我们称点 M 为**椭圆点**.

(2) 当 $LN-M^2<0$ 时，$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$ 可正可负，符号与 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 有关，在点 M 附近曲面在切平面两侧都有，称点 M 为**双曲点**.

(3) 当 $LN-M^2=0$ 时，称点 M 为**抛物点**.

通常把

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2 \tag{7.16}$$

称为曲面的**第二基本形式**.

可以证明：在适当条件下，两个基本形式

$$E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,\quad L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$$

能完全决定曲面的形状，详细内容可参阅苏步青等编《微分几何》第二章.

特别，当曲面由方程 $z=f(x,y)$ 给出时，视 x，y 为参数，

$$\boldsymbol{r}=(x,y,f(x,y)),\ \boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\ \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y),$$
$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),\boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),\ \boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,f_{yy}),$$
$$(\boldsymbol{r}_{xx},\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y)=f_{xx},(\boldsymbol{r}_{xy},\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y)=f_{xy},(\boldsymbol{r}_{yy},\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y)=f_{yy},$$

故

$$E=1+f_x^2,\ F=f_xf_y,\ G=1+f_y^2,\ \sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$L=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad M=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad N=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

所以，第一基本形式是

$$(1+f_x^2)\mathrm{d}x^2+2f_xf_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1+f_y^2)\mathrm{d}y^2,$$

第二基本形式是

$$\frac{f_{xx}\mathrm{d}x^2+2f_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f_{yy}\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$LN-M^2=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2}.$$

读者容易验证：椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 上的点全是椭圆点；双面抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 上的点全是双曲点；柱面 $z=x^2$ 上的点全是抛物点。

§6.7 习　　题

1. 求曲面

$$x=\mathrm{e}^u\cos v,\ y=\mathrm{e}^u\sin v,\ z=\mathrm{e}^u$$

在 $(u,v)=\left(-1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程。

2. 设空间曲面 S 的方程为

$$x=1-\cos u,\ y=\sin u\,\mathrm{ch}\,v,\ z=(1-\cos u)\mathrm{sh}\,v,$$

证明 S 的法线支撑在平面 xOy 的某固定曲线上。

3. 设空间曲面 S 的参数方程为

$$x=(1+u)\cos v,\ y=(1-u)\sin v,\ z=u,$$

确定 S 上使切平面与 Oz 轴平行的那些点的全体。

4. 证明曲线 Γ：

$$x=\mathrm{e}^t\cos t,\ y=\mathrm{e}^t\sin t,\ z=2t$$

位于曲面 S：$\mathrm{e}^z=x^2+y^2$ 上，并证明 Γ 在点 $M(t)$ 的密切平面与 S 在这点的切平面重合。

5. 设曲面的参数方程为 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，记

$$J_1=\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix},\quad J_2=\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix},\quad J_3=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix},$$

求证：

(1) 若 $J_3\neq 0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{J_1}{J_3}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{J_2}{J_3}$；

(2) $\sqrt{J+z_x^2+z_y^2}=\frac{1}{|J_3|}\sqrt{EG-F^2}$。

6. 设曲面

$$x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = v + g(u)$$

其中 g 可导，

（1）求使 $g'(u_0)\neq 0$ 的点 $M(u_0, v_0)$ 处的切平面方程；

（2）证明：如果 v_0 变动，则此切平面通过一条固定的直线.

习 题 答 案

第 1 章

§1.1 习题

1. (1) 1, −1, 不存在, 不存在, (2) 1, 0, 不存在, 不存在, (3) 1, 0, 不存在, 不存在, (4) 1, 0, 1, 0, (5) $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 不存在, (6) 1, −1, 1, −1.

7. (1) x^2-2, (2) $\frac{1}{x}(1+\sqrt{1+x^2})$. **8.** 4^x, 2^{x^2}. **9.** $f(x)$, 0.

10. (1) $[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$, $k=0, 1, 2\cdots$,

(2) $(1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$, $k=\pm1, \pm2, \cdots$,

(3) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, (4) $(1, 2]$.

13. (1) $a=0$ 时反函数不存在; $a\neq0$, $y=\frac{x-b}{a}$, $D=(-\infty, +\infty)$,

(2) 不存在单值反函数,

(3) $y=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x}+1, & \text{当 } x\leqslant0,\\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{当 } x>0,\end{cases}$ $D=(-\infty, +\infty)$,

(4) $y=\frac{1-x}{1+x}$, $x\neq-1$.

§1.3 习题

1. (1) 无穷大量, (2) 两者都不是, (3) 两者都不是, (4) $|q|<1$ 时无穷小量, $|q|>1$ 时无穷大量, $|q|=1$ 时两者都不是, (5) 无穷小量, (6) $x\to+\infty$ 时两者都不是, $x\to-\infty$ 时无穷小量, (7) 无穷大量.

2. (1) $f(0+)=1$, $f(0-)=-1$, (2) $f(0+)=+\infty$, $f(0-)=0$, (3) $f(-1\pm0)=-\infty$, (4) $f(0+)=0$, $f(0-)=-1$, $f(1\pm0)=1$.

