

23 级理强、拔尖班 (范) 微积分 (二)

院系: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一、 (8 分) 判断下列极限是否存在。若存在, 求出极限; 若不存在, 请说明理由。

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

二、 (8 分) 判断函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 在点 $(0, 0)$ 处的连续性, 偏导数是否存在以及可微性, 并说明理由。

三、 (8 分) 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = f(x, y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 所确定的隐函数, 求 u_x 及 u_{xx} 。



四、 (8 分) 已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数。

五、 (8 分) 求 a, b, c 使得向量场 $\vec{A} = (ax + b^2yz, by + axz, cxy - 2z)$ 为一调和场
(即 $\text{rot}\vec{A} \equiv \vec{0}, \text{div}\vec{A} \equiv 0$), 并求其势函数。

六、

(8 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算

$$I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy.$$

七、

(8 分) 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ 上各点的密度大小为该点到坐标原点的距离, 求该球的质量。

八、 (8 分) 已知 Σ 为曲面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 的上侧, L 为 Σ 的边界曲线, 其正向与 Σ 的正法向满足右手法则, 计算曲线积分

$$I = \int_L (yz^2 - \cos z)dx + 2xz^2dy + (2xyz + x \sin z)dz。$$

九、 (8 分) 若流体速度为 $\vec{v} = (x^2, y^2, z^2)$, 求单位时间内穿过八分之一球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的流量。

十、 (10 分) 设函数 $\phi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数。

1. 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\phi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;



2. 求函数 $\phi(y)$ 的表达式。

十一、(10 分) 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直。

1. 求点 P 的轨迹 C ;

2. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分。

十二、 (8 分) 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其上表面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为 cm , 时间单位为 h), 已知雪堆体积减少的速率与上表面积成正比 (比例系数为 0.9), 问高度为 130 (cm) 的雪堆全部融化需要多少小时?