3. (1) 0, (2) 0, (3) 不存在, (4)(5) 均不存在.

4. (1) 1, (2) $\frac{1}{2}$, (3) $\frac{1}{1-r}$, (4) $\frac{4}{3}$, (5) 2, (6) $\frac{1}{4}$.

5. (1) 0, (2) 0, (3) 0, (4) 1, (5) 0, (6) 0.

6. (1) $\frac{5}{6}$, (2) $\frac{1}{2}$, (3) $a>1$ 时为 1, $0<a<1$ 时为 −1, (4) $\frac{1}{3}$,

(5) $k<m$时为0，$k=m$时为a_0/b_0，(6) $-1/2$，(7) 6，(8) $n(n+1)/2$，(9) 9/4，(10) $1/n$，(11) m/n，(12) 1/2。

§1.4 习题

9. (1) 2，(2) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4C})$，(3) $\sqrt{k}$。

10. (1) a/b，(2) 1，(3) $-\sin a$，(4) 1/2，(5) 2，(6) 1，(7) 4/3。

§1.5 习题

2. (1) $\pi a/2=1+b$，(2) $a=0$，(3) $A=6$。

3. (1) $x=4/3$，Ⅰ类，(2) $x=0$，Ⅱ类，无穷型间断点，(3) $x=0$，可去，$x=k\pi$，$k=\pm1$，±2，…，无穷型间断点，(4) $x=0$，可去，(5) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0$，±1，±2，…，Ⅰ类，(6) $x=-1$，Ⅱ类，无穷型间断点；$x=1$，Ⅰ类，(7) $x=\frac{\pi}{4}$，Ⅰ类，(8) $x=0$，$x=2/(2k+1)$，$k=0$，±1，±2，…，Ⅱ类，无穷型间断点。

4. $f(g(x))$连续；$g(f(x))$在$x=0$处为可去间断点，其它点连续。

5. (1) e^{2n}，(2) 1，(3) e^2，(4) e^{mk}，(5) e^{-2}，(6) e，(7) e^a，(8) 0，(9) $\pi/6$，(10) $\ln\frac{a}{b}$。

§1.6 习题

2. (1) $1/a$，(2) 0，(3) $-\infty$，(4) 32/27，(5) $\sqrt{ab}$，(6) 1，(7) 1。

4. (1) $\sqrt{2}$，(2) 15，(3) 1，(4) $\frac{2}{5}$，(5) 1。

第 2 章

§2.1 习题

1. 242，**2.** $4\pi r^2 v$，$8\pi r v$，**3.** $f'(0)$。

6. $2af(a)$，**7.** 100!，**8.** (2, 4)；$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$；(−1, 1)；$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{16}\right)$。

9. (1) $x-4y+4=0$，$4x+y-18=0$，(2) $x-y-1=0$，$x+y-1=0$。

10. $\pi/2$，$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$，**11.** (1) 1，0，(2) 0，0。

13. (1) 否，否，(2) 是，否，(3) 是，否。

14. $a=2$，$b=0$。**17.** 2厘米。**18.** 2.92。

§2.2 习题

1. (1) $\ln 2$，$2\ln 2+2$。**2.** $x-y-e=0$，$x+y-e=0$。

3. (1) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, (2) $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, (3) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$,

(4) $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$, (5) $-3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]\sin(2\operatorname{tg}^3 x)$,

(6) $\dfrac{6}{x}\ln^2 x^2$, (7) $\sqrt{x^2+a}$, (8) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, (9) $\dfrac{1}{\sin x}$,

(10) $\dfrac{1}{a+b\cos x}$, (11) $\sqrt[x]{x}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$,

(12) $(1+x^2)^{5x-1}\cdot 5[(1+x^2)\ln(1+x^2)+2x^2]$,

(13) $(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\sin x\operatorname{tg} x)$,

(14) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$.

5. (1) $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$ $(x\neq\pm a)$, (2) $-10^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{x\ln 10}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

(3) $\dfrac{1}{(1+\ln^2 s)s}ds$, (4) $\sin[2\ln(3x+1)]\cdot\dfrac{3}{3x+1}dx$,

(5) $\dfrac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right)$.

6. (1) $-\operatorname{tg}^2 x\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right)$, (2) $\dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x-\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

7. (1) $2-\dfrac{5}{4}x$, (2) $2x$.

8. (1) 1.4, (2) 0.4849, (3) 16.333, (4) 0.496875.

§2.3 习题

1. (1) $-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, (2) $x^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+2)^2-\ln x}{4x\sqrt{x}}$, (3) $\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

2. (1) $a^x\ln^n a$, (2) $\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$,

(3) $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2^{2n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

(4) $2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$.

4. (1) $\dfrac{8!}{(1-x)^9}$, (2) $\dfrac{-6}{x^4}$, (3) $2^9(-2x^2\sin 2x+20x\cos 2x+45\sin 2x)$.

5. (1) $\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}(dx)^3$, (2) $\dfrac{v(vd^2u-ud^2v)-2(vdu-udv)dv}{v^3}$.

§2.4 习题

6. (1) $a=\dfrac{1}{x_0}$, $b=\ln x_0-1$, (2) $a=\dfrac{3}{2c}$, $b=-\dfrac{1}{2c^3}$.

§2.5 习题

1. (1) $\frac{1}{2}$, (2) -1, (3) $\frac{1}{3}$, (4) 0, (5) $\frac{1}{2}$, (6) $\frac{1}{2}$, (7) e^2, (8) $-\frac{1}{2}$, (9) 1, (10) $e^{-\frac{2}{\pi}}$, (11) 1, (12) -2, (13) $\frac{a-b}{3ab}$, (14) 1, (15) $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$, (16) $a_1 \cdots a_2$.

2. $a=-1$, $b=2$.

§2.6 习题

1. (1) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$,

(2) $1-\frac{x}{2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$,

(3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln^k a}{k!}x^k+o(x^n)$, (4) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n})$.

2. (1) $a+\frac{x}{ma^{m-1}}+\frac{1-m}{2m^2a^{2m-1}}x^2+o(x^2)$, (2) $\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$,

(3) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$,

(4) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{24}x^5+o(x^5)$,

(5) $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^k}(x-2)^k+o((x-2)^n)$,

(6) $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

3. (1) $\frac{1}{12}$, (2) $-\frac{1}{12}$, (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\frac{2}{3}$, (5) $\ln a$.

§2.7 习题

1. (1) 极小值 $y(-1)=-2$, 极大值 $y(1)=2$, (2) 极大值 $y(100)=\frac{1}{20}$, (3) n 为奇数时, 极大值 $y(n)=n^ne^{-n}$; n 为偶数时, 极大值 $y(n)=n^ne^{-n}$, 极小值 $y(0)=0$, (4) 极小值 $y(1)=2$, 极大值 $y(-1)=-2$, (5) 严格递增, (6) 极小值 $y(1)=0$, 极大值 $y(e^2)=4/e^2$.

3. (1) 1, $\sqrt{2}$, (2) 0, 2.

4. (1) $(-\infty, 1)$凸, $(1, +\infty)$凹, 拐点$(1, -2)$,

(2) $(2k\pi, (2k+1)\pi)$凸, $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$凹, 拐点$(k\pi, k\pi)$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

5. 1 米, 0.25 米^3. **6.** $BD=15$ 千米. **7.** $a>\frac{1}{e}$时无实根; $a=\frac{1}{e}$时只有一个实根 $x=e$; $0<a<\frac{1}{e}$时有二个实根.

§2.8 习题

1. (1) $y=-1$, $y=-2x-1$, (2) $x=0$, $y=x+3$, (3) $y=0$, $y=x$,
(4) $x=0$, $y=x+1$, $y=-x-1$.

§2.9 习题

1. (1) $\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$, (2) $\dfrac{1+t^2}{4t}$, (3) $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$,
(4) $\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

2. $4x+2y-3=0$, $2x-4y+1=0$.

§2.10 习题

1. 1.075, **2.** -0.567, **3.** 4.493.

第 3 章

§3.1 习题

1. (1) $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, (2) $\int_a^b g(y)\mathrm{d}y$.

2. (1) $\int_0^1 \sin \pi x\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$, (3) $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

§3.3 习题

1. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$, (2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos \pi x+\cos \pi x^2$,
(3) $6xf(x^2)+4x^3f'(x^2)$, (4) $f(g_2(x))g_2'(x)-f(g_1(x))g_1'(x)$.

2. (1) 最小值 $y(0)=0$, 最大值 $y(1)=5\pi/3\sqrt{3}$,
(2) 极小极 $y(1)=-17/12$.

3. (1) 1/2, (2) 1/6, (3) $\pi^2/4$, (4) 1/6. **5.** 3.

7. (1) $-\dfrac{10}{3}$, (2) $-\dfrac{27}{t}-27\ln|t|+9t-\dfrac{t^2}{2}$, (3) $\dfrac{x^3}{3}-x+\operatorname{arc tg} x$,
(4) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$, (5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x$, (6) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{2}$, (7) 4,
(8) $4\sqrt{2}$.

§3.4 习题

1. (1) $-\dfrac{2}{15(5x-2)^{3/2}}$, (2) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$, (3) $\dfrac{-1}{3(x^3+1)}$,
(4) $\dfrac{1}{4}\sqrt{4x^2+1}$, (5) $-e^{\frac{1}{x}}$, (6) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc tg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$,

(7) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x$, (8) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|$,

(9) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$, (10) $-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}$,

(11) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$, (12) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}x\right)$,

(13) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$, (14) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$,

(15) $\frac{1}{2}\ln(2+\sin^2 x)$, (16) $-\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}|$,

(17) $\ln|\ln x|$, (18) $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}$, (19) $\sqrt{1+2e^x}$,

(20) $2\ln(1+x^{\frac{x}{2}})-2e^{-\frac{x}{2}}-x$,

(21) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3x^2+3x-1}|$,

(22) $-\sqrt{2-2x-x^2}-2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}}$, (23) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

(24) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, (25) $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|$,

(26) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, (27) $-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{x^5}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^{10}+x^5+1}}{x^5}\right|$,

(28) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$, (29) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2$,

(30) $-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}(8+4x^2+3x^4)$.

2. (1) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, (2) $a^5\left(\frac{7}{16}\pi-\frac{17}{15}\right)$, (3) $2a\arcsin\frac{1}{a}$,

(4) $\sqrt{15}-\sqrt{3}-\arccos\frac{1}{4}+\arccos\frac{1}{2}$, (5) $3(2\ln 2-\ln 3)$, (6) $\frac{\pi}{4}$,

(7) $\sin\frac{\pi^2}{4}-\ln\left(1+\sin\frac{\pi^2}{4}\right)$, (8) $\frac{4}{3}$.

4. (1) $m\neq n$, 0; $m=n$, π, (2) 0, (3) 0, (4) $\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)$.

§3.5 习题

1. (1) $x(\ln 2x-1)$, (2) $x\operatorname{arctg}3x-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)$,

(3) $(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x$, (4) $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$

(5) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x^2+2)$, (6) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,

(7) $\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x}{2}$, (8) $-\cos x\ln(\operatorname{tg}x)+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$,

(9) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$,

(10) $\frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{arc\,tg}x)^2-x\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$,

(11) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)$, (12) $e^{\sin x}(\sin x-1)$.

2. (1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2})$,

(2) $\frac{1}{4}(2x-5)\sqrt{x^2-5x+7}+\frac{3}{8}\ln|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+7}|$,

(3) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$,

(4) $\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(5-2x^2)$,

(5) $\sqrt{x^2-6x+13}+3\ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+13})$,

(6) $\frac{1}{3}(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x+x^2}-\frac{3}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2})$,

(7) $\begin{cases}e^x, & x<0\\ -e^{-x}+2, & x\geqslant 0\end{cases}$, (8) $\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x, & |x|>1.\end{cases}$

3. (1) $4\ln 2-\frac{15}{16}$, (2) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$, (3) $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$,

(4) $\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$, (5) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$,

(6) $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2)$, (7) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$,

(8) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi^2}{2}$. **4.** 2.

§3.6 习题

1. (1) $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x+\frac{23}{2}\ln(x^2+2x+5)-21\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}$,

(2) $\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{2}{x+2}$, (3) $\frac{x^2}{2}-x+\frac{17}{3}\ln|x+2|-\frac{2}{3}\ln|x-1|$,

(4) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,

(5) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}$,

(6) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$,

(7) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x+1}{2(x^2+1)}$,

(8) $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)$,

(9) $x^2+x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+3}-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$,

(10) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+\frac{1}{3(1+x^3)}$.

2. (1) $\ln|\sin x+\cos x|$, (2) $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)-x$,

(3) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x$, (4) $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|$,

(5) $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x+x$, (6) $\frac{3}{13}\ln|2\cos x+3\sin x|+\frac{2}{13}x$,

(7) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)$, (8) $\frac{1}{2}x-\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$,

(9) $\frac{1}{6}\ln\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}$,

(10) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+\frac{2}{2\sin x+\cos x}\quad\left(\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}\right)$.

§3.7 习题

1. (1) $\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-2\operatorname{arc\,tg}t$, $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, (2) $\frac{5(5x-4)}{36x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}$,

(3) $x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|$,

(4) $\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}(4\sqrt[4]{x}-3)$,

(5) $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t$, $t=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$,

(6) $2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}$, $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$,

(7) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(t+1)^3(t^3-1)}{(t-1)^3(t^3+1)}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\,t}{1-t^2}$, $t=\sqrt[3]{\sin x}$,

(8) $\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$.

2. (1) $\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^{-x})$, (2) $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})$,

(3) $-\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$, (4) $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$,

(5) $\frac{1}{2}e^x[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$,

(6) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$,

(7) $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2\sqrt{x}+2)$,

(8) $-\frac{2}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg} x$,

(9) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}$,

(10) $\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{4}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$,

(11) $\frac{x}{24(8+x^3)}+\frac{1}{144}\left[\ln|2+x|-\frac{1}{2}\ln(4-2x+x^2)+2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-2}{\sqrt{3}}\right]$.

§3.8 习题

1. 0.6938, 0.6932. **2.** 0.9157, 0.9160.

§3.9 习题

1. (1) $2\pi+\frac{4}{3}$, (2) πa^2, (3) $\frac{3}{8}\pi a^2$, (4) $3\pi a^2$, (5) $\frac{1}{4}\pi a^2$, (6) a^2,

(7) $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, (8) $2\sqrt{2}$.

2. (1) $\pi^2/2$, $2\pi^2$, (2) $5\pi/6$, $13\pi/6$, (3) $5\pi^2a^3$, (4) $8\pi/3$, (5) $2\pi^2a^2b$.

3. $\pi R^2h/2$. **4.** $16a^3/3$. **5.** (1) 4, (2) $4\sqrt{3}\,a/3$, (3) $6a$, (4) $8a$,

(5) $2\pi^2a$, (6) $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta}-1)$, (7) $2E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

6. (1) $4\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$, (2) $13\pi/3$, (3) $12\pi a^2/5$,

(4) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$, $2\sqrt{2}\pi a^2$.

7. (1) $\frac{1}{ab}\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)^{3/2}$, (2) $4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2\sqrt{2ay}$.

8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

§3.10 习题

1. 75千克. **2.** (1) $\left(\frac{R\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$, $\left(\frac{2R}{\pi}, 0\right)$, (2) $\left(0, \frac{3\pi a}{4}\right)$, (3) $\left(\frac{4}{5}a, 0\right)$. **3.** (1) $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, (2) $\left(\frac{3}{5}h, 0\right)$, (3) $\left(\frac{128\sqrt{2}a}{105\pi}, 0\right)$. **4.** $\frac{1}{2}f_0 l_0$. **5.** $64\pi\times10^7$ 牛顿·米. **6.** (1) 660 吨, (2) 11 米. **7.** $\frac{4kMm}{4r^2-l^2}$.

第 4 章

§4.1 习题

4. $(0, 4, -3)$. **5.** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}, \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}\right)$.

6. $\sqrt{21}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$.

7. 2, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $120°, 135°, 60°$.

8. $(-2, 1, -1)$. **9.** $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, 3. **10.** $(0, 1, -2)$.

12. $\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i, \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}y_i, \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}z_i\right)$.

§4.2 习题

1. $\angle A = 76°22'$, $\angle B = 79°2'$, $\angle C = 24°36'$. **6.** $\pm\frac{1}{3}(1, -2, 2)$.

7. (1) $(0, -8, -24)$, (2) $(-8, -5, 1)$, (3) $2(8, 5, -1)$, (4) 2, (5) $(2, 1, 21)$, (6) $(0, 8, 24)$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. **14.** $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{3}$.

15. $\lambda=\frac{11}{3}$, $\mu=-2$, $\nu=\frac{1}{3}$. **16.** 9.

§4.3 习题

1. $4x-3y+z-3=0$. **3.** $x+2y=0$. **4.** $2y-z+3=0$.

5. $3x-8y-18z=0$, **6.** $2x+5y+3z=0$. **7.** (1) 2, (2) $\sqrt{2}$.

9. $(0, 4, 0)$, $\left(0, \frac{8}{3}, 0\right)$. **10.** $11x+5y-6z-4=0$, $67x+47y+162z$

$-74=0$. **11.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}-z=1$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}-z=1$. **12.** $(2,-1,1)$.

§4.4 习题

1. (1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-3}$, (2) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{5}$.

2. (1) $\frac{x}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{0}$, (2) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z}{-2}$.

3. $d=\frac{8}{5}\sqrt{2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{4}$, $\left(\frac{49}{29},\frac{2}{5},\frac{7}{25}\right)$. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{30}$.

5. $d=2\sqrt{6}$, $(1,6,0)$. **5.** $\arcsin\frac{3}{133}\approx 1.29°$.

7. (1) 平行, (2) $\theta=\pi/3$, (3) 垂直.

8. (1) $(0,5,10)$, $x-2y+z=0$, (2) $(1,2,-1)$, $x+3y+z-6=0$.

9. (1) $d=2\sqrt{29}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{4}$,

(2) $d=\sqrt{14}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

10. (1) $x-2y-1=0$, (2) $7x-2y-2z+1=0$.

11. $\begin{cases}3y-z-5=0\\x=0\end{cases}$, $\begin{cases}3x-2z-4=0\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-2y+2=0\\z=0\end{cases}$.

12. $\begin{cases}x+y+z=0\\y-z-1=0\end{cases}$. **13.** (1) $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{3}$,

(2) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}$, (3) $\begin{cases}7x-5y+2z-32=0\\15x-17y-46z-12=0\end{cases}$

§4.5 习题

1. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=14$.

2. (1) $(2,1,-3)$, $\sqrt{14}$, (2) $(-2,0,0)$, 3.

3. $3(x^2+y^2+z^2)+4x+6y+8z-29=0$, 球面.

4. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x-y-1=0,\end{cases}$ 圆. **5.** $(3y-2z)^2+(z-3x)^2+(2x-y)^2=56$.

6. $2x^2+3z^2=9$, $3y^2-x^2=9$.

7. (1) $\begin{cases}y^2+2z^2+2yz-2z=0,\\x=0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+z^2-2x-2z+1=0\\y=0\end{cases}$

$\begin{cases}2x^2+y^2+2xy-2x=0\\z=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases} y=2\sqrt{3}z \\ x=0 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{3}{4}z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0. \end{cases}$

8. (1) $\left(\frac{10}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$, 3; (2) $(0, 0, \pm 2)$, $\sqrt{5}$.

9. $(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+z^2)$.

10. (1) $x^2-y^2-z^2-2xy-2xz-4yz=0$,

(2) $2z^2(2x^2+y^2+2z^2)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2$.

11. 旋转抛物面.

§4.6 习题

4. (1) $\frac{a}{\sqrt{2}}(e-e^{-1})$,

(2) $\sqrt{2}(\sqrt{e^2+2}-\sqrt{3})+2\ln[(\sqrt{e^2+2}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]-2$
≈ 3.178.

5. (1) $\frac{x-a}{a}=\frac{y-b}{2b}=\frac{z-c}{3c}$, $ax+2by+3cz-a^2-2b^2-3c^2=0$.

(2) $\frac{x-a\,\mathrm{ch}\,1}{a\,\mathrm{sh}\,1}=\frac{y-a\,\mathrm{sh}\,1}{a\,\mathrm{ch}\,1}=\frac{z-b}{b}$, $a\,\mathrm{sh}1\,x+a\,\mathrm{ch}1\,y+bz-a\,\mathrm{sh}\,2-b^2$
$=0$,

6. (1) $\mathrm{sh}\,tX-\mathrm{ch}\,tY+Z-at=0$, $k=\frac{1}{a(\mathrm{sh}^2 t+\mathrm{ch}^2 t+1)}$, $\tau=\frac{a}{\sqrt{2}\,|\mathrm{ch}\,t|}$.

(2) $4\cos tX-4\sin tY-\cos 2t=0$, $k=\frac{3}{25\sin t\cos t}$, $\tau=\frac{4}{25\sin t\cos t}$.

第 5 章

§5.1 习题

1. (1) 不是, (2) 不是, (3) 是, (4) 不是.

3. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=-1$.

4. (1) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{pmatrix}$.

§5.2 习题

1. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ -4 & 9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 2a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$.

3. (1) **0**, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -243 & 405 & -270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -243 & 405 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -243 \end{pmatrix}$.

§5.3 习题

1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 5 & 6k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1+4k & 2+5k & 3+6k \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (1) 可逆, $\begin{pmatrix} -\frac{24}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{11}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$, (2) 可逆, $\begin{pmatrix} -11 & -25 & 41 \\ -2 & -5 & 8 \\ 7 & 16 & -26 \end{pmatrix}$,

(3) 不可逆, (4) 可逆, $\begin{pmatrix} 20 & -10 & 4 & -1 \\ -45 & 25 & -11 & 3 \\ 36 & -21 & 10 & -3 \\ -10 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $(A-E)^{-1}=\frac{1}{3}A$, $(A+E)^{-1}=A-2E$.

6. $\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & -1\\ & & & 1 & 2\end{pmatrix}$.

§5.4 习题

1. (1) 偶排列，(2) 若 $n/2$ 为偶数，则是奇排列；若 $n/2$ 为奇数，则是偶排列。

2. (1) "−"号，(2) "+"号，(3) "+"号。

3. $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}$，$a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$，$a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$，$-a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}$，$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$，$-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$。

4. $i=2$，$j=3$，$k=4$，"−"号；$i=2$，$j=4$，$k=3$，"+"号；$i=3$，$j=2$，$k=4$，"+"号；$i=3$，$j=4$，$k=2$，"−"号；$i=4$，$j=3$，$k=2$，"+"号；$i=4$，$j=2$，$k=3$，"−"号；

5. (1) 0，(2) $[(b+2a)(b-a)^2]$，(3) 2，(4) 160，(5) $(a+b+c+d)\cdot(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$，(6) $8abc$，(7) -1080，(8) 1142，(9) $[b^2(b^2-4a^2)]$，(10) x^2y^2。

6. 2；−1。

§5.5 习题

5. (1) $(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$，(2) $a_1a_2\cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+1\right)$。

7. (1) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(j-i)$，(2) $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(b_ia_j-a_ib_j)$。

8. $(a^2-b^2)^n$。

§5.6 习题

1. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$，$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。 **3.** $\frac{3}{8}$。

4. (1) $(3,-4,-1,1)$，(2) $(1,-1,0,2)$，(3) (a,b,c)，

(4) $x_i=\frac{1}{(4a+b)(b-a)}\left(a_i(4a+b)-a\sum_{j=1}^{5}a_j\right)$。

5. $f(x)=x^2-5x+3$.

6. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

§5.7 习题

1. (1) 相关，(2) 无关. **2.** (1, 2, 3, 4), **5.** 不一定.

§5.8 习题

1. (1) 2, (2) 3, (3) 3, (4) 4, (5) 3.

2. (1) 秩是2, (2) 秩是3, (3) 秩是3, (4) 秩是2, (5) 秩是3.

3. $ck\neq 1$. **4.** (1) 错，(2) 对，(3) 错，(4) 错.

§5.9 习题

1. (1) $\left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, (2) $\begin{cases} x_1=\frac{6}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4 \\ x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4 \end{cases}$，(3) 无解.

2. (1) 当$\lambda\neq 1, -2$时有唯一解；当$\lambda=1$时有解；当$\lambda=-2$时无解.

(2) 当$a\neq 1, b\neq 0$时有唯一解；当$a=1, b=\frac{1}{2}$时有解；$a=1, b\neq 1/2$及$b=0$时无解.

(3) 当$a=0, b=2$时有解；$a\neq 0$及$a=0, b\neq 2$时无解.

4. (1) $\eta_1=(-1, 1, 1, 0, 0)$, $\eta_2=(-2, -1, 0, 1, 0)$,

(2) $\eta_1=\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0\right)$, $\eta^2=(-1, -2, 0, 1)$.

5. (1) $\gamma_0=(0, 0, 2, 0)$, $\eta_1=(1, -5, 11, 0)$, $\eta_2=(-9, 1, 0, 11)$,

$\gamma=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$.

(2) $\gamma_0=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0\right)$, $\eta_1=(0,1,2,0,0)$, $\eta_2=(0,-1,0,2,0)$,

$\eta_3=(2, 5, 0, 0, 6)$, $\gamma=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3$.

(3) $\gamma_0=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)$, $\eta_1=(-2, -7, -5, 6)$, $\gamma=\gamma_0+c_1\eta_1$.

第 6 章

§6.1 习题

3. 否. **4.** (1) $\{(x, y): x^2+y^2<2\sqrt{2}, |y|>1\}$,

(2) $\{(x, y): x \geqslant 0, x^2+y^2<1, y>x\}$,

(3) $\{(x, y): x^2+y^2 \geqslant 1, x^2 \geqslant y^2\}$,

(4) $\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$, (5) $\{(x, y): y(y+2x) \geqslant 0, x^2+y^2 \neq 0\}$,

(6) $\{(x, y): 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathrm{R}\}$.

6. (1) $-24/25$, $f(x, y)$, (2) $\sqrt{1+x^2}$.

7. (1) $x^4-2x^2y^2+2y^4$, (2) $4x^2y^2$.

10. (1) 2, (2) $8\sqrt{2}$, (3) 0, (4) 0, (5) a, (6) 0, (7) 0, (8) 1, (9) e, (10) 0.

11. (1) 不存在, (2) 1, (3) 不存在, (4) 不存在, (5) 0.

13. (1) $y=x$, 可去, (2) (k, k), $k \in \mathrm{Z}$, Ⅱ类, (3) $y=-x$, Ⅱ类; $x=y^2$, Ⅱ类, (4) $x=m\pi$ 和 $y=n\pi(m, n \in \mathrm{Z})$上的点, Ⅱ类, (5) 三个坐标面上的点, Ⅱ类, (6) 旋转双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2+1=0$ 上的点, Ⅱ类.

§6.2 习题

1. (1) $f'_x=3x^2y-y^3$, $f'_y=x^3-3xy$.

(2) $f'_x=\mathrm{tg}(2x+y)+2(x+2y)\sec^2(2x+y)$,

$f'_y=2\mathrm{tg}(2x+y)+(x+2y)\sec^2(2x+y)$.

(3) $z'_x=\mathrm{ctg}(x-2y)$, $z'_y=-2\mathrm{ctg}(x-2y)$.

(4) $z'_x=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$, $z'_y=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$.

(5) $u'_x=\frac{yz}{x^2+y^2}$, $u'_y=\frac{-xz}{x^2+y^2}$, $u'_z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$.

(6) $u'_x=\frac{y}{xz}x^{\frac{y}{z}}$, $u'_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $u'_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

2. (1) $f'_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=-1$, $f'_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=0$.

(2) $f'_x(1, 2, 0)=1$, $f'_y(1, 2, 0)=\frac{1}{2}$, $f'_z(1, 2, 0)=\frac{1}{2}$.

3. (1) $\frac{1}{90}$, (2) $\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y$, (3) $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$, (4) $e^{\frac{y}{x}}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}$,

(5) $\frac{-2z(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2}$,

(6) $x^{yz}\left(\frac{yz}{x}\mathrm{d}x+z\ln x\,\mathrm{d}y+y\ln x\,\mathrm{d}z\right)$.

5. (1) $\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2t}$, (2) $3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y)$, $x^3(\cos y+\sin y)(1-3\sin y\cos y)$.

(3) $\frac{-t}{s^2+t^2}$, $\frac{s}{s^2+t^2}$. (4) $f'_x+f'_y+tf'_z$, $f'_x-f'_y+sf'_z$.

7. $x+2y-4=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$. **8.** $x+4y+6z\mp 21=0$.

10. 0.52π 米^3.

§6.3 习题

1. (1) $\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{-3x^2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

(2) $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(3) $y^x\ln^2 y$, $y^{x-1}(1+x\ln y)$, $x(x-1)y^{x-2}$.

2. (1) 0. (2) $e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.

(3) $\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-2}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}+\frac{z}{y}\ln\frac{x}{y}\right)$.

3. (1) $2f'+4x^2f''$, $4xyf''$.

(2) $y^2f''_{11}+4xyf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2$, $xyf''_{11}+2(x^2-y^2)f''_{12}-4xyf''_{22}+f'_1$.

(3) $xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$.

5. (1) $\frac{2dy}{y^3}(x\,dy-y\,dx)$. (2) $\frac{-2xy(dx)^2+2(x^2-y^2)dxdy+2xy(dy)^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(3) $\frac{y^2(dx)^2-2xy\,dx\,dy+x^2(dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

(4) $a^2f''_{11}(dx)^2+2abf''_{12}\,dx\,dy+b^2f''_{22}(dy)^2$.

6. $y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3$.

7. $a^2+2ab+b^2+2(a+b)(x-a)+2(a+2b)(y-b)+(x-a)^2+2(x-a)(y-b)+2(y-b)^2$.

§6.4 习题

1. (1) $\frac{y(xy+y+1)}{(1-xy)(1+x)}$. (2) $\frac{e^x-y}{x-\cos y}$.

(3) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$ $(x-y\neq 0)$.

(4) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, $\frac{2xy(3axy-x^3-y^3-a^3)}{(y^2-ax)^3}$.

(5) $\frac{y-z}{x-2yz}$, $\frac{x+z^2}{x-2yz}$. (6) $-\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}-xy}$, $-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}-xy}$.

(7) $z'_x=z'_y=\frac{1}{x+y+z-1}$, $z_{xx}=z_{yy}=z_{xy}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$.

(8) $z_x=\dfrac{xz}{x^2-y^2}$, $z_y=\dfrac{-yz}{x^2-y^2}$, $z_{xx}=\dfrac{-y^2z}{(x^2-y^2)^2}$, $z_{yy}=\dfrac{-x^2z}{(x^2-y^2)^2}$,

$z_{xy}=\dfrac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$. (9) $\dfrac{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}{(F_1-F_2)^3}$.

(10) $2y+\dfrac{F_2}{F_4}$, $2+\dfrac{F_4^2F_{22}-F_{24}F_2F_4+F_2^2F_{44}}{F_4^3}$.

4. (1) $\dfrac{z-y}{y-x}$, $\dfrac{z-x}{x-y}$. (2) $-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}$, $\dfrac{vx-uy}{x^2+y^2}$, $\dfrac{uy-vx}{x^2+y^2}$, $-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}$.

(3) $\dfrac{x+3v^2}{xy-9u^2v^2}$, $\dfrac{3u^2+yv}{9u^2v^2-xy}$. **5.** (2) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$. **6.** -1.

7. (1) $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$, $16x+9y-z-24=0$.

(2) $\begin{cases}x+1=0\\2y-3z+13=0\end{cases}$, $3y+2z=0$.

8. $\dfrac{x-\frac{8}{5}}{4}=\dfrac{y-\frac{4}{5}}{-3}=\dfrac{z-\frac{16}{5}}{8}$ 和 $\dfrac{x-\frac{2}{5}}{4}=\dfrac{y+\frac{4}{5}}{-3}=\dfrac{z-\frac{4}{5}}{8}$.

§6.6 习题

1. (1) 极小点$(4,-2)$, (2) 极大点(a,b),

(3) 极小点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2e}},-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$,

极大点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}},-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

(4) 极小点$(-2,0)$, 极大点$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$.

3. (1) 极小值 $z\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$,

(2) 极大值 $u\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)=u\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$=u\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$; 极小值 $u\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$=u\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=u\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{-1}{3\sqrt{6}}$.

4. $y=\sqrt{5}H$, $h=2H$.

5. 最低点为$(1,1,-5)$, 没有最高点.

6. $\alpha=30°$, $\zeta=\dfrac{p}{3+2\sqrt{3}}$, $\xi=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}p$. **7.** $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$,

8. (1) 最大值为 3, 最小值为 0;

(2) 最大值为 1, 最小值为 0.

9. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$. **10.** $\sqrt{6}$.

11. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$, $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. **12.** $L_0 = 1000$, $\alpha = 1.78 \times 10^{-5}$.

§6.7 习题

1. $z = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. **2.** $y^2 = 4x$, $z = 0$.

3. $x = 2\cos^3 v$, $y = 2\sin^3 v$, $z = \cos 2v$.

6. (1) $(v_0 \cos u_0 - g'(u_0) \sin u_0)x + (v_0 \sin u_0 + g'(u_0) \cos u_0)y - v_0 z$
$+ v_0 g(u_0) = 0$,

(2) 切平面过定直线 $\begin{cases} x \cos u_0 + y \sin u_0 - z + g(u_0) = 0, \\ x \sin u_0 - y \cos u_0 = 0. \end{cases}$

责任编辑　秦　涛
封面设计　倪九青

ISBN 7-305-02991-2
9 787305 029912 >

ISBN 7—305—02991—2
O·209　定价:21.50元